ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

28. BAND

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
ALS ERGÄNZUNG ZU IHREN „VERHANDLUNGEN"
UNTER DER REDAKTION VON

KARL SCHEEL

ACHTUNDZWANZIGSTER BAND

Mit 115 Textfiguren und 4 Tafeln

(Ausgegeben September — Oktober 1924)

FRIEDR. VIEWEG & SOHN
AKT.-GES. BRAUNSCHWEIG
UND
JULIUS SPRINGER
BERLIN

1924

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt.

Seite

H. Falkenhagen, Zum Paschen-Back-Effekt des H-Atoms. (Eingegangen am 20. August 1924) 1

W. Arkadiew, Magnetische Spektra von Eisen- und Nickeldrähten für zentimeterlange Hertzsche Wellen. Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 11. August 1924) 11

W. Ewald und M. Polanyi, Plastizität und Festigkeit von Steinsalz unter Wasser. Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 25. Juni 1924) . . 29

Rudolf Ladenburg, Der quadratische elektrische Effekt an den *D*-Linien des Natriums in Absorption (inverser Starkeffekt). Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 13. Juni 1924) 51

Franz Wever, Über die Walzstruktur kubisch kristallisierender Metalle. Mit neun Abbildungen und vier Tafeln. (Eingegangen am 12. Juli 1924) 69

L. Grebe und L. Kriegesmann, Über den Energieverbrauch bei der Ionisation der Luft durch Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juli 1924) 91

H. A. Senftleben, Bemerkungen zu meiner Publikation: „Zur Grundlegung der Quantentheorie". (Eingegangen am 11. August 1924) 95

V. Fock, Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 9. Juli 1924) 102

Stephan Bodócs, Die Verallgemeinerung des „Hyperbelsatzes der geometrischen Optik". Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1924) 114

A. Günther-Schulze, Kathodenfall, Stromstärke und Fallraumdicke der Glimmentladung in Gemischen von Gasen, die chemisch nicht miteinander reagieren. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 27. August 1924) 129

L. S. Ornstein und H. C. Burger, Intensitäten der Komponenten im Zeemaneffekt. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht. Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 20. August 1924) . . 135

Adolf Smekal, Zur Quantentheorie der radioaktiven Zerfallsvorgänge. II. (Eingegangen am 20. August 1924) 142

Max Müller, Über die Abhängigkeit der Röntgenstrahlenausbeute von der Entladungsform. Aus dem Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin, Frankfurt a. M. Mit 18 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Juli 1924) 146

G. Masing und M. Polanyi, Zur Reißverfestigung von Zink durch Kaltrecken. Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 30. Juli 1924) . . . 169

Alfred Riede, Galvanische Leitfähigkeit und Halleffekt dünner Nickelschichten. Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 7. August 1924) 177

Seite

Werner Pohlmeyer, Über das β-Strahlenspektrum von Th B + C. Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 13. August 1924) 216

Felix Joachim v. Wiśniewski, Über die Absorptionsgrenzen der K-Reihe. (Eingegangen am 16. August 1924) 231

Holjer Witt, Prüfung einer spektrometrischen Methode im langwelligen Spektrum. Mit acht Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1924) 236

Derselbe, Über Serien im Absorptionsspektrum des Wasserdampfes. Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 14. August 1924) 249

Richard Becker, Eine einfache kinetische Ableitung der Ionisierungs- und Dampfdruckgleichung. (Eingegangen am 29. August 1924) . . . 256

R. Mecke, Zur Systematik der Bandenspektra. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 23. August 1924) 261

D. Skobelzyn, Über den Rückstoßeffekt der zerstreuten γ-Strahlen. Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 18. August 1924) 278

Nikolaus Lyon, Über die elektrische Doppelbrechung von Gasen. Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 23. Juli 1924) 287

Wilhelm Anderson, Über die Existenzmöglichkeit von kosmischem Staube in der Sonnenkorona. (Eingegangen am 31. Juli 1924) 299

A. Günther-Schulze, Über die Existenz des Lichtbogens bei nicht glühender Kathode. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 11. September 1924) 325

G. v. Gleich, Die Vieldeutigkeit in der Relativitätstheorie. (Eingegangen am 2. September 1924) 329

A. H. Bucherer, Nachtrag zur Arbeit: Über die Masse als Funktion des Schwerepotentials. (Eingegangen am 2. September 1924) 335

W. A. Plotnikow, Die Verpackungshypothese. (Eingegangen am 1. September 1924) 339

Martin Grützmacher, Über die Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeitsgemischen. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 1. August 1924) 342

E. Schiebold, Über graphische Auswertung von Röntgenphotogrammen. Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung, Berlin-Dahlem. (Vorläufige Mitteilung.) Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 8. August 1924) 355

Witold Jazyna, Die thermodynamische Invariante und die spezifische Wärme beim absoluten Nullpunkt. (Eingegangen am 25. August 1924) 371

H. Kienle und P. ten Bruggencate, Die absolute Helligkeit der Plejadensterne. Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1924) 373

Autorenregister 393

Zum Paschen-Back-Effekt des H-Atoms.

Von **H. Falkenhagen** in Köln.

(Eingegangen am 20. August 1924.)

Nachdem experimentell durch Oldenberg, Försterling und Hansen der genaue Verlauf der magnetischen Aufspaltung der H_α- und H_β-Linie gelungen war, erhob sich die Frage zu ihrer Erklärung. Als einzige Möglichkeit ergab sich unter Beibehaltung des bekannten Bohrschen H-Atoms die Berücksichtigung der Kernbeweglichkeit und Veränderlichkeit der Massen von Kern und Elektron im Sinne der Relativitätstheorie. Rechnungen analog denen der Störungstheorie der Astronomie zeigten nicht den erwarteten Effekt: Somit ergab sich in einfacher Weise das Resultat, daß die nicht bedingt periodischen Systeme eine besondere Untersuchung erforderlich machen und eine Quantelung hierfür vorerst aussteht. Damit bietet sich der Forschung ein neuartiges Feld von Arbeiten.

P. Erochin[1]) hat sich zum erstenmal für die Frage der Aufspaltung der Feinstruktur der H_α-Linie der Balmerserie des H-Atoms im Magnetfelde interessiert. Doch sind, wie inzwischen von Oldenberg[2]), Försterling und Hansen[3]) festgestellt ist, diese Beobachtungen für die Komponente senkrecht zum Felde bestimmt nicht richtig. Wir können die nunmehr experimentell feststehende Sachlage kurz folgendermaßen darstellen auf Grund der neueren Beobachtungen an H_α und H_β. Im Magnetfelde bildet jede der beiden Dublettkomponenten ein gewöhnliches Zeemantriplett. Bei anwachsendem Feld rücken nun diese aufeinander zu und gehen schließlich bei starken Feldern in ein einziges Triplett über. Das Magnetfeld hebt die Wirkung der Massenveränderlichkeit auf, bringt also die Feinstruktur zum Verschwinden.

Schon vor Erscheinen der letzten neuesten Arbeiten hatte ich mich, angeregt durch Debyes[4]) und Sommerfelds[5]) Arbeiten über den Zeemaneffekt des H-Atoms und Erochins Experimentaluntersuchung, mit der theoretischen Deutung dieses Versuchs befaßt. Starkeffekt ist natürlich nicht in Betracht zu ziehen, da die Geisslerröhren bei Erochin, Oldenberg und von Försterlings und Hansens Aufnahmen parallel den Kraftlinien standen. Ich möchte noch bemerken, daß Oldenberg nachgewiesen hat, daß das elektrische Feld in der Röhre in diesem Fall

---

[1]) P. Erochin, Ann. d. Phys. **42**, 1054, 1913. F. Paschen u. E. Back, ebenda **39**, 897, 1912; **40**, 960, 1913.

[2]) O. Oldenberg, ebenda **67**, 271, 1922.

[3]) K. Försterling und G. Hansen, ZS. f. Phys. **18**, 26, 1923.

[4]) P. Debye, Göttinger Nachrichten 3. Juni 1916.

[5]) A. Sommerfeld, Phys. ZS. **17**, 491, 1916.

beim Einschalten des Magnetfeldes sicher nicht vergrößert wird. Somit war, soweit ich sehe, die einzigste Möglichkeit, den Paschen-Back-Effekt des H-Atoms theoretisch zu erklären, die Berücksichtigung der Kernbeweglichkeit, auf die man bei Zugrundelegung des Bohrschen H-Atoms bisher noch nicht geachtet hatte, im Verein mit der Veränderlichkeit der Masse im Sinne der Relativitätstheorie. Das Angenehme beim H-Atom ist dann gerade, daß andere Variationsmöglichkeiten nicht in Frage kommen. Die Rechnungen sind äußerst kompliziert, so daß ich sie nicht ausführlich mitteile, sondern die Methode an dem einfachsten Beispiel darstelle und dann das allgemeine Resultat angebe.

Daher achte ich noch nicht auf die Glieder, die für die Hamiltonsche Prinzipalfunktion in Frage kommen, soweit sie von der Veränderlichkeit der Masse herrühren. Elektronen und Kern mögen als rechtwinklige Koordinaten x, y, z bzw. X, Y, Z haben. Ihre jeweiligen Ladungen seien $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$. Die Darstellung der Bewegung dieses Systems unter Einwirkung eines konstanten Magnetfeldes ergibt sich am einfachsten mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion L. Für die Kraft, welche das Magnetfeld auf das Elektron bzw. den Kern ausübt, machen wir den Lorentzschen Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}_e &= -\varepsilon\mathfrak{E} - \varepsilon\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right], \\ \mathfrak{F}_K &= +\varepsilon\mathfrak{E} + \varepsilon\left[\frac{\mathfrak{B}}{c}\mathfrak{H}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische bzw. magnetische Feldstärke am Ort der Ladung, während $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{B}$ die Geschwindigkeit des Elektrons bzw. Kernes bedeuten. Die Koordinaten des Elektrons bzw. Kernes charakterisieren wir durch die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{R}$. Bedeuten μ und M die jeweiligen Massen von Elektron und Kern, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} &= \mathfrak{F}_e, \\ M\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} &= \mathfrak{F}_K. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Benutzen wir im Sinne der Maxwell-Lorentzschen Theorie das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, so sieht man sofort, daß diese Potentiale eine ganz besondere Rolle bei der geforderten Aufstellung der Lagrangeschen Funktion spielen. Setzt man nämlich:

$$L = T + \frac{\varepsilon^2}{r_{12}} - \frac{\varepsilon}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}_1) + \frac{\varepsilon}{c}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2), \tag{3}$$

wo T die kinetische Energie unseres Systems bedeutet, ferner

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= \tfrac{1}{2}[\mathfrak{H}\mathfrak{r}],\\ \mathfrak{A}_2 &= \tfrac{1}{2}[\mathfrak{H}\mathfrak{R}],\end{aligned}\right| \tag{4}$$

und r_{12} den Abstand Kern–Elektron mißt, so sieht man leicht, daß sich daraus die oben an die Spitze gestellten Bewegungsgleichungen (2) ergeben. Damit ist die Lagrangesche Funktion bereits gefunden. Beim Übergang zur Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung sieht man dann leicht, daß eine Separation der Variablen im Sinne von Schwarzschild-Epstein in irgendwelchen Koordinaten unmöglich ist. Wir wollen in Zukunft, da es das einfachste ist, alle unsere Betrachtungen auf die Schwerpunkts- und die relativen Koordinaten beziehen. Wir führen also 6 neue Koordinaten ein vermöge der Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x_s = \frac{MX + \mu x}{M+\mu};\quad y_s = \frac{MY + \mu y}{M+\mu};\quad z_s = \frac{MZ + \mu z}{M+\mu}.\\ x - X = \xi;\quad y - Y = \eta;\quad z - Z = \zeta.\end{aligned}\right| \tag{5}$$

Der Index s bezieht sich auf den Schwerpunkt. Führt man nun noch die bekannte Lamorkreisfrequenz

$$\omega = \frac{\varepsilon H}{2\mu c} \tag{6}$$

ein, vernächlässigt, ähnlich wie das Debye und Sommerfeld getan haben, was auch in unserem Falle erlaubt ist, die quadratischen Glieder in ω, bedenkt man ferner, daß $\frac{\mu}{M}$ gegenüber 1 klein ist, so findet man für die Hamiltonsche Funktion in Schwerpunkts- und relativen Koordinaten und den entsprechenden Impulsen folgenden Ausdruck:

$$E = E_0 + E^*. \tag{7}$$

Hierin bedeutet E_0 die erste Näherung des Problems, die herauskommt, wenn wir die Kernmasse $M = \infty$ setzen, d. h. also, der Kern als ruhend betrachtet wird. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2\mu}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} + \omega(p_\eta\xi - \eta p_\xi).\\ E^* &= \frac{1}{2M}\left(1 - \frac{\mu}{M}\right)(p_{x_s}^2 + p_{y_s}^2 + p_{z_s}^2) + \frac{1}{2\mu}\frac{\mu}{M}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2)\\ &\quad + \omega\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)(x_s p_\eta - y_s \cdot p_\xi)\\ &\quad - \omega\frac{\mu}{M}(\xi p_\eta - \eta p_\xi) + \omega\frac{\mu}{M}(\xi p_{y_s} - \eta p_{x_s}).\end{aligned}\right| \tag{8}$$

Die Methode der Lösung besteht nun in folgendem: Wir drücken E_0 und E^* aus in den Schwarzschildschen Winkel- und Wirkungsvariablen w und J. Dabei nehmen wir noch eine kanonische Transformation[1]) vor, um die entstehenden Ausdrücke möglichst zu vereinfachen.

Dann sind

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sqrt{\mu \varepsilon^2 \cdot a}, \\ J_2 &= \sqrt{\mu \varepsilon^2 \cdot a(1-e^2)}, \\ J_3 &= \sqrt{\mu \varepsilon^2 \cdot a(1-e^2)}\cos i, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo a die halbe große Achse der Ellipse, e die numerische Exzentrizität und i die Bedeutung des Neigungswinkels der Bahnebene gegen die Ebene senkrecht zum magnetischen Feld hat. Die physikalische Bedeutung der Winkelvariablen ergibt sich dann einfach in folgender Weise: Die momentane Bahnebene schneidet die Ebene senkrecht zum magnetischen Felde in einer Knotenlinie, die dann mit der x-Achse den Winkel w_3 bildet. Ferner ist die Länge des Perihels gegen die Knotenlinie einfach w_2, und die augenblickliche Lage des Elektrons wird durch den Winkel w_1 gegen das Perihel gemessen. Wenn wir von dem Störungsgliede E^* absehen, lauten die kanonischen Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dJ_1}{dt} &= 0; & \frac{dJ_2}{dt} &= 0; & \frac{dJ_3}{dt} &= 0; \\ \frac{dw_1}{dt} &= \frac{\partial E_0}{\partial J_1}; & \frac{dw_2}{dt} &= 0; & \frac{dw_3}{dt} &= \omega. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei ist

$$E_0 = -\frac{\mu \varepsilon^4}{2 J_1^2} + \omega J_3. \tag{11}$$

Das heißt aber nichts anderes, als daß die J konstant und die Winkel lineare Funktionen der Zeit bzw. konstant sind im Sinne einer bedingt periodischen Bewegung. Physikalisch gedeutet heißt das, daß das Perihel zeitlich an derselben Stelle der Bahnen bleibt und die Knotenlinie relativ zu $\frac{dw_1}{dt}$ langsam um die Achse des magnetischen Feldes mit der Winkelgeschwindigkeit ω herumrotiert, die also klein ist gegenüber der Umlaufsfrequenz des Elektrons. Wir können uns nun ganz allgemein die Hamiltonsche Funktion E ausgedrückt denken in den Winkel- und

[1]) Whittaker, Analyt. Dynamics, Cambridge 1917.

Wirkungsvariablen J und w einerseits und in den Schwerpunktskoordinaten und Schwerpunktsimpulsen andrerseits, so daß also wird:

$$E = E(J_1, J_2, J_3, w_1, w_2, w_3, p_{x_s}, p_{y_s}, p_{z_s}, x_s, y_s, z_s). \tag{12}$$

Dann lauten die kanonischen Differentialgleichungen der Bewegung in Näherung, indem wir $E = E_0 + E^*$ setzen und unter E_0 die Energie für $M = \infty$ verstehen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dJ_1}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial w_1}; \quad \frac{dJ_2}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial w_2}; \quad \frac{dJ_3}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial w_3};\\
&\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial E^0}{\partial J_1} + \frac{\partial E^*}{\partial J_1}; \quad \frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial E^*}{\partial J_2}; \quad \frac{dw_3}{dt} = \omega + \frac{\partial E^*}{\partial J_3};\\
&\frac{dp_{x_s}}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial x_s}; \quad \frac{dp_{y_s}}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial y_s}; \quad \frac{dp_{z_s}}{dt} = -\frac{\partial E^*}{\partial z_s};\\
&\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial E^*}{\partial p_{x_s}}; \quad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial E^*}{\partial p_{y_s}}; \quad \frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial E^*}{\partial p_{z_s}}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dabei setzen wir in E^0 und E^* die ersten Näherungen $J = \text{const}$ und

$$\left.\begin{aligned}
w_1 &= \omega_1 t + \delta_1,\\
w_2 &= \text{const},\\
w_3 &= \omega t + \delta_3
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ein. So ist dieses Differentialgleichungssystem aufzufassen. Haben wir dann die Störungen berechnet, so können wir dasselbe nochmalige Verfahren benutzen, um uns eine dritte Näherung zu verschaffen usw. Wir entwickeln also unser nicht bedingt periodisches System in eine unendliche Reihe von bedingt periodischen. Wir werden aber sehen, daß bereits die zweite Näherung für unser physikalisches Problem vollkommen ausreicht. Man kann dies Verfahren auf eine große Reihe von Beispielen anwenden und sich überzeugen, daß es zu richtigen Ergebnissen führt auch in den bekannten Fällen des Starkeffekts, der Veränderlichkeit der Masse usf. Diese Methode ist auch in der Literatur auf zahlreiche Fälle angewandt. (Bohr und seine Schüler, Epstein, Born, Brody, Pauli usw.)

Wir rechnen als Beispiel zunächst das Kreisproblem durch: In einer $\xi'\eta'$-Ebene denken wir uns eine Bewegung des Elektrons in einer Kreisbahn verlaufend. Die Kreisfrequenz möge ω_1 sein. Da für den Radius jetzt der Ausdruck KJ_1^2 zu setzen ist, wo K zur Abkürzung gesetzt ist für:

$$K = \frac{1}{\mu \varepsilon^2} \tag{15}$$

und die Winkelkoordinate in diesem Falle ist $w_1 = \omega_1 t + \delta_1$, können wir die Darstellung der Koordinaten als Funktionen der Zeit in folgender Weise besonders einfach gestalten:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -KJ_1^2 \cos w_1, \\ \eta' &= +KJ_1^2 \sin w_1, \\ \zeta' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Nun möge die Bahnebene unter einem Winkel i gegen die ξ, η-Ebene geneigt sein. Führt man dann mit Hilfe der Eulerschen Winkel i, φ, ψ die Koordinatentransformation durch vermöge der Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta', \\ \eta &= \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta', \\ \zeta &= \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \cdot \eta' + \gamma_3 \zeta', \\ \alpha_1 &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos i, \\ \alpha_2 &= -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos i, \\ \alpha_3 &= \sin\varphi \sin i, \\ \beta_1 &= \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos i, \\ \beta_2 &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos i, \\ \beta_3 &= -\cos\varphi \sin i, \\ \gamma_1 &= \sin\psi \sin i, \\ \gamma_2 &= \cos\psi \sin i, \\ \gamma_3 &= \cos i, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so findet man leicht, wenn man $\psi = \frac{\pi}{2}$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -KJ_1^2 [\gamma' \cos w_1 \cos w_3 - \sin w_1 \sin w_3], \\ \eta &= -KJ_1^2 [\sin w_1 \cos w_3 + \gamma' \cos w_1 \sin w_3], \\ \zeta &= -KJ_1^2 \gamma \cos w_1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sin i, \\ \gamma' &= \cos i, \\ \varphi &= \omega t + \delta = w_3 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

gesetzt.

Diese Bewegung bezieht sich nur auf die ungestörte. Wir wollen daher einen Index 0 heransetzen und können somit für (18) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= -K\overset{0}{J}{}_1^2 \left[\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\cos(w_1 + w_3) - \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\cos(-w_1 + w_3)\right], \\ \eta_0 &= -K\overset{0}{J}{}_1^2 \left[\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\sin(w_1 + w_3) - \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\sin(-w_1 + w_3)\right], \\ \zeta_0 &= -K\overset{0}{J}{}_1^2 \gamma \cos w_1. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Diese Schreibweise ist wegen der im folgenden oft vorkommenden Differentiationen einfacher als (18). Rechnen wir hieraus die Impulse aus, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} p_\xi^0 &= \mu K \overset{0}{J}{}_1^2 \left[\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\omega_1 \sin(w_1+w_3) + \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\omega_1 \sin(-w_1+w_3)\right], \\ p_\eta^0 &= -\mu K \overset{0}{J}{}_1^2 \left[\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\omega_1 \cos(w_1+w_3) + \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\omega_1 \cos(-w_1+w_3)\right], \\ p_\zeta^0 &= \mu K \overset{0}{J}{}_1^2 \gamma \omega_1 \sin \omega_1 t. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Wir berechnen nunmehr E_0 und E^* und finden

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= -\frac{\mu \varepsilon^4}{2 J_1^2} + \omega J_3, \\ E^* &= \frac{1}{2M}\left(1-\frac{\mu}{M}\right)(p_{x_s}^2 + p_{y_s}^2 + p_{z_s}^2) + \frac{\mu}{M}\frac{{}^1/_2 \mu \varepsilon^4}{J_1^2} - \omega \frac{\mu}{M} J_3 \\ &+ \omega\left(1+\frac{\mu}{M}\right)\frac{\mu \varepsilon^2}{J_1}\left[-x_s\left\{\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\cos(w_1+w_3)+\left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\cos(-w_1+w_3)\right\}\right. \\ &\left. - y_s\left\{\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\sin(w_1+w_3)+\left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\sin(-w_1+w_3)\right\}\right] \\ &- \omega \frac{\mu}{M} K J_1^2 \left[p_{y_s}\left\{\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\cos(w_1+w_3) - \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\cos(-w_1+w_3)\right\}\right. \\ &\left. - p_{x_s}\left\{\left(\frac{1+\gamma'}{2}\right)\sin(w_1+w_3) - \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right)\sin(-w_1+w_3)\right\}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Jetzt können wir die Störungsgleichungen aufstellen und integrieren. Ich möchte gleich das Resultat dieser Rechnung angeben. Man findet für die Schwerpunktsbewegung eine kleine Ellipse in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld mit der großen Halbachse

$$\frac{2\mu}{M}\frac{\omega}{\omega_1} K J_1^2,$$

die sich langsam um die Richtung des magnetischen Feldes herumdreht. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1+\gamma'}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{J_3}{J_2}\right) = c_1, \\ \left(\frac{1-\gamma'}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{J_3}{J_2}\right) = c_2, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

so erhält man für die Schwerpunktsimpulse und Koordinaten folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= -\frac{2\mu}{M}\frac{\omega}{\omega_1} K J_1^2 \{c_1 \cos(w_1 + w_3) + c_2 \cos(-w_1 + w_3)\},\\ y_s &= -\frac{2\mu}{M}\frac{\omega}{\omega_1} K J_1^2 \{c_1 \sin(w_1 + w_3) + c_2 \sin(-w_1 + w_3)\},\\ z_s &= 0,\\ p_{x_s} &= -2\mu\omega K J_1^2 \{-c_1 \sin(w_1 + w_3) + c_2 \sin(-w_1 + w_3)\},\\ p_{y_s} &= -2\mu\omega K J_1^2 \{c_1 \cos(w_1 + w_3) - c_2 \cos(-w_1 + w_3)\},\\ p_{z_s} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Dabei sind die J_1, J_2, J_3 konstant und w_1, w_2, w_3 mit der Zeit vermöge (14) verknüpft.

Ich habe der Einfachheit halber den Index 0 wieder fortgelassen.

Berechnet man nun E^*, so erhält man nach zeitlicher Mittelung über die ω_1 entsprechende Periode:

$$E^* = \frac{\mu}{M}\frac{{}^1/_2 \mu \varepsilon^4}{J_1^2} + \frac{6\mu^2}{M}\omega^2 K^2 J_1^4 (c_1^2 + c_2^2) - \omega\frac{\mu}{M} J_3. \quad (25)$$

Hieraus findet man dann die Änderungen der Wirkungsvariablen zeitlich gemittelt über die ω_1 entsprechende Periode zu Null und damit die Energie zu

$$E = -\frac{\mu\varepsilon^4}{2J_1^2} + \omega J_3 + \frac{\mu}{M}\frac{{}^1/_2\mu\varepsilon^4}{J_1^2} - \omega\frac{\mu}{M} J_3 + \frac{3\mu^2}{M}\omega^2 K^2 J_1^4 \left(1 + \left(\frac{J_3}{J_2}\right)^2\right). \quad (26)$$

Hieraus ergibt sich dann sofort die Serienformel:

$$\nu = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_1'^2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{M}\right) + \omega\left(1 - \frac{\mu}{M}\right)(n_3 - n_3') + \frac{3\mu^2}{M}\omega^2 K^2 \left[n_1^4 \left(1 + \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2\right) - n_1'^4 \left(1 + \left(\frac{n_3'}{n_2'}\right)^2\right)\right]. \quad (27)$$

Interessant ist noch eine Bemerkung über die Größenordnung der Glieder der Energie E. Bezeichnet man diese jeweils mit I, II, III, IV, V, so schätzt man leicht die Größenordnung ab und findet:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \frac{10^{-11}}{n_1^2}\ \text{erg},\\ \text{II} &\sim n_3 \cdot 10^{-16}\ \text{erg},\\ \text{III} &\sim \frac{10^{-14}}{n_1^2},\\ \text{IV} &\sim 10^{-19}\ \text{erg},\\ \text{V} &\sim n_1^4 \cdot 10^{-24}. \end{aligned}$$

Gehen wir nunmehr zum allgemeinen Fall der elliptischen Bahn mit Berücksichtigung der Relativitätstheorie über, so hat man nur zu bedenken, daß jetzt die Lagrangesche Funktion

$$L = -\mu c^2\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right)+\frac{\varepsilon^2}{r_{12}}-Mc^2\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-1\right)$$
$$+\frac{\varepsilon}{c}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2)-\frac{\varepsilon}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}_1) \tag{28}$$

wird. Man stellt nun wieder die Hamiltonsche Funktion auf und trennt in Haupt- und Störungsterm. Da jetzt infolge der Massenveränderlichkeit noch Perihelbewegung mit der Winkelvariablen w_2 auftritt, so setzt man zweckmäßig

$$E_0 = -\frac{\mu\varepsilon^4}{2J_1^2}+\omega J_2-\frac{\mu\varepsilon^8}{8c^2}\left[\frac{4}{J_1^3 . J_2}-\frac{3}{J_1^4}\right]. \tag{29}$$

Das dritte Glied in E_0 hat etwa die Größenordnung 10^{-19} erg. Den Ausdruck für E^* gebe ich der Einfachheit halber nicht an. Als erste Näherung in die kanonischen Differentialgleichungen führt man dann wieder die konstanten Wirkungsvariablen J_1, J_2, J_3 ein, und ebenso die lineare Funktionen der Zeit bildenden Winkelvariablen w_1, w_2, w_3, und die als Funktionen dieser bekannten Ausdrücke der Astronomie:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= {}^3/_2\gamma' e K J_1^2\cos w_3 - KJ_1^2\Sigma D_\tau\cos(\tau w_1+w_2+w_3),\\
\eta &= {}^3/_2\gamma' e K J_1^2\sin w_3 - KJ_1^2\Sigma D_\tau\sin(\tau w_1+w_2+w_3),\\
\zeta &= {}^3/_2\gamma e K J_1^2 - KJ_1^2\gamma\Sigma C_\tau\cos(\tau w_1+w_2),
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

e ist dabei die Exzentrizität der Ellipse, und es gilt:

$$\left.\begin{aligned}
D_\tau &= \frac{1}{2\tau}\{(e'+\gamma')\bar{J}_{\tau-1}(\tau e)+(e'-\gamma')\bar{J}_{\tau+1}(\tau e)\},\\
C_\tau &= \frac{1}{2\tau}\{(1+e')\bar{J}_{\tau-1}(\tau e)-(1-e')\bar{J}_{\tau+1}(\tau e)\},\\
e' &= \frac{J_2}{J_1}=\sqrt{1-e^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hierin sind $\bar{J}_{\tau-1}$, ... die bekannten Besselschen Funktionen, die in den Tabellen von Jahnke und Emde tabelliert sind. τ läuft von $-\infty$ bis $+\infty$ und darf den Wert 0 nicht annehmen. Außerdem gilt

$$\left.\begin{aligned}
\bar{J}_{p-1}+\bar{J}_{p+2} &= \frac{2p}{x}\bar{J}_p,\\
\bar{J}_{-\tau}(-x) &= \bar{J}_\tau(x).
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Genau wie früher kann man nun die Schwerpunktsbewegung ausrechnen und findet dabei eine elliptische Kurve, die alle Bewegungen der ursprünglichen mitmacht, aber in der xy-Ebene gelegen ist. Dann kann man die Störungen der J berechnen, die Energie- und Quantenformeln aufstellen und findet dann bis auf die Glieder der Relativität denselben Ausdruck wie (27).

(Die periodischen Glieder heben sich im Mittel alle heraus, sie sind nebenbei bemerkt mit den Potenzen der Exzentrizität behaftet.) Ich habe die Rechnung zwar bis ins einzelne durchgeführt, begnüge mich aber hier mit der Angabe der Resultate, da sie sehr umständliche Ausdrücke enthält.

Man sieht jedenfalls als Ergebnis dieser Arbeit, daß eine Erklärung der experimentellen Ergebnisse am H-Atom vermöge der Kernbeweglichkeit nicht möglich ist. Es lag nämlich die Vermutung nahe, daß die Wirkung der Kernbeweglichkeit und die der Glieder der Relativität sich aufheben und den experimentell bestätigten Effekt erklären würde. Wir stehen damit in unseren Auffassungen vor neuen großen Schwierigkeiten, die zu lösen eine interessante, aber schwierige Aufgabe sein dürfte. Denn logischerweise gibt es nur zwei Möglichkeiten unter Annahme des bekannten H-Atoms: Entweder ist die Sommerfeldsche Theorie des H-Atoms nicht ganz in Ordnung oder zweitens die Quantelung nicht bedingt periodischer Systeme eine uns noch unbekannte. Die erste Möglichkeit kommt nicht in Betracht, wenn man an die vorzügliche Übereinstimmung der Sommerfeldschen Feinstruktur auch am Funkenspektrum des He^+ denkt. Somit wird die zweite Möglichkeit wahrscheinlich gemacht. Damit ist allerdings eine große Reihe von Arbeiten in der Literatur über nicht bedingt periodische Systeme in Frage gestellt.

Magnetische Spektra von Eisen- und Nickeldrähten für zentimeterlange Hertzsche Wellen.

Von **W. Arkadiew** in Moskau.

Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 11. August 1924.)

Die Banden der magnetischen Absorption wurden aus den Absorptionskoeffizienten γ der Wellen an Drähten ermittelt (Fig. 1). Drähte von verschiedenem Durchmesser $2R$ ergeben die verschiedenen Werte der Permeabilität μ_k (Fig. 2) und die verschiedenen Spektra $s' = \sqrt{\frac{\mu_k}{\lambda}}$ (Fig. 3). Die in einer früheren Mitteilung angegebenen Rechnungsregeln für die Analyse der magnetischen Spektra gestatten, aus der Form der Banden die Charakteristika der Elementarmagnete λ_0, Θ und μ_∞ zu bestimmen. Die nach diesen Parametern konstruierten theoretischen Permeabilitäts- und Absorptionskurven stimmen mit den Versuchsergebnissen überein (Fig. 4). Die Charakteristika λ_0, Θ und μ_∞ sind sehr veränderlich (Tabelle 7). Dagegen sind der maximale Wert der magnetischen Leitfähigkeit ϱ_{max} und der Halbmesser der Elementarmagnete a in den kürzesten Wellen weniger von der Drahtsorte abhängig (Fig. 5 und Tabelle 8). Die Inkonstanz der Form der magnetischen Spektren ist durch die Instabilität der magnetischen Eigenschaften der ferromagnetischen Materialien bedingt.

§ 1. Ermittlung magnetischer Spektren nach der Drahtwellenmethode.

Bezeichnen wir durch L_1 die Selbstinduktion von 1 cm Länge zweier paralleler Drähte und durch C_1 ihre Kapazität, so finden wir in der Theorie[1]) der Drahtwellen den Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \tag{1}$$

Falls wir den Drahtabstand mit a und den Halbmesser mit R bezeichnen, so haben wir

$$C_1 = \frac{1}{c^2\, 4 \lg \frac{a}{R}} \tag{2}$$

und

$$L_1 = L_0 + 2 L_i, \tag{3}$$

wobei

$$L_0 = 4 \lg \frac{a}{R} \tag{4}$$

---

[1]) Strengere Ausführungen siehe z. B. W. Arkadiew, Ann. d. Phys. **58**, 105, 1919, die auf der Theorie von G. Mie (Ann. d. Phys. **2**, 201, 1900) begründet sind.

die äußere Selbstinduktion von 1 cm des Drahtsystems ist und L_i die innere Selbstinduktion von 1 cm Draht bedeutet. Wir können L_1 in folgender Form darstellen:

$$L_1 = L_0(1 + 2\eta), \tag{5}$$

so daß

$$\eta = \frac{L_i}{L_0} \tag{6}$$

ist. Dann wird

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{1 + 2\eta}}. \tag{7}$$

Falls der Parameter

$$k = \pi R \sqrt{\frac{\mu_k \sigma}{T}} \tag{8}$$

groß genug ist (σ elektrische Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten, T Periode) und der Strom nur auf der Drahtoberfläche verteilt ist, so haben wir[1])

$$L_i = \frac{c}{2\pi R} \sqrt{\frac{T\mu_n}{\sigma}}, \tag{9}$$

wo

$$\mu_k = \sqrt{\mu^2 + \varrho'^2} + \varrho' \quad \text{und} \quad \mu_n = \sqrt{\mu^2 + \varrho'^2} - \varrho' \tag{10}$$

bedeuten; ϱ' ist die magnetische Aufspeicherung $2\varrho T$ („zähe" Permeabilität), ϱ die magnetische Leitfähigkeit und μ die Permeabilität („elastische" Permeabilität). Es ist leicht einzusehen, daß L_i und damit η klein genug sind, um setzen zu können:

$$\omega = \frac{c}{1 + \eta}. \tag{11}$$

Die Wellenlänge in Drähten ist $\lambda' = \omega T$; bezeichnen wir mit $\lambda = cT$ die Wellenlänge im Vakuum, so bekommen wir, daß

$$\eta = \frac{c - \omega}{\omega} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \tag{12}$$

ist. Die Wellenlänge in Drähten λ' kann man nach der Methode der stehenden Drahtwellen, d. h. nach der Resonanzmethode bestimmen. Man kann annehmen, daß in nicht allzu dünnen Kupferdrähten $\lambda' = \lambda$ ist. Kennen wir λ' und λ, so finden wir nach (12) η und nach (6) und (9) die scheinbare Permeabilität μ_n.

Für den Absorptionskoeffizienten der Wellenenergie an Drähten γ haben wir[2])

$$\gamma = 2r' C_1 \omega = \frac{2r' C_1 c}{1 + \eta}, \tag{13}$$

---

[1]) ZS. f. Phys. **27**, 37, 1924, Gl. (53) und (54).

[2]) Strengere Ausführungen siehe z. B. W. Arkadiew, Ann. d. Phys. **58**, 105, 1919, die auf der Theorie von G. Mie (Ann. d. Phys. **2**, 201, 1900) begründet sind.

wobei r' den Wechselstromwiderstand von 1 cm eines Drahtes bedeutet. Falls k groß ist, so gilt der Ausdruck [1])

$$r' = \frac{1}{cR}\sqrt{\frac{\mu_k}{\sigma T}}. \tag{14}$$

Beobachten wir die Resonanz eines Rechtecks, das mittels zweier Brücken von dem Drahtsystem abgeteilt ist, so können wir sein Dämpfungsdekrement δ finden, für welches der Ausdruck gilt

$$\delta = \frac{r'}{L_1} T.$$

Nehmen wir L_1 aus (5), so erhalten wir

$$\delta = \frac{r' \cdot T}{L_0(1 + 2\eta)}. \tag{15}$$

Da die Resonanzkurven bei den Messungen in Schwingungskreisen aus ferromagnetischen Drähten oft unregelmäßig und asymmetrisch werden, so ist es bequemer, wie das Wwedensky und Theodortschik gefunden und später Nikitin bestätigt haben [2]), bei Arbeiten mit ungedämpften Schwingungen nicht δ, sondern die maximale Stromstärke i bei der Resonanz zu messen:

$$i = \frac{E}{r'}. \tag{16}$$

Also können wir r' nach drei Drahtmethoden ermitteln:

1. Gemäß (13), falls η bestimmt ist, aus der Absorption der Wellen in parallelen Drähten (nach γ).

2. Gemäß (15) aus der Dämpfung der Schwingungen in einem Drahtrechteck (nach δ).

3. Gemäß (16) aus der Resonanzstromstärke (nach i).

Mittels (14) können wir aus r' die scheinbare Permeabilität μ_k berechnen.

Falls wir die Größe

$$s' = \sqrt{\frac{\mu_k}{\lambda}} \tag{17}$$

für verschiedene λ bestimmen, so bekommen wir ein s'-Spektrum. Bei großem k und sehr kleinem η, siehe (13) und (14), kann man annehmen, daß γ der Größe s' proportional ist, oder

$$\gamma = G\sqrt{\frac{\mu_k}{\lambda}},$$

[1]) ZS. f. Phys. **27**, 37, 1924, Gl. (53) und (54).

[2]) Die Untersuchungen werden in nächster Zeit veröffentlicht.

wobei G eine Konstante ist. Das heißt, daß wir statt der Berechnungen von μ_k und s' das γ-Spektrum direkt untersuchen können. Die Lage der Maxima in diesem Spektrum, ebenso wie in dem s'-Spektrum [1]), weist unmittelbar auf die Eigenwellenlängen der Elementarmagnete hin. Nach (15) können wir ebenso auch das δ-Spektrum studieren.

§ 2. Magnetische Spektra und ihre Eigentümlichkeiten.

In Fig. 1 sind die γ-Spektra für Eisen- und Nickeldrähte von verschiedenem Durchmesser dargestellt. Für einen Nickeldraht von 0,54 mm Durchmesser ist ein nach den Angaben von Gans und Loyarte berechnetes δ-Spektrum aufgetragen.

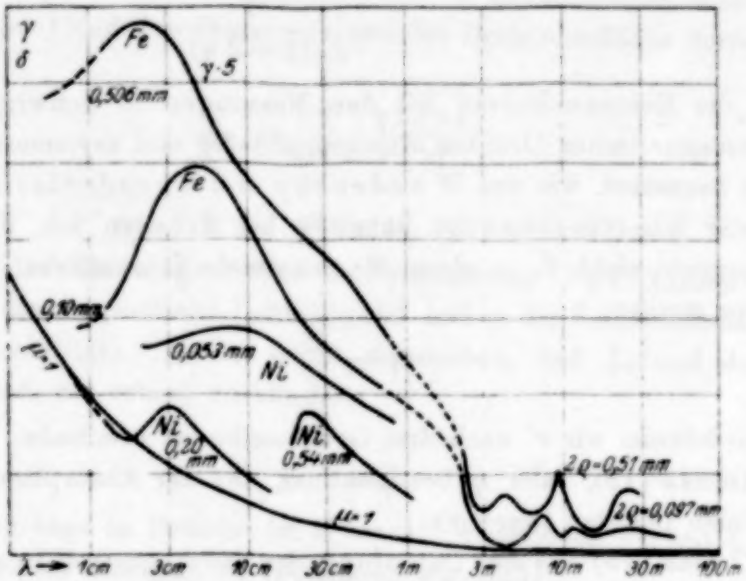


Fig. 1. Spektra von γ und δ.

Die γ-Werte für $1{,}14 < \lambda < 72{,}7$ cm sind aus meinen Beobachtungen im Jahre 1911 [2]), die γ-Werte für $2{,}2 < \lambda < 42$ m sind aus den Messungen von Kartschagin [3]) entnommen.

Außer den Maxima im Bereiche von zentimeterlangen Wellen, welche den Gegenstand der späteren Paragraphen bilden, sehen wir hier die Maxima, die auf die Eigenwellenlängen $\lambda_0 = 4{,}4$ m und 9,3 m bei einem Drahtdurchmesser von 0,51 mm und $\lambda_0 = 7{,}25$, 12,6 und 22 m bei einem Drahtdurchmesser von 0,097 mm hinweisen.

Meine Beobachtungen sowie diejenigen von anderen Forschern, die an ferromagnetischen Drähten von verschiedenem Durchmesser angestellt

[1]) W. Arkadiew, ZS. f. Phys. **27**, 37, 1924.

[2]) Journ. d. Russ. Phys. Ges. **44**, 165, 1912. Ann. d. Phys. **58**, 105, 1919. Die Stahldrähte zeigen viel kompliziertere Spektra.

[3]) W. Kartschagin, Ann. d. Phys. **67**, 325, 1922.

sind, zeigen, daß die Permeabilität stark von dem Drahtdurchmesser abhängt. Das kann man aus Fig. 2 ersehen, wo die Permeabilität μ_k für $\lambda = 23{,}8$ cm von Eisendrähten rigaischer Werke dargestellt ist. Einen ähnlichen Verlauf in demselben Wellenbereiche zeigt auch das geglühte schwedische Eisen, siehe Fig. 11 meiner Arbeit vom Jahre 1911.

Aus den Kurven der Fig. 11 ist folgende Tabelle 1 der Werte μ_k zusammengestellt.

Bei der Berechnung der Werte μ_k, die zur Konstruktion der Kurven von Fig. 11 dienten, wurden hauptsächlich die Beobachtungen mit Drähten von 0,2 mm Durchmesser ab benutzt. Bei dieser Berechnung konnte man bei kürzeren Wellen $\eta = 0$ annehmen. Nur in dünneren Eisendrähten

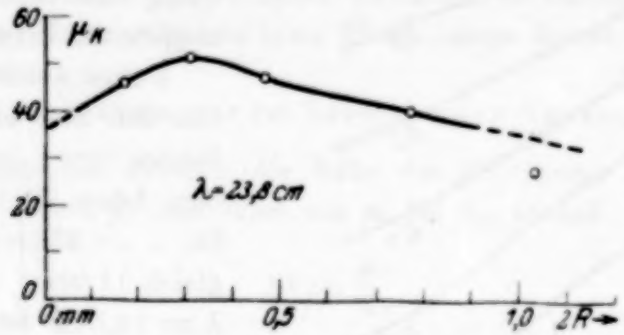


Fig. 2. Die Änderung der Permeabilität μ_k mit dem Drahtdurchmesser $2R$.

und für längere Wellen konnte η einen Einfluß haben. Das war z. B. bei $2R = 0{,}026$ mm der Fall, wie das aus folgender Tabelle 2 zu ersehen ist, wo die beobachteten Werte angeführt sind.

Tabelle 1. Die Werte μ_k.

λ	Durchmesser $2R$ mm							
cm	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1,30	1,5	2,3	3,0	4,5	6,0	6,8	7,0	6,4
2,80	4,0	7,0	10,0	14,5	18,5	19,3	16,5	14,0
4,82	22,0	25,0	28,0	34,0	33,0	29,0	25,0	21,0
10,63	40,0	43,0	46,0	50,0	48,5	44,0	38,5	32,5
23,8	46,0	49,0	52,0	57,0	61,5	61,5	59,0	56,0
72,7	70,0	72,5	75,0	80,0	81,0	88,5	92,0	93,0

Tabelle 2.

Material	$2R$ mm	λ cm	λ'	η	μ_η	μ_γ
Schwedischer Eisendraht, geglüht	0,20	10,63	10,48	0,014	25	51
Eisendraht von Hartmann & Braun, geglüht	0,026	10,63	9,9	0,075	32	48
Weicher Stahl	0,187	72,7	67,5	0,075	95	108

Auch für Nickeldraht von 0,053 mm Durchmesser mußte man diese Korrektion einführen. Wo die beobachteten η-Werte fehlen, habe ich in der Arbeit von 1911 η durch die Berechnung ermittelt. Damals wurde η unrichtigerweise aus μ_k, d. h. aus μ_γ, bestimmt. Jetzt sehen wir aus den Formeln (6) und (9), daß η aus der scheinbaren Permeabilität μ_n berechnet werden muß. Bei den längeren Wellen aber, wo diese Korrektion notwendig wird, unterscheiden sich μ_k und μ_n, d. h. μ_η und μ_γ, wenig voneinander, siehe vorhergehende Tabelle und Fig. 4.

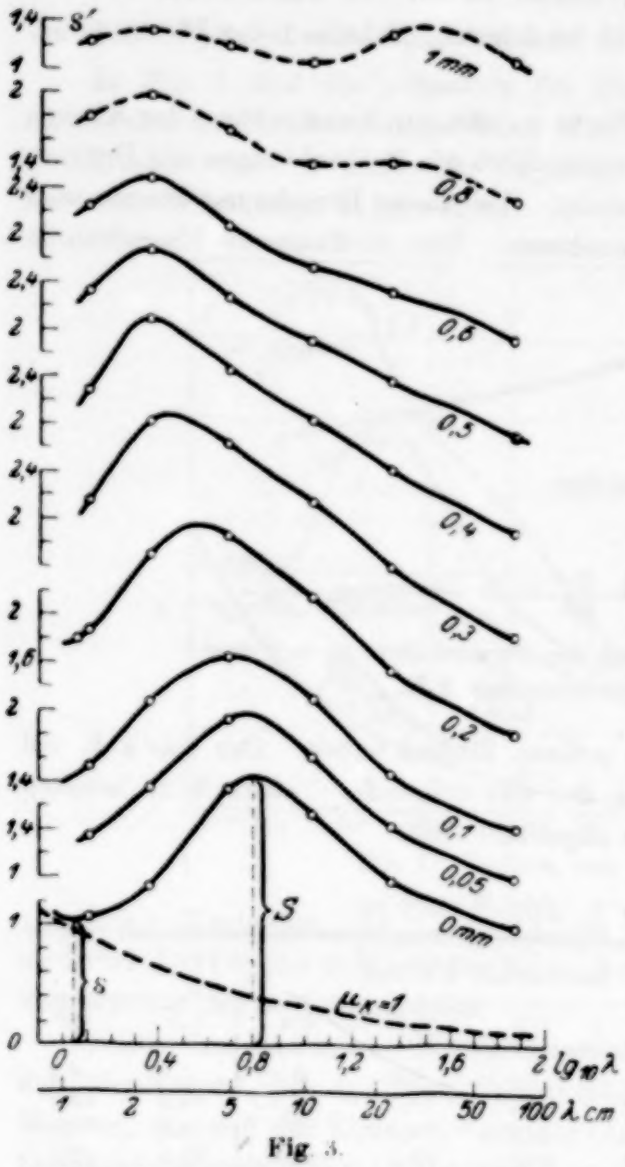


Fig. 3.

Spektra s' für Eisendrähte von verschiedenen Durchmessern.

Darum weichen nur wenige von den hier angenommenen Zahlen von denjenigen aus dem Jahre 1911 ab, nämlich für $\lambda = 23{,}8$ cm ist hier μ_k gleich 11 statt 11,3, und für $\lambda = 72{,}7$ cm ist μ_k gleich 18 statt 20 angenommen.

Es ist noch zu beachten, daß die Kurven in Fig. 11 durch eine ungenügende Anzahl von Punkten gezogen sind; als Schema dieser Konstruktion (richtiger: Interpolation) wurde der charakteristische Verlauf $\mu_k = f(2R)$ genommen, der in weiteren Grenzen von $2R$ an rigaischen Eisendrähten untersucht worden ist (Fig. 2) und an schwedischem Eisen immer bestätigt wurde (Fig. 11 der zitierten Arbeit).

Die Werte μ_k der Tabelle 1, die der Drahtdicke $2R = 0$ und 0,6 mm entsprechen, sind mittels der graphischen Extrapolation nach den Kurven der Fig. 11 gefunden worden. Die nach den Werten μ_k berechneten Werte s' sind in Fig. 3 eingetragen.

Wir sehen, daß das Maximum S der s'-Kurve, dessen Abszisse λ_S der Eigenwellenlänge λ_0 entspricht, bei der Vergrößerung der Drahtstärke eine

systematische Verschiebung zu kürzeren Wellen aufweist; λ_0 vermindert sich dabei allmählich von 6 cm bis auf 2,3 cm. Der entsprechende Wert der Permeabilität μ_S nimmt bis zu 14,5 ab, während μ_k für die längeren Wellen sich allmählich vergrößert. Das läßt sich an einem Buckel auf der s'-Kurve erkennen, der sich bei der Verdickung des Drahtes von $2R = 0{,}6$ mm ab bildet.

Mittels der Extrapolation, die aber kaum zulässig ist, kann man aus den Kurven von Fig. 11 die Werte μ_k auch für die größeren Durchmesser 0,8 und 1,0 mm erhalten. Die entsprechenden s'-Werte sind in Fig. 3 durch gestrichelte Kurven dargestellt. Sie weisen darauf hin, daß sich der auf der Kurve von 0,6 mm abzeichnende Buckel auf der Drahtkurve von 1 mm in ein stark ausgeprägtes Maximum verwandelt, das auf das Auftreten einer Eigenwelle von etwa 25 cm Länge deutet.

§ 3. Spektralparameter im Bereiche der kürzesten Wellen.

Wir bezeichnen durch S die Höhe des Maximums von s', das bei $\lambda = \lambda_S$ liegt, durch μ_S den Wert von μ_k bei λ_S, so daß

$$S^2 = \frac{\mu_S}{\lambda_S} \tag{18}$$

ist, durch λ_s die Abszisse das Minimums von s', durch Θ das Maß der Reibung [siehe weiter (25)] und durch μ_∞ die Permeabilität bei $\lambda = \infty$, die den Elementarmagneten einer betreffenden Gattung angehört. Wir haben nach der viskosoelastischen Theorie der magnetischen Spektren die folgenden Formeln, die für nur eine Gattung der resonierenden Magnetonen gelten (siehe meine erste Mitteilung):

$$\mu_\infty = \left(\frac{\lambda_S}{\lambda_s}\right)^2, \tag{19}$$

$$\Theta = 2\frac{\mu_\infty - 1}{\mu_S - \frac{1}{\mu_S}}. \tag{20}$$

Werden die Werte μ und ϱ' nach den Formeln

$$\mu = 1 + (\mu_\infty - 1)\frac{1 - \nu^2}{\Theta^2\nu^2 + (1 - \nu^2)^2}, \tag{21}$$

$$\varrho' = (\mu_\infty - 1)\frac{\Theta\nu}{\Theta^2\nu^2 + (1 - \nu^2)^2} \tag{22}$$

berechnet, wo $\nu = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ ist, so können wir nach (10) μ_k und μ_n finden. In der Fig. 4 sind mit weißen Kreisen die aus γ berechneten Werte μ_k und

mit schwarzen diejenigen von s' aufgetragen. Die Kurven stellen den theoretischen Verlauf von μ_k, μ_n und s' dar.

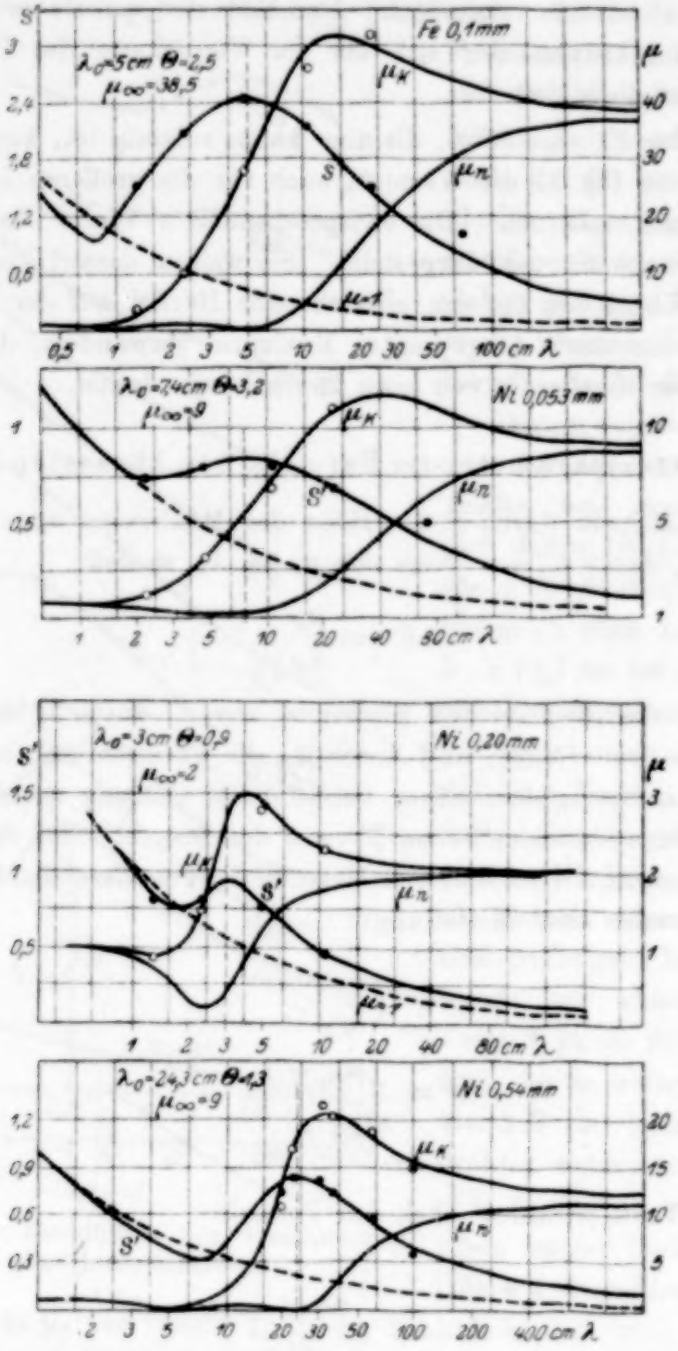


Fig. 4.

Spektra s' — die Banden der magnetischen Absorption.

Das Diagramm für $\lambda_0 = 24{,}3$ cm gehört den Beobachtungen von Gans und Loyarte an, die die Permeabilität μ_k nach der Dämpfung δ

eines Rechtecks bestimmt haben; siehe (15). Die Größe 2η haben sie dabei gleich 0 angenommen [1]); ihr wirklicher Wert erreichte bei $\lambda = 100{,}4$ cm 0,08.

Aus den Diagrammen der Fig. 4 geht hervor, daß μ_n in dem Gebiete sehr kleine Werte hat, wo μ_k noch sehr groß ist (bei meinen Messungen bei $\lambda = 3$ oder 5 cm). Die Absorption $A = 1 - R$ bei der Reflexion elektromagnetischer Wellen an dünnen Drähten ist durch den Widerstand r', d. h. durch μ_k, sowie durch die Selbstinduktion L_i, d. h. durch μ_n, fast in gleichem Maße bedingt [2]). Das erklärt die Tatsache, daß die Messungen der Reflexion elektrischer Wellen an ferromagnetischen Drähten [3]) das Verschwinden der magnetischen Eigenschaften bei größeren Wellenlängen zeigen als die Messungen des Absorptionskoeffizienten γ, der hauptsächlich von μ_k allein abhängt.

Die jetzt von mir angeführten Werte von μ_∞ und Θ unterscheiden sich stark von den von mir im Jahre 1913 berechneten [4]). Damals wurde die Berechnung unter der Voraussetzung ausgeführt, daß es nur eine Gattung von Elementarmagneten gibt; bei der Berechnung wurde die Forderung aufgestellt, daß das μ_∞ des Eisens und Nickels seinem statischen Werte $\mu_{s\infty}$ gleich sei. Jetzt, wo die Arbeiten von Kartschagin, Wwedensky, Theodortschik und Nikitin die Vielheit der Eigenperioden der Elementarmagnete festgestellt haben, können wir annehmen, daß der statische Wert

$$\mu_{s\infty} = 1 + \Sigma(\mu_x - 1)$$

ist. In diesem Falle sind wir nicht an die erwähnte Forderung $\mu_x = \mu_{sx}$ gebunden. Infolgedessen sind die jetzt von mir bestimmten Werte von Θ viel kleiner als die früheren; mit den neuen Werten von μ_x führen sie zu einer viel besseren Übereinstimmung der Theorie mit dem Versuch. In Fig. 4 fallen die experimentellen Werte von s' gut mit den theoretischen zusammen [5]). Dasselbe kann man auch von den Werten μ_k sagen, die sich nur in den längeren Wellen stark von den theoretischen Werten unterscheiden. Das war übrigens auch zu erwarten, falls man den benachbarten Teil des Eisenspektrums ins Auge faßt, der von Kartschagin gewonnen

---

[1]) Die Werte $\mu_n = \mu_k - 2\varrho'$ wurden zum Teil nach Gansschen Werten $\mu^2 = \mu_k$ und $\mu\gamma = \varrho'$ (Tabelle auf S. 244, l. c.) bestimmt. Die fehlenden Werte μ_k und μ_n, sowie die Lage der Minima und μ bei λ_0, die zur Konstruktion der Kurve nötig sind, wurden neu berechnet.

[2]) Über die experimentelle Bestätigung dieser Tatsache werde ich in den Annalen der Physik berichten (Arbeit im Druck).

[3]) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. **45**, 133, 1914.

[4]) Phys. ZS. **14**, 328, 1913.

[5]) Derartige Kurven, mittels des in Tabelle 7 angeführten Parameters berechnet, ergeben für dünnere Eisendrähte ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

wurde (siehe Fig. 4 meiner ersten Mitteilung oder Fig. 1 der vorliegenden). Er zeigte, daß zwischen der Wellenlänge von 72,7 und 220 cm ein großes Maximum von μ_k existiert, das ungefähr bei $\lambda = 100$ cm liegt. Der allmähliche Aufstieg zu diesem Maximum hebt die äußeren Werte von μ_k in der Fig. 4 so stark, daß die Werte μ_k für $\lambda = 72{,}7$ cm im Rahmen der Zeichnung keinen Platz finden. Die in Fig. 4 verzeichneten Resultate sind in folgenden Tabellen 3 bis 6 zusammengestellt.

Tabelle 3. Schwedisches Eisen.

$2R = 0{,}1$ mm. $\mu_\infty = 38{,}5$. $\Theta = 2{,}5$. $\lambda_0 = 5$ cm.

λ	Berechnet					Beobachtet	
cm	μ	ϱ'	μ_n	μ_k	s'	μ_k	s'
0,25	0,925	—	0,92	0,93	1,95	—	—
0,354	0,82	0,03	0,79	0,85	1,55	—	—
0,5	0,65	0,090	0,57	0,75	1,22	—	—
0,885	0	0,456	Minimum	0,915	1,02	—	—
1,0	− 0,197	0,64	0,032	1,31	1,14	—	—
1,25	− 0,70	1,16	0,19	2,51	1,41	—	—
1,81	—	—	—	—	—	3	1,51
1,43	− 1,05	1,62	0,31	3,55	1,57	—	—
1,67	− 1,42	2,33	0,50	5,06	1,74	—	—
2,00	− 1,88	3,52	0,48	7,52	1,94	—	—
2,81	—	—	—	—	—	10	2,08
2,50	− 2,13	5,4	0,40	11,2	2,12	—	—
4,56	0	13,6	Minimum	27,2	2,44	—	—
4,82	—	—	—	—	—	28	2,41
5,0	1,00	15	0,033	30,0	2,45	—	—
10,0	13,9	22,1	4,1	48,3	2,20	—	—
10,63	—	—	—	—	—	46	2,08
23,8	—	—	—	—	—	52	1,48
25,0	30,0	15,6	18,3	49,5	1,41	—	—
50,0	35,0	8,83	27,3	46,0	0,96	—	—
72,7	—	—	—	—	—	75	1,015
100,0	36,4	4,55	33,0	42,0	0,65	—	—
200,0	37,5	2,34	35,2	40,0	0,45	—	—

Anmerkung: In den Minimis ist $\mu_n = \frac{\varepsilon^2 \varrho'}{2\sigma'^2}$, wobei ε den dielektrischen Koeffizienten des Eisens bedeutet.

Auf Grund einer derartigen Ermittlung der Parameter λ_0, μ_∞ und Θ wurde nach den Kurven von Fig. 3 folgende Tabelle 7 zusammengestellt. Die Größe ϱ_{max} wurde dabei nach der Formel (45) meiner ersten Mitteilung berechnet:

$$\varrho_{max} = \frac{c}{4}\left(S^2 - \frac{1}{S^2 \lambda_0^2}\right). \qquad (22')$$

Für die Kuren von größerem $2R$, wo der Buckel schon merklich wird, wurde Θ aus der Neigung des linken Zweiges der s'-Kurve bestimmt.

Tabelle 4. Nickel „chemisch rein".

$2R = 0{,}20$ mm. $\mu_\infty = 2$. $\Theta = 0{,}895$. $\lambda_0 = 3$ cm.

λ	Berechnet			Beobachtet	
cm	μ_n	μ_k	s'	μ_k	s'
0,3	0,99	0,99	1,82	—	—
1,0	0,85	0,93	0,965	—	—
1,3	—	—	—	0,85	0,81
1,42	0,663	0,903	0,797	—	—
1,5	0,62	0,913	0,780	—	—
2,0	0,345	1,144	0,757	—	—
2,12	0,298	1,272	0,775 [1]	—	—
2,31	—	—	—	1,49	0,81
2,5	0,24	1,85	0,86	—	—
3,0	0,375	2,62	0,94	—	—
3,75	0,80	3,05	0,90	—	—
4,82	—	—	—	2,8	0,765
6,0	1,48	2,66	0,67	—	—
10,0	1,73	2,33	0,48	—	—
10,63	—	—	—	2,4	0,476
30,0	1,91	2,09	0,264	—	—

Tabelle 5. Nickeldraht von Hartmann & Braun.

$2R = 0{,}053$ mm. $\mu_\infty = 9$. $\Theta = 3{,}2$. $\lambda_0 = 7{,}4$ cm.

λ	Berechnet			Beobachtet	
cm	μ_n	μ_k	s'	μ_k	s'
1,48	0,63	0,94	0,80	—	—
1,85	0,48	1,0	0,74	—	—
2,31	—	—	—	1,22	0,73
2,47	0,28	1,265	0,72	—	—
3,70	0,12	2,20	0,77	—	—
4,82	—	—	—	3,0	0,79
7,40	0,19	5,2	0,83	—	—
10,63	—	—	—	6,7	0,80
14,8	0,93	9,15	0,79	—	—
28,8	—	—	—	11,0	0,68
37,0	3,95	11,6	0,56	—	—
72,7	—	—	—	18,0	0,50
74,0	6,4	11,1	0,39	—	—

[1]) Hier ist Θ nicht klein genug gegen μ_∞ und deshalb finden wir eine Abweichung von der Regel (19):

$$\lambda_s = 2 < \frac{\lambda_S}{\sqrt{\mu_\infty}} = 2{,}12.$$

Tabelle 6. Nickel nach Gans und Loyarte.

$2R = 0{,}54$ mm. $\mu_\infty = 12$. $\Theta = 1{,}3$. $\lambda_0 = 24{,}3$ cm.

λ	Berechnet			Beobachtet	
cm	μ_n	μ_k	s'	μ_k	s'
2,43	0,94	0,96	0,68	—	—
4,05	0,70	0,710	0,418	—	—
6,08	0,187	0,641	0,324	—	—
7,00	0,0277	0,725	0,322 [1])	—	—
7,65	Minimum	0,808	0,325	—	—
8,1	0,011	1,095	0,37	—	—
12,2	0,304	3,93	0,57	—	—
19,4	0,10	12,19	0,80	—	—
21,2	—	—	—	11,28	0,730
22,3	Minimum	14,94	0,82	—	—
22,8	—	—	—	17,17	0,870
24,3	0,0588	16,98	0,84	—	—
31,5	—	—	—	21,85	0,835
31,6	1,16	20,01	0,80	—	—
36,0	—	—	—	20,01	0,750
36,5	2,27	20,26	0,75	—	—
48,6	4,60	19,12	0,63	—	—
60,5	—	—	—	18,73	0,560
72,9	7,15	16,90	0,48	—	—
97,2	8,39	15,66	0,40	—	—
100,4	—	—	—	14,67	0,376
145,8	9,61	14,41	0,316	—	—
243,0	10,56	13,43	0,235	—	—

Anmerkung: In den Minimis ist $\mu_n = \frac{\varepsilon^2 \varrho'}{2\sigma'^2}$, wobei ε den dielektrischen Koeffizienten des Nickels bedeutet.

Tabelle 7.

	Nickel			Eisen						
	Arkadiew		Gans	Arkadiew						
$2R$ mm . .	0,053	0,20	0,54	0,00	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
S	0,82	0,95	0,84	2,28	2,40	2,45	2,75	2,90	2,89	2,65
λ_0	7,4	3,0	24,3	6,0	5,9	5,0	3,55	3,0	2,5	2,3
μ_S	5,2	2,62	16,92	31	34	30	27	25	21	17
μ_∞	9,0	2,0	12,0	27,4	35,0	38,5	27,5	22,2	18,7	14,5
Θ	3,2	0,90	1,3	1,7	2,0	2,5	2,0	1,7	1,7	1,6
$\varrho_m \cdot 10^{-10}$	0,50	0,55	0,5224	4,05	4,3	4,5	5,7	6,3	6,3	5,5

Die entsprechenden Kurven sind in Fig. 5 dargestellt.

[1]) Hier gilt die Regel (19) für die Lage des Minimums von s':

$$\lambda_s = \frac{24{,}3}{\sqrt{12}} = 7{,}00 \text{ cm}.$$

Wir sehen aus Fig. 5, daß λ_0 und μ_∞ sehr veränderliche Größen sind. Der maximale Wert der magnetischen Leitfähigkeit ϱ_{max} und die Größe S stellen eine am meisten stabile Charakteristik dar: für verschiedene Nickeldrähte schwankt ϱ_{max} zwischen $0{,}50 \cdot 10^{10}$ und $0{,}55 \cdot 10^{10}$; bei Eisendrähten ist ϱ_{max} auch viel konstanter als λ_0 oder μ_∞; z. B. ändert sich λ_0 und μ_∞ fast um das Dreifache, S aber um 27 Proz., ϱ_{max} um etwa 60 Proz. Wir sehen noch, daß Θ ein Maximum bei $2R = 0{,}1$ mm bildet; d. h., daß das Absorptionsband bei diesem Durchmesser besonders breit wird. Es ist möglich, daß diese Erscheinung eine scheinbare ist, bedingt durch die in § 2, Fig. 3, angegebene Verdoppelung des Absorptionsbandes, die bei der Verstärkung des Drahtes hervortritt. Diese scheinbare Vergrößerung von Θ bei den etwa konstanten S und μ_S hat gemäß (20) eine Bildung des Maximums von μ_∞ bei demselben Drahtdurchmesser $2R = 0{,}1$ mm zur Folge.

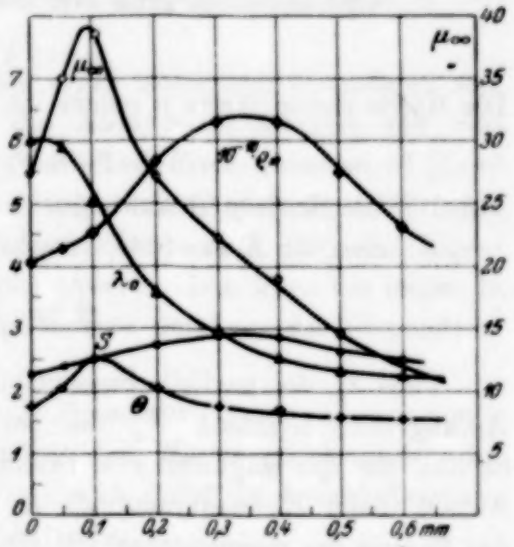


Fig. 5. Änderung der Spektralparameter mit dem Drahtdurchmesser $2R$.

§ 4. Über die Charakteristika der Elementarmagnete.

Die viskosoelastische Theorie der magnetischen Spektren[1]) nimmt folgende Gleichung für die Bewegung der Elementarmagnete an:

$$K\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} + p\frac{\partial\beta}{\partial t} + Dm\beta = mH\sin\varphi. \qquad (23)$$

Hier sind: K das Trägheitsmoment, bezogen auf die zum magnetischen Moment m senkrechte Achse, p der Reibungskoeffizient, D die innere Direktionskraft der geordneten Schwingungen, β der Drehungswinkel und φ der Winkel zwischen D und der äußeren Kraft H. Bezeichnen wir ferner durch T_0' die freie Eigenperiode der Elementarmagnete, so ergibt (23) für $H = 0$:

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{K^2}{KmD - \frac{p^2}{4}}}.$$

[1]) W. Arkadiew, Phys. ZS. **14**, 928, 1913.

Für $p = 0$ ist T'_0 gleich

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{mD}}. \tag{24}$$

T'_0 wird unendlich groß und die Bewegung aperiodisch für

$$p = 2\sqrt{KmD}.$$

Die Hälfte dieser Werte p nehme ich als Maß der Reibung, also

$$p = \Theta\sqrt{KmD}, \tag{25}$$

wobei Θ die Größe p charakterisiert.

Nehmen wir K aus (24), so erhalten wir:

$$\Theta = \frac{2\pi p}{T_0 m D}. \tag{26}$$

Falls $\varkappa_\infty$ die partielle Suszeptibilität in schwachen Feldern (partielle Anfangssuszeptibilität), J_∞ die partielle Sättigungsmagnetisierung des Stoffes, die den Magneten von bestimmter Gattung entspricht und N die Anzahl dieser Elementarmagnete in 1 ccm bedeuten, so finden wir nach der Theorie der magnetischen Polarisation[1]), daß

$$J_\infty = \frac{2}{3} m N \tag{27}$$

und

$$D = \frac{2}{3}\frac{J_\infty}{\varkappa_\infty} \tag{28}$$

ist. Setzen wir J_∞ in (28) und D aus (28) in (24), so bekommen wir

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{6 K \varkappa_\infty}{N m^2}}. \tag{29}$$

Da $\mu_\infty = 1 + 4\pi\varkappa_\infty$ ist, so können wir aus (28) und (27) finden, daß

$$\mu_\infty = 1 + \frac{8\pi}{3}\frac{mN}{D} \tag{30}$$

ist. Nach (22) erhalten wir

$$\varrho_{max} = \frac{\mu_\infty - 1}{2\Theta T}; \tag{31}$$

das gibt mit (26) und (30)

$$\varrho_{max} = \frac{2}{3}\frac{m^2 N}{p}. \tag{32}$$

Aus diesen Gleichungen können wir eine Reihe von Schlüssen ziehen.

1. Die Veränderlichkeit von μ_∞ in konstanten Feldern, d. h. die Inkonstanz von $\mu_{S_\infty} = 1 + \Sigma(\mu_\infty - 1)$ von verschiedenen Eisenproben ist eine gut bekannte Tatsache. Nach (30) kann sie durch die Inkonstanz

[1]) Z. B. W. Arkadiew, l. c.

der Zahl N der Elementarmagnete von verschiedener Gattung oder durch die Inkonstanz ihrer Direktionskraft D bedingt sein. Da $\lambda_0 = c\,T_0$ ebenso stark veränderlich ist, so sehen wir aus (24), daß D unbedingt veränderlich sein muß. Die stetige Veränderlichkeit von K und m in (24) oder in (30) ist kaum zuzulassen.

2. Die magnetischen Eigenschaften sogar bestimmter Eisensorten sind sehr verschieden. Z. B. schwankt die Anfangspermeabilität von verschiedenen Proben von geglühtem schwedischen Eisen zwischen 81 [Lord Rayleigh[1])] und 470 [Gumlich und Rogowski[2])], d. h. $\varkappa_\infty$ erfährt eine Änderung um etwa das 6fache. Darum könnte nach (29) die Eigenwellenlänge sich fast um das 2,5fache ändern. Das kann die immer in magnetischen Spektren vorhandene Inkonstanz der Lage der Dispersions- und Absorptionsbanden erklären[3]).

3. Nach (32) ist ϱ_m gar nicht von D, sondern unter anderem von p abhängig. Eine etwas größere Stabilität des Wertes ϱ_m, besonders bei Nickel, und folglich von S[siehe (22′)] könnte durch die bessere Konstanz der Größe p im Vergleich mit D bedingt sein.

4. Aus dem Ausdruck (29) können wir die Größe bestimmen:

$$\frac{N m^2}{K} = \frac{3}{2}\,\pi\,\frac{\mu_\infty - 1}{\lambda_0^2}\,c^2 = q\,c^2, \tag{33}$$

die der in der elektrischen, unter anderen optischen, Dispersionstheorie bekannten Größe

$$\frac{\mathfrak{N}\,e^2}{M}$$

analog ist. Die Werte q sind in der Tabelle 8 gegeben.

Tabelle 8.

	Nickel			Eisen						
	Arkadiew		Gans	Arkadiew						
$2R$ mm	0,053	0,20	0,54	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
q	0,71	0,52	0,88	3,3	4,6	7,0	9,9	11,1	13,3	12,0
$10^8 \cdot a$ cm	1,12	1,28	3,11	1,72	1,49	1,20	1,01	0,96	0,87	0,92

[1]) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **23**, 225, 1887.

[2]) E. Gumlich und W. Rogowski, Ann. d. Phys. **34**, 285, 1911.

[3]) Es ist noch zu beachten, daß die magnetischen Spektra, die wir besitzen, den dünnen oberflächlichen Metallschichten angehören, deren zirkulare und axiale magnetische Eigenschaften sogar in konstanten Feldern uns noch nicht gut bekannt sind.

Dividieren wir $q c^2$ durch $m N = J_\infty$, d. h. durch die Summe der magnetischen Momente aller Elementarmagnete von gegebener Gattung, so erhalten wir

$$\frac{m}{K} = \frac{3\pi}{2 J_\infty} \frac{\mu_\infty - 1}{\lambda_0^2} c^2 . \tag{34}$$

Selbstverständlich stellt $J_\infty = m N$ einen Anteil der totalen Sättigungsmagnetisierung J_{s_∞} dar, der den Elementarmagneten der betrachteten Gattung einer bestimmten Eigenperiode T_0 zugehört. Früher, als der komplizierte Charakter der magnetischen Spektren uns noch unbekannt war, konnte man nur von einer einzigen Gattung der Elementarmagnete sprechen und konnte man Nm als totale Sättigungsmagnetisierung annehmen. In diesem Falle lassen sich die Dimensionen der Elementarmagnete leicht berechnen. In der Tat, nehmen wir an, daß die Elementarmagnete Kugeln von homogener Dichte vom Halbmesser a und mit der Masse M darstellen, so wird $K = 0{,}4\, M a^2$. Führen wir das in (34) ein und bemerken wir, daß m/M durch das Verhältnis von J_∞ zur Dichte des Stoffes δ ersetzt werden kann, so haben wir

$$a = J_\infty . T_0 \sqrt{\frac{5}{3\pi\delta\,(\mu_\infty - 1)}} . \tag{35}$$

Nehmen wir für Nickel $J_\infty = 520$ und $\delta = 8{,}8$, und für Eisen $J_\infty = 1700$ und $\delta = 7{,}9$ an, so bekommen wir die in Tabelle 8 aufgeführten Zahlen a, die den Radius der Elementarmagnete in Zentimeter angeben. Diese Größe ist auch viel stabiler als λ_0, Θ und μ_∞.

Eine derartige Berechnung von a ist nur für die Banden möglich, die in den kürzesten Hertzschen Wellen liegen. In meterlangen Wellen ergibt das Zahlen, die von ganz anderer Größenordnung sind und die mit den Molekulardimensionen in keinerlei Übereinstimmung stehen.

5. Bei Betrachtung der Reibungskraft p kann man sich folgenden Mechanismus vorstellen.

Ich identifiziere den Elementarmagneten mit dem Atom[1]) und nehme nach Weiss an, daß die einzelnen Eisenkristalle bis zur Sättigung magnetisiert sind. Bei Magnetisierung des pseudoisotropen Körpers, das heißt bei der Drehung der Magnetisierung J_∞ in einzelnen Kristallen, drehen sich die Oberflächen der einzelnen Elementarmagnete in entgegengesetzten Richtungen (Fig. 6).

Außer dieser Bewegung, deren Periode durch die Direktionskraft D bestimmt ist, kann noch, wie ich gezeigt habe[1]), eine ungeordnete Be-

[1]) W. Arkadiew, Phys. ZS **14**, 928, 1913.

wegung der Elementarmagnete stattfinden, die durch das Weisssche innere Molekularfeld D' verursacht sein muß. Ihre Eigenwellenlänge

$$\lambda'_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{D}{D'}},$$

kann leicht berechnet werden.

Was jedoch die Dämpfung dieser Oszillationen anbelangt, so sehen wir aus Fig. 6, daß bei der ungeordneten Drehung der Elementarmagnete nicht alle der benachbarten Magnetonen die entgegengesetzte Bewegung haben müssen, und deshalb der Widerstand p kleiner sein kann. Darum kann man bei ungeordneter Bewegung Θ nicht nach (27) berechnen[1]). Die Bedingungen müssen hier ganz andere sein.

Fig. 6. Geordnete Drehung der Elementarmagnete bei der Drehung der Magnetisierung J_∞ in dem Kristall.

Wir nehmen an, daß die benachbarten Atome eine kugelförmige Höhlung mit dem Radius A bilden. Aus der Figur ist ersichtlich, daß die umhüllende Oberfläche sich bei der Magnetisierung des Körpers in einer der Drehung der Atome entgegengesetzten Richtung dreht. Falls der Raum zwischen dem Atom und der Hülle mit einem fiktiven Stoff[2]), der den Koeffizienten der inneren Reibung η hat, angefüllt ist, so ist die Kugel einem Reibungsmoment

$$p \frac{\partial \beta}{\partial t} = 8 \pi \eta a^3 \frac{A^2 (A + a)}{A^3 - a^3} \frac{\partial \beta}{\partial t} \tag{36}$$

unterworfen[3]).

Wir setzen voraus, daß das Volumen der Höhlung dem Raum, welcher in einem Körper jedem Atom zukommt, gleich ist, also

$$\frac{4 \pi}{3} A^3 . N = 1 \text{ cm}^3. \tag{37}$$

Nehmen wir p aus (26) und D aus (28), so erhalten wir, da $\mu_\infty = 1 + 4 \pi \varkappa_\infty$ ist,

$$\eta = \frac{\Theta T_0 . J_\infty m}{(\mu_\infty - 1) . 6 \pi} \frac{A^3 - a^3}{a^3 A^2 (A + a)}.$$

Mit (31) gibt das

$$\eta = \frac{J_\infty}{12 \pi \varrho_{max}} \frac{m (A^3 - a^3) A}{a^3 A^3 (A + a)}.$$

---

[1]) R. Gans und R. G. Loyarte, Ann. d. Phys. **64**, 209, 1921; W. Arkadiew, ebenda **65**, 643, 1921; R. Gans, ebenda **66**, 429, 1921.

[2]) Über kinetische Interpretation siehe Phys. ZS. **14**, 928, 1913.

[3]) G. Kirchhoff, Mechanik, S. 375, 1897.

Nehmen wir A^3 aus (37), so wird

$$\eta = \frac{J_\infty^2}{9\,\varrho_{max}} \frac{A(A^3 - a^3)}{a^3(A + a)}.$$

Wir wollen A/a mit x bezeichnen; dann ist[1])

$$\eta = \frac{J_\infty^2}{9\,\varrho_{max}} \frac{(x^3 - 1)\,x}{x + 1} = \frac{J_\infty^2}{9\,\varrho_{max}} \cdot Q. \tag{38}$$

Nehmen wir N der Zahl der Atome in 1 cm³ gleich, so erhalten wir für Eisen $A = 1{,}39 \cdot 10^{-8}$ cm und für Nickel $A = 1{,}36 \cdot 10^{-8}$ cm. Aus Tabelle 8 folgt, daß x nicht größer als 1,6 sein kann. Das ergibt 1,90 als den höchsten Grenzwert von Q. Falls wir den Mittelwert von a gleich $1 \cdot 10^{-8}$ cm und von A gleich $1{,}38 \cdot 10^{-8}$ cm annehmen, so erhalten wir für x den Wert 1,38 und für Q 0,93. Dann finden wir

für Nickel $\eta = 6{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{g}^{+1}\,\mathrm{sec}^{-1}$

und

für Eisen $\eta = 6{,}4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{g}^{+1}\,\mathrm{sec}^{-1}$.

Da ich jetzt Θ kleiner als im Jahre 1913 (5 oder 7) annehme, so wird entsprechend η ebenso kleiner als der damals gefundene Wert (12 und $15 \cdot 10^{-6}$).

Moskau, Magn. Lab., I Univ. u. Elektrot. Prüfungsinst., Aug. 1924.

---

[1]) Falls μ_∞ groß genug ist, so können wir folgende einfache Ausdrücke finden:

Aus (33) und (19)

$$\frac{N m^2}{K} = \frac{3\pi}{2\,T_s^2}, \tag{33'}$$

wobei $T_s = \lambda_s/c$ die Periode des Minimums von s' bedeutet.

Aus (35) nach (19)

$$a = \frac{J_\infty\,T_s}{\sqrt{0{,}6\,\pi\,\delta}}. \tag{35'}$$

Aus (22')

$$\varrho_{max} = c\left(\frac{S}{2}\right)^2.$$

Nach (38)

$$\eta = \left(\frac{\frac{2}{3}\,J_\infty}{S}\right)^2 \cdot \frac{Q}{c}. \tag{38'}$$

Das heißt, daß zur Berechnung von q, a, ϱ_m und η die Lage des Minimums λ_s und die Höhe des Maximums S maßgebend sind.

Plastizität und Festigkeit von Steinsalz unter Wasser.

Von **W. Ewald** und **M. Polanyi** in Berlin-Dahlem.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Juni 1924.)

Wie ist der Zusammenhang zwischen der von Joffe gefundenen hohen Festigkeit von Steinsalz unter Wasser und seiner bekannten Biegsamkeit unter gleichen Bedingungen? Joffe nimmt an, daß die Festigkeitserhöhung die Biegung ermöglicht. Hier wird der umgekehrte Standpunkt vertreten: Das Wasser beseitigt in der Oberfläche sitzende Hindernisse und setzt die Elastizitätsgrenze herab. Dadurch verhält sich das Salz schon bei kleinen Spannungen plastisch und ist, wenn die normale Bruchspannung erreicht wird, durch die vorangegangene Reckung schon verfestigt. Spannung und Verfestigung können nun weiter gesteigert werden, und es ergibt sich das Bild des Joffe-Effektes.

1. Plastizierung von Steinsalz unter Wasser. Gewöhnlich verhält sich Steinsalz als spröder Körper. Ein Stäbchen, das man einem Biegungsversuch unterwirft, bricht ohne nennenswerte plastische Formänderung durch. Nur mit feineren Methoden läßt sich hierbei eine geringfügige plastische Durchbiegung nachweisen, was schon von W. Voigt[1]) bemerkt wurde und auch in dieser Arbeit noch zahlenmäßig belegt werden soll.

Eine auffallende Abweichung von diesem Verhalten sieht man bei Biegungsversuchen unter Wasser. Steinsalzprismen lassen sich, in warmes Wasser getaucht, deutlich krumm biegen. Es scheint völlige Plastizität einzutreten. In konzentrierter Salzlösung tritt der Effekt nicht auf.

Diese in den Salzbergwerken schon längst bekannte Tatsache[2]) ist in den letzten Jahren von verschiedener Seite erörtert worden. Insbesondere hat E. Hentze[3]) auf Veranlassung von L. Milch diese Erscheinung messend verfolgt. Außerdem hat neuerdings A. Joffe[4]) die Plastizierung unter Wasser im Dehnungsversuch röntgenographisch untersucht und mit der von ihm unter gleichen Umständen gefundenen hohen Reißfestigkeit von Steinsalz in Zusammenhang gebracht.

---

[1]) W. Voigt, Ann. **48**, 636, 1893; Pogg. Ann., Ergzbd. **7**, 1 u. 177, 1875/77.

[2]) Nach L. Milch geht ihre Entdeckung auf Herrn Markscheider Engelhardt in Solvayhall zurück, der im Jahre 1867 Steinsalzprismen, als er sie in warmem Wasser reinigen wollte, deutlich biegen konnte und seitdem diese Erfahrung zur Herstellung von kleinen Kunstwerken benutzte.

[3]) E. Hentze, ZS. „Kali", Heft 4, 6, 8, 9, 1921; vgl. auch Kleinhanns, Phys. ZS. **15**, 363, 1914.

[4]) A. Joffe, M. W. Kirpitschewa u. M. A. Lewitzky, ZS. f. Phys. **22**, 286, 1924.

Da die Ergebnisse der beiden Autoren unserer Ansicht nach in Widerspruch stehen, mögen sie hier miteinander verglichen werden.

E. Hentze arbeitet so, daß er Spaltstücke von etwa 3 mm Höhe und 4 mm Breite auf zwei Schneiden von 34 mm Abstand auflegt. In der Mitte wird das Prisma belastet, und zwar mit etwa der Hälfte der (auf Grund einer zulässigen Höchstspannung von 1190 g/mm² berechneten) normalen Bruchlast. Mit der mittleren Schneide, an der die Last hängt, ist ein Schreibhebel verbunden, der deren Senkung bei der Durchbiegung zu verzeichnen hat. Wird nun das Steinsalzprisma mit Wasser überflutet und dadurch dessen Auflösung eingeleitet, so senkt sich die Mittelschneide im Laufe von 50 bis 60 Sekunden um Beträge von 1 bis 3 mm, und man sieht, daß diese Senkung der Schneide durch eine entsprechende Durchbiegung des Prismas ermöglicht worden ist.

Nach dem Versuch werden die gebogenen Prismen möglichst schnell aus dem Wasser herausgenommen und die veränderten Abmessungen festgestellt.

Indem man nun die wirkende Last auf das durch die Ablösung verjüngte Prisma bezieht, rechnet man aus, wie hoch die Spannung im äußersten Falle sein konnte zur Zeit, als die plastische Durchbiegung vor sich ging.

Es ergibt sich dabei, daß die Beanspruchung des Steinsalzprismas während der Plastizierung in der Mehrzahl der 113 untersuchten Fälle geringer war als der normalen zulässigen Bruchlast entsprechend. In 71 Proz. der Fälle ist die Höchstspannung im Prisma zwischen 64 und 100 Proz. der normalen Bruchspannung gelegen, und in den restlichen 29 Proz. der Fälle liegt diese Spannung zwischen 100 und 160 Proz. der normalen Bruchspannung. In konzentrierten Salzlösungen trat keinerlei Effekt ein.

Diese Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Plastizierung des Steinsalzes unter Wasserwirkung als Herabsetzung der Elastizitätsgrenze aufzufassen ist[1]). Dies steht im Gegensatz zu den später zu er-

[1]) Anmerkung bei der Korrektur. Wir haben hier noch einiges aus der neuesten mineralogischen Literatur anzuführen, die uns leider erst nach Einreichung des Manuskripts bekannt wurde. L. Milch (Neues Jahrb. f. Miner. 48, Beilagenbd. 147, 1923) äußert sich in einem zusammenfassenden Bericht über die erwähnten Arbeiten seiner Schüler wie folgt: Der hemmende Einfluß, den die Oberflächenschicht der größeren Neigung zur Deformation des Hauptteils des Stäbchens entgegenstellt, wird in einem lösenden Medium schon bei niederer Temperatur durch Auflösung der jeweiligen Oberflächenschicht geschwächt und überwunden.

Diese Schlußfolgerung ist dieselbe, die wir selbst aus dem Umstande ziehen, daß sich die Prismen bei Hentze meistens unterhalb der normalen Bruchspannung

örternden Versuchen von Joffe, der nachzuweisen sucht, daß die Elastizitätsgrenze unverändert bleibt und die Plastizierung nur dadurch möglich wird, daß die Zerreißspannung durch die Wasserwirkung bedeutend heraufgesetzt wird, wodurch ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze gestattet wird.

Wir glauben, daß den Versuchen von Hentze den weniger unmittelbaren röntgenographischen Feststellungen von Joffe gegenüber volle Beweiskraft zukommen würde, wenn nicht der störende Umstand vorhanden wäre, daß Hentze seine Versuche bei erhöhter Temperatur (55 bis 100°) ausgeführt hat, und es nicht bewiesen ist, daß man bei diesen Temperaturen Steinsalzprismen nicht auch ohne Wasser biegen kann, wenn man sie so vorsichtig belastet, wie es Hentze tut[1]). Wir haben

---

biegen ließen. Merkwürdigerweise schreibt aber Milch umgekehrt: „Einen sinnfälligen Beweis für die Steigerung der Plastizität in lösungsfähigen Medien erblickt Hentze mit Recht in der Tatsache, daß infolge der Auflösung bei seinen Versuchen die Belastung oft über 100 Proz. der Bruchbelastung stieg, nicht selten 130 Proz. und sogar 160 Proz. erreichte, ohne daß die Stäbchen brachen."

In seinem Bericht über die Arbeit von Milch schreibt A. Johnsen (Naturw. 8, 153, 1924: „Die Hentzesche Erklärung" (die wir im Text angeben) „ist, wie auch Milch andeutet, haltlos. Richtig dürfte aber die Deutung sein, die ich auf der Tagung der D. Mineralog. Ges. im September 1922 zu Leipzig gelegentlich einer Diskussion gab und jetzt hier wiederholen möchte. Der belastete Steinsalzstab erfährt an seiner konvexesten und an seiner (gegenüberliegenden) konkavsten Stelle die stärkste Spannung (Zerrung bzw. Pressung), die nach der Mitte zwischen beiden Stellen bis auf 0 abnimmt. Die immer weiter wachsende Spannung würde baldigen Bruch zur Folge haben, wenn nicht nach dem Rieckeschen Prinzip oder auch infolge winziger Sprünge gerade die gespanntesten Außenteile die schnellste Auflösung erführen; die dadurch frei gelegten tieferen Partien gestatten nunmehr, weil weniger gespannt, eine weitere Biegung des Stabes, wobei ihre Spannung wächst und ihre Auflösung sich beschleunigt usf.; an gleicher Stelle erleichtert auch die Verkleinerung des Querschnittes die fortschreitende Biegung."

Demgegenüber ist zu sagen, daß der sich biegende Kristall in jedem Augenblick eine bestimmte Dicke hat und eine bestimmte Last trägt, woraus für jeden Augenblick ein bestimmter Spannungszustand folgt. Wenn nachgewiesen wird, daß ein Spannungszustand, der im trockenen Kristall keine bleibende Formänderung hervorruft, eine solche erzeugt wenn der Kristall unter Wasser ist, so ist damit eine Herabsetzung der Elastizitätsgrenze durch das Wasser erwiesen.

Erwähnt sei noch, daß ein besonderer Widerstand der Oberflächenschicht von Steinsalz gegen plastische Formänderung (und zwar gegen Vergrößerung der Oberfläche) von A. Ritzel (ZS. f. Kristallogr. 53, 97, 1913) angenommen wurde. Es ist uns jedoch nicht klar geworden, inwiefern die von ihm bei der Deformation von Steinsalzkristallen gefundenen Merkwürdigkeiten mit unserem Gegenstand zusammenhängen.

[1]) Die von Hentze in konzentrierter Salzlösung angestellten Versuche können nicht zur Entscheidung herangezogen werden, da hier kein Lösungseffekt auftritt, und sich demgemäß die angehängte Last nicht weiter steigert.

selbst Steinsalz gehabt, das schon bei normaler Temperatur hohe Biegsamkeit zeigte. Die Fig. 1 gibt ein anschauliches Bild davon. Sie stellt den Umriß von Steinsalzstücken dar, welche, als wir sie aufspalten wollten, zwei stark auseinanderlaufende gekrümmte Äste ergaben. Zuweilen kann man sogar die Äste wieder zurückbiegen, ohne sie zu brechen[1]).

Ein besonderer Umstand muß noch hervorgehoben werden, auf den sich Hentze bei der Deutung seiner Versuche stützt. Es ist dies der verspätete Eintritt der Plastizierung, die erst nach etwa 30 Sekunden zu beobachten war. Hentze nimmt an, daß diese Zeit der Eindringungsdauer des Wassers in das Steinsalz entspricht, und daß die Plastizierung durch eine Art Quellung des Steinsalzes bedingt ist. Unsere eigenen Versuche, die wir mit einer feineren Anzeigevorrichtung der Durchbiegung ausführten, zeigen, daß die Wasserwirkung sofort nach Berühren des Steinsalzes einsetzt, und führen zur Annahme, daß die scheinbar verspätete Wirkung bei Hentze dadurch zu erklären ist, daß sein Schreibhebel nur größere Durchbiegungen nachweisen ließ, die sich erst einstellen, nachdem die Spannung in dem Kristall durch die Ablösung einen erheblichen Betrag erreicht hat.

Fig. 1.

Steinsalzprismen, die beim Spalten plastisch gekrümmte Äste geben.

A. Joffe, M. Kirpitschewa und M. A. Lewitzky (l. c.) untersuchen im Zugversuch das Lauediagramm von Steinsalzprismen und verwenden dessen Verzerrung zur Anzeigung der Plastizierung. Eine solche tritt nur ein bei Temperaturen über 200°. Bei tieferen Temperaturen reißt der Kristall ohne merkliche Dehnung. Anders verhält er sich unter Wasser. Hier ist die Zerreißfestigkeit so weit heraufgesetzt, daß die Elastizitätsgrenze stets erreicht und überschritten wird. Die so unter Wasser gemessenen Elastizitätsgrenzen schließen sich dem Verlauf der bei höheren Temperaturen aufgenommenen Kurve glatt an. Daraus

[1]) Ähnliches fand G. Schroeder (Mitteil. d. Nat. Ver. f. Neuvorpomm. u. Rügen **45**, 1913).

schließt Joffe, daß die plastizierende Wirkung des Wassers gewissermaßen nur eine scheinbare ist, indem die Elastizitätsgrenze unbeeinflußt bleibt und nur ihre Überschreitung durch die erhöhte Reißfestigkeit gestattet wird. Die Versuche, die wir hier mitteilen werden, sprechen gegen dieses Resultat von Joffe und weisen zum mindesten im Biegungsversuche eine wirklich plastizierende Wirkung des Wassers nach, also eine Herabsetzung der Elastizitätsgrenze des Steinsalzes unter Wasser nach.

2. Reißfestigkeit von Steinsalz unter Wasser. Neben der abnormen Plastizität des Steinsalzes zeigt es bei Berührung mit Wasser eine zweite Merkwürdigkeit, die kürzlich von Joffe entdeckt worden ist. Er fand eine Reißfestigkeit, die bis zum 100fachen Betrag des normalen Wertes erhöht ist. Joffe glaubt, daß diese Erhöhung der Festigkeit darauf zurückzuführen ist, daß gewisse störende Momente, die normalerweise an der Oberfläche vorhanden sind und ein vorzeitiges Reißen bedingen, durch den Ablösungsvorgang dauernd eliminiert werden. Hierdurch steigt dann die Festigkeit zu denjenigen Werten hinauf, die man für das ungestörte Gitter aus der Bornschen Theorie zu erwarten hätte.

Gegen diese Erklärung kann eingewendet werden, daß man aus den Angaben von Joffe schließen muß, daß das Steinsalz während der Belastung unter Wasser eine erhebliche innere Verfestigung erleidet. Nach Joffe beträgt nämlich die Elastizitätsgrenze zu Anfang der Belastung unter Wasser bei gewöhnlicher Temperatur den Wert von 900 g/mm². Soll es nun möglich sein, die Spannung bis auf etwa das 100fache dieses Wertes zu steigern, so muß die Elastizitätsgrenze während dieser Steigerung auf etwa den 100fachen Betrag ansteigen. Wenn sich aber der Kristall in bezug auf die Elastizitätsgrenze derart verfestigt, so ist es anzunehmen, daß zugleich auch die Reißfestigkeit in entsprechendem Maße ansteigt. Die hohe Reißfestigkeit des Steinsalzes unter Wasser wäre dann schließlich als Verfestigungseffekt zu deuten.

Daß auch Einzelkristalle, insbesondere auch Steinsalz, durch plastische Deformation sowohl hinsichtlich der Elastizitätsgrenze als auch der Reißgrenze verfestigbar sind (also sowohl „Formverfestigung" wie „Reißverfestigung" aufweisen), ist ja durch frühere Versuche schon bekannt[1]).

[1]) M. Polanyi, Über Verfestigung von Einzelkristallen durch Kaltbearbeitung; ZS. f. Elektrochem. **28**, 16, 1921; Literatur bei G. Masing u. M. Polanyi: Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften **2**, 177, 1924. Seither noch erschienen: R. Gross, ZS. f. Metallkunde **16**, 18, 1924; E. Schmid, ZS. f. Phys. **22**, 328, 1924.

Am glänzendsten wird die Reißverfestigung von Steinsalz gerade von Joffe bei Reckung in der Hitze bestätigt. Die Reißfestigkeit steigt dabei bis auf das 10fache.

Warum soll aber diese Verfestigung, wird man fragen, nur unter Wasser zustande kommen können? Auf Grund der bereits angedeuteten Ergebnisse unserer Versuche muß die Antwort lauten: Weil das Wasser die Elastizitätsgrenze herabdrückt, kommt der Kristall ins Fließen und verfestigt sich. Diese Verfestigung geht so lange vor sich, als die Reißverfestigung der Formverfestigung voraneilt. Dort, wo die Elastizitätsgrenze in ihrem Anstieg die Kurve der gleichfalls ansteigenden Reißfestigkeit kreuzt, bricht der Kristall.

Daß ein Körper durch die Herabsetzung seiner Elastizitätsgrenze verfestigbar wird, ist nichts Ungewöhnliches. Nach Untersuchungen von E. Schmid[1]) kann ein bandförmig gedehnter Zinkkristall bei normaler Temperatur bis auf 6 kg/mm² belastet werden, wogegen ein ähnlich orientierter Kristall in flüssiger Luft nur etwa 2,5 kg/mm² aushält. Daß es sich dabei um eine Reißverfestigung handelt, sieht man dadurch, daß der bei normaler Temperatur gedehnte Kristall auch bei der Temperatur der flüssigen Luft die 6 kg/mm² aushält.

Wenn die Wirkung des Wassers über den Weg der herabgesetzten Elastizitätsgrenze und der darauf folgenden Verfestigung durch die angehängte Last schreitet, so muß folgendes zutreffen:

1. Setzt man einen Kristall unter Wasser und trocknet ihn dann, so muß er normale Festigkeit haben.

2. Setzt man ihn unter Wasser, aber so, daß eine Last an ihm hängt, und trocknet ihn hierauf, so muß er verfestigt sein.

3. Reißt man einen Kristall unter Wasser so, daß er vor dem Reißen keine plastische Deformation erleidet, so muß er normale Festigkeit zeigen. Eine Anordnung, die dies ermöglicht, besteht darin, daß man den Kristall bricht und nur die gespannte Seite unter Wasser hält.

Wir werden sehen, daß diese drei Versuche im positiven Sinne ausfallen.

3. Neue Versuche über Plastizität von Steinsalz, trocken und unter Wasser. Das plastische Verhalten des Steinsalzes haben wir im Biegungsversuch beobachtet. Das zweiseitig auf Schneiden aufliegende Prisma wurde in der Mitte mit einem in Wasser schwimmenden Gewicht

[1]) E. Schmid, Auszüge aus den Verhandlungen des internat. Kongresses für angew. Mechanik in Delft, 1924.

belastet, dessen wirksame Größe durch Veränderung der Wasserhöhe geregelt wurde. Die Durchbiegung wurde an der Verdrehung eines an beiden Stabenden aufgekitteten Spiegelpaares in Poggendorffscher Anordnung mittels Fernrohrs und Skala gemessen. Die Genauigkeit der Ablesung an der Skala betrug 0,1 bis 0,2 mm, bei einer Skalenentfernung von 1,5 bis 4 m. Das entspricht 6 Bogensekunden des Winkels der beiden Stabenden, entsprechend einer Durchbiegung von 0,0001 bis 0,0003 mm bei 2 bis 5 cm Abstand der Schneiden. Die Nullage und die einzelnen Durchbiegungswerte waren, wenn eine plastische Deformation ausgeschlossen war, auf etwa 20″ reproduzierbar.

Tabelle 1. Zahlenwerte des in Fig. 2 dargestellten Biegungsversuches.

Prismenhöhe = 0,197 cm, Breite = 0,450 cm, Schneidenabstand = 5,04 cm, Spiegelabstand = 5,45, Skalenabstand = 4,65 cm. Der Elastizitätsmodul E ist jedesmal aus den Zahlen berechnet, zwischen denen er angeschrieben ist.

Last g	Skale cm	E kg/mm²	Last g	Skale cm	E kg/mm²
0	72,66		200	67,66	
		4070			4270
98	70,17		0	72,50	
0	72,66		210,25	67,22	
		4080			4255
98	70,18		0	72,33	
0	72,66		198	67,515	
		4230			4230
41	71,66		0	72,33	
0	72,66		220	66,725	
		4230			4230
41	71,67		0	72,08	
0	72,67		220	66,65	
		4230			4230
68,5	70,935		0	72,01	
0	72,67		98	69,605	
		4070			4085
74,5	70,76		0	72,08	
0	72,68		220	66,61	
		4000			4240
98	70,22		0	71,96	
0	72,68		220	65,17	
		4155			
119	69,72		100	67,93	
0	72,67		0	70,57	4200
		4170			
119	69,705		241	64,58	
0	72,66		0	70,47	4220
		4160			
130	69,40		263,75	63,57	
0	72,65		0	69,97	4255
		4130			
130	69,39		282,5	61,38	
0	72,64		0	68,38	4160
		4130			
153,5	68,78		297	59,38	
0	72,625		0	66,65	4210
		4120			
179	68,235		314	56,45	
0	72,59		0	64,28	4130
		4235			
179	68,21				
0	72,58	4225			

Kristall bricht bei 325 g
Die Höchstspannung betrug 1410 g/mm²

Zur Darstellung der Leistungsfähigkeit der Methode und des normalen Verhaltens von Steinsalz im Biegungsversuch haben wir in Tabelle 1

ein Versuchsprotokoll abgedruckt. In der letzten Spalte findet sich der Elastizitätsmodul ausgerechnet. Man sieht, daß die Versuche, die hier bis zu 97 Proz. der Bruchlast durchgeführt wurden, kein sicheres Anzeichen einer Abweichung vom Hookeschen Gesetz enthalten[1]).

Bezüglich des plastischen Verhaltens merkt man, daß bei wiederholter Belastung und Entlastung der Nullpunkt konstant bleibt, bis man etwa die halbe Bruchlast erreicht hat. Bei Höherbelastung und Rückkehr zum Nullpunkt findet man eine Verschiebung des Nullpunktes nach größeren Durchbiegungen. Diese bleibende Durchbiegung wächst dann bei noch stärkerer Belastung schnell an und erreicht in der Nähe der Bruchlast ungefähr den Wert der elastischen Durchbiegung.

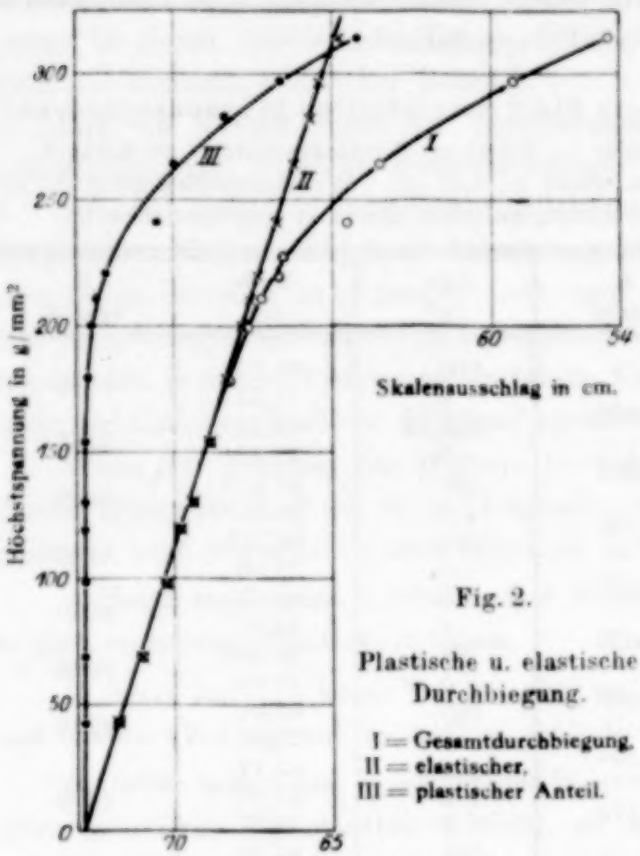


Fig. 2.

Plastische u. elastische Durchbiegung.

I = Gesamtdurchbiegung.
II = elastischer,
III = plastischer Anteil.

Das Ergebnis der Tabelle 1 ist noch einmal in Fig. 2 dargestellt. Die Kurve I gibt in Abhängigkeit von der Belastung die Gesamtdurchbiegung, also die Skalenausschläge vom (ursprünglichen) Nullpunkt gerechnet.

Die Kurve II stellt den elastischen, Kurve III den plastischen Teil der Durchbiegung dar.

Unseren Erfahrungen nach ist das plastische Verhalten des Steinsalzes im Biegungsversuch, wie es in diesem Fall zum Ausdruck kommt, typisch für normales Steinsalz in geschliffenen Prismen. Wir verwendeten hier Steinsalz aus Wieliczka, das einschlußfrei und in glatten Flächen gut spaltbar war.

Außer dem mitgeteilten Versuch wurden noch sechs ähnliche Kurven aufgenommen, die wir hier nur auszugsweise in Tabelle 2 mitteilen.

---

[1]) Die Versuche von Voigt, Wied. Ann. **52**, 536, 1894 und Koch, Wied. Ann. **5**, 251 und **3**, 611, 1878, hatten die Konstanz des Elastizitätsmoduls nur bis zu einer Belastung von etwa der halben Bruchlast nachgewiesen.

Tabelle 2. Orientierungswerte für die normale Plastizität von Steinsalz im Biegungsversuch.

Bleibende Verdrehung der Prismenenden in Bogensekunden bei den Höchstspannungen S.

	$S = 300$ g/mm²	$S = 600$ g/mm²	$S = 900$ g/mm²	Schlußwert der plastischen Durchbiegung	S in g/mm² für den Schlußwert
1	0″	22″	1,5′	**4′**	1075
2	24″	3′	14′	**22′**	1225
3	42″	41′	12′	**23′**	1245
4	36″	6′	14′	**24′**	1183
5	4″	4′	12′	**20′**	1230
6	6″	4′	10′	**15′**	1580

Die Bruchfestigkeit des Wieliczkaer Steinsalzes ergab sich als Mittel von 40 Versuchen bei einer mittleren Abweichung von 1,2 Proz. zu 1190 g/mm² [1]).

Allerdings muß nochmals betont werden, daß es neben diesem „normalen“ Steinsalz auch wesentlich anderes, und zwar viel plastischeres gibt. Solches Material, das auch aus Wieliczka stammte, haben wir ebenfalls in mehreren Fällen im Biegungsversuch untersucht. Schon bei kleinster Belastung setzte bleibende Deformation ein, die sich bei 50 bis 60 Proz. der normalen Bruchlast bis zu starken, mit bloßem Auge sichtbaren Krümmungen steigerte. Für unsere Zwecke war dieses Material unbrauchbar.

Die Versuche, die auf die Wirkung von Wasser auf die Durchbiegung angestellt wurden, konnten nicht auf dieselbe Weise durchgeführt werden wie die soeben mitgeteilten Messungen an trocknem Steinsalz, weil eine langandauernde gleichmäßige Behandlung mit Wasser bei der verwendeten Anordnung nicht durchführbar war. Es wurde also so verfahren, daß das Steinsalzprisma erst mit einem bestimmten Gewicht belastet und dann im mittleren Teil mit Wasser benetzt wurde. Hierauf setzte sofort ein Anwachsen der Durchbiegung ein, das durch 20 bis 30 Sekunden im Fernrohr beobachtet wurde. Sodann haben wir das Steinsalz durch Absaugung des Wassers getrocknet und das Verhalten im Fernrohr weiter verfolgt.

Womöglich ist dabei so vorgegangen worden, daß das Prisma zuletzt, also bis zum Bruch oder sonstigen Abschluß des Versuchs, unter Wasser stand.

Die Benetzung mit Wasser erfolgte entweder allseitig oder nur einseitig. Im letzteren Falle auf der oberen Fläche (Druckseite) oder

[1]) Ausführliche Angaben bei W. Ewald, Diss. Berlin 1924.

auf der unteren Fläche (Zugseite). Der Vergleich der drei erwähnten Fälle zeigt, daß die allseitige Wasserwirkung zwar am stärksten ist, daß aber, merkwürdigerweise, auch die einseitige Bewässerung an der

Tabelle 3. Orientierungswerte für die plastische Durchbiegung von Steinsalz bei Benetzung.

h = Höhe, b = Breite des Kristalls in Millimeter, l = Schneidenabstand in Millimeter, S_e = Endwert der Höchstspannung in Gramm/Quadratmillimeter, P_e = zugehörige plastische Durchbiegung (in Winkelmaß).

Lfd. Nr.	Umfang der Benetzung	Vor dem Versuch		l	S_e	P_e	Nach dem Versuch	
		h	b				h	b
1	allseitig	1,78	6,70	40,0	995	24°	1,46	6,30
2	„	1,55	3,66	34,0	840	11°	1,43	3,60
3	„	1,73	4,75	34,0	900	9°	1,61	4,67
4	oben	0,84	4,80	20,0	1450	2° 30′	0,52	4,80
5	„	1,65	4,33	30,0	1180	5° 20′	1,45	4,33
6	„	1,05	5,20	29,0	1375	8°	0,95	5,20
7	„	1,62	7,05	36,3	970	1° 54′	1,45	7,05
8	„	1,85	3,73	36,2	1250	1° 50′	1,64	3,73
9	unten	1,62	4,35	26,0	1200	11′	1,50	4,35
10	„	1,56	3,67	29,0	1380	13′	1,46	3,67
11	„	2,12	5,04	34,0	960	9′	1,92	5,04

Druckseite kaum hinter jener an Wirkung zurückbleibt. Sehr wenig macht dagegen die Berührung mit Wasser an der Zugseite aus. Die Tabelle 3 gibt eine Darstellung dieses Sachverhalts. Es sind in ihr die Fälle aufgenommen, in denen die Benetzung bis zum Versuchsabschluß aufrechterhalten wurde. Man sieht, daß bei der allseitigen und Druckseitenbenetzung (trotz kleineren Schneidenabstandes) die Winkelverdrehung der Kristallenden bedeutend größer ist als in Tabelle 2, ohne daß die Spannung höhere als normale Werte erreicht. Einige gebogene Prismen aus diesen Versuchen sind in Fig. 3 dargestellt.

Fig. 3. Gebogene Steinsalzprismen. Das stärker gebogene unter allseitiger, das andere unter druckseitiger Wasserwirkung entstanden.

Da bei Benetzung der Druckseite die Wasserwirkung sehr deutlich und dabei die abgelöste Salzmenge verhältnismäßig gering ist und ferner die Ablösung bei dieser Art Benetzung sehr regelmäßig erfolgt, wurde diese Versuchsführung für das genauere Studium bevorzugt. Es sei hier daher einiges über die Technik derselben gesagt.

Die Steinsalzprismen wurden vollständig mit wasserdichten Überzügen versehen und dann die eine Seite abgeschliffen. Zur Abdichtung wurde in den verschiedenen Versuchen Wachs-Kolophoniumkitt bzw. Schellacküberzug oder Kanadabalsam mit Schellack überzogen, verwendet. Die eingehüllten Prismen wurden auf Dichtigkeit während 1 Minute in fließendem Wasser geprüft. Die Art des Überzuges war ohne Einfluß auf die Erscheinung.

Zur allgemeinen Orientierung wurden zunächst Kurven in folgender Weise aufgenommen: Das Steinsalzprisma wird zunächst mit etwa $^1/_3$ bis $^1/_2$ der normalen Bruchlast belastet, hierauf bei dieser Last 1 bis 2 Minuten lang gewartet, um zu sehen, ob nicht etwa eine Steigerung der Durchbiegung durch plastische Verformung mit der Zeit schon von selbst eintritt. Nun werden mit einem weichen Pinsel ein bis zwei Tropfen destillierten Wassers von Zimmertemperatur auf die obere Seite des Prismas gebracht. Die untersuchte Skalenverschiebung wird von 10 zu 10 Sekunden abgelesen. Nach 20 bis 30 Sekunden wird das Wasser mit Hilfe einer biegsamen Kapillarpipette abgesaugt und die Durchbiegung noch weiter 1 bis 2 Minuten beobachtet. In der Folge wird der Versuch entweder bei derselben Last wiederholt, oder man geht zu einer höheren Last über und macht ihn dort wieder. Um die Wirkung der Erschütterung bei der Benetzung und Absaugung festzustellen, wurde in etwa 10 Fällen das Versuchsobjekt vor der Benetzung durch Stoß in Schwingungen versetzt,

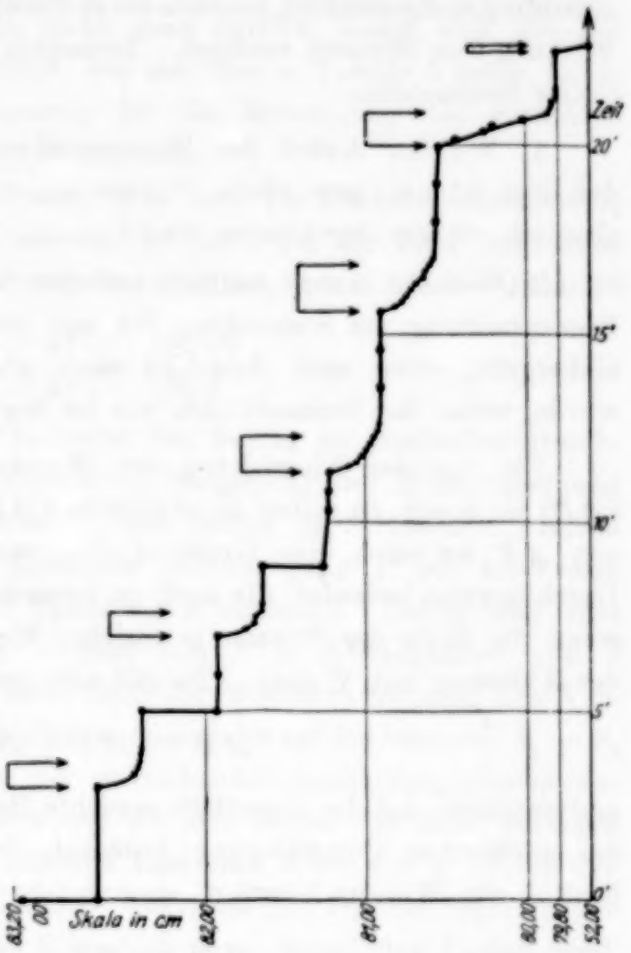


Fig. 4. Durchbiegungskurve bei periodisch einsetzender Wasserwirkung.

In den durch die Pfeilpaare abgegrenzten Kurvenstücken stand das Prisma unter Wasser. (Man beachte den veränderlichen Abszissenmaßstab.)

was jedoch in keinem Falle zu einer Verschiebung der Ruhelage führte.

Die starken Durchbiegungen, die man infolge der Wasserwirkung in Fig. 4 auftreten sieht, weisen deutlich darauf hin, daß hier nicht etwa die durch die Ablösung bedingte erhöhte Beanspruchung für die Erscheinung maßgebend ist, sondern die in Tabelle 3 angedeutete plastizierende Wirkung des Wassers vorliegt. Immerhin ist es erwünscht, auch quantitativ festzustellen:

1. Welcher Anteil der Wasserwirkung ist darauf zurückzuführen, daß das dünner gewordene Prisma unter der angehängten Last rein elastisch stärker durchbogen wird?

2. Welcher Anteil entfällt auf den Umstand, daß die zusätzliche Beanspruchung des Steinsalzes, die mit der Abnahme der Prismendicke einhergeht, etwa auch dann zu einer plastischen Deformation führen würde, wenn das Steinsalz sich wie im trocknen Zustand verhielte?

Die von der Einwirkung des Wassers herrührende Durchbiegung (ΔD) ist somit zu teilen in elastische (ΔE) und plastische (ΔP), und von ΔP ist noch eine Größe $\Delta_1 P$ abzuziehen, welche die plastische Durchbiegung bedeutet, die auch an trockenem Steinsalz eintreten würde, wenn die Höhe des Prismas in gleicher Weise vermindert würde wie bei der Ablösung mit Wasser. Es gilt also erstens

$$\Delta D = \Delta P + \Delta E,$$

und zweitens, daß der eigentlich gesuchte Betrag $\Delta_2 P$, welcher den Anteil der plastischen Durchbiegung bedeutet, der lediglich vom spezifischen Einfluß des Wassers herrührt, ausgedrückt wird durch

$$\Delta_2 P = \Delta P - \Delta_1 P.$$

Die Bestimmung von ΔP und ΔE erfolgt einfach so, daß man nach der Wassereinwirkung auf die Last Null zurückgeht und feststellt, um wieviel sich die zu dieser gehörige Fernrohrablesung verschoben hat. Diese Verschiebung ist gleich ΔP, wodurch auch sofort $\Delta E = \Delta D - \Delta P$ ausgedrückt werden kann.

Um noch die Korrekturgröße $\Delta_1 P$ zu finden, verfährt man folgendermaßen. Aus ΔE kann man berechnen, um welchen Betrag das Prisma durch Weglösung dünner geworden ist. Bezeichnet man nämlich den Betrag der elastischen Durchbiegung vor der Wassereinwirkung mit E_1, nach der Wassereinwirkung mit E_2 ($= E_1 + \Delta E$), so verhalten sich die

entsprechenden Höhen h_1 und h_2 des Prismas umgekehrt wie die dritten Wurzeln der Durchbiegungen:

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{\frac{E_2}{E_1}}, \tag{1}$$

wobei allerdings vorausgesetzt ist, daß die Ablösung der oberen Seite gleichmäßig erfolgt. Da dies nicht ganz zutrifft, findet sich die Beziehung (1) nur annähernd erfüllt, wie man dies in Tabelle 5 sehen kann. Doch genügt die Übereinstimmung für die Berechnung der gesuchten sehr kleinen Korrekturgröße $\Delta_1 P$ durchaus.

Um diese zu finden, berechnet man nun die Höchstspannungen S_1 und S_2 vor und nach der Wassereinwirkung. Da die Last sich nicht ändert, verhalten sich die Höchstspannungen umgekehrt wie die Quadrate der Höhen:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2^2}{h_1^2} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die gesuchte Größe $\Delta_1 P$ bedeutet den Betrag an plastischer Durchbiegung, die an trockenem Steinsalz bei Steigerung der Höchstspannung von S_1 auf S_2 eingetreten wäre. Man findet $\Delta_1 P$ hiernach, indem man zugrunde legt, daß die plastische Durchbiegung P bei trockenem Steinsalz gleichmäßig mit der Spannung S zunimmt. Indem man also vor dem Wasserversuch den Verlauf von P in Abhängigkeit von S unterhalb S_1 bestimmt und dann nach der Wassereinwirkung den Verlauf von P jenseits von S_2 aufsucht, kann man die auf das Intervall $S_1 - S_2$ entfallende Veränderung von P mit ausreichender Annäherung abschätzen.

Bei jedem Wasserversuch haben wir also vorher bei einer geringen Last und nachher bei einer höheren Last den Wert von P (durch den Betrag der Nullpunktsverschiebung) gemessen[1]). Da die Spannungen beiderseits des Intervalls $S_1 - S_2$ einfach proportional den Lasten sind, so ergibt sich aus den Lasten sofort die gesuchte Abhängigkeit $P = f(S)$.

In Wirklichkeit vereinfachte sich der ganze Sachverhalt sehr dadurch, daß in den Trockengebieten $S < S_1$ und $S > S_2$ meist überhaupt keine Veränderung von P bei wachsender Spannung vorhanden war. Die meisten Versuche sind eben in einem Beanspruchungsbereich durchgeführt, in dem trockenes Steinsalz unplastisch ist und somit $\Delta_1 P = 0$ und einfach

$$\Delta_2 P = \Delta P$$

ist. Auch in den übrigen Fällen war $\Delta_1 P$ sehr klein.

[1]) Bei diesen Belastungen wurde dem Kristall immer ausreichende Zeit zur plastischen Verformung gelassen. Man erkennt das in Tabelle 4 daran, daß die Skalenstellung bei der erhöhten Last während einer Minute unverändert blieb.

Man überblickt das ganze Verhalten in Fig. 5, wo für den in Tabelle 4 zahlenmäßig verzeichneten Versuch die zusammengehörigen Werte von P und S dargestellt worden sind. Man sieht, daß die trockenen Teile nur gegen höhere Lasten zu merklich von der Vertikalen abweichen. Die in den feuchten Intervallen gefundenen Anstiege von P sind also in keinem nennenswerten Anteile auf die gleichzeitige Zunahme von S zurückzuführen, sondern beruhen auf der spezifischen Einwirkung des Wassers.

In den Fällen, wo die Trockenkurven $P = f(S)$ nicht genau vertikal verlaufen, ist $\Delta_1 P$ durch lineare Interpolation zwischen den Kurven vor und nach der Wassereinwirkung bestimmt worden.

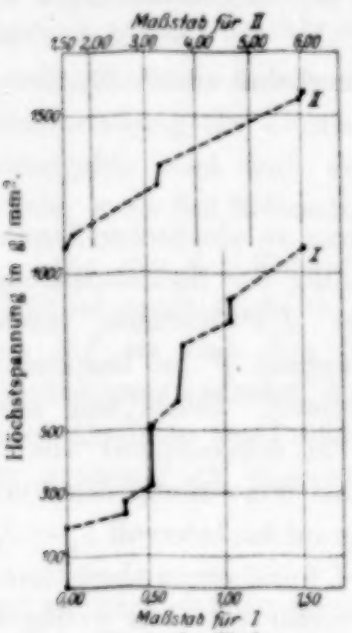


Fig. 5. Kurve der plastischen Durchbiegung bei zeitweise einsetzender Wasserwirkung.
Die gestrichelten Teile sind unter Wasser aufgenommen.

Die Gesamtheit der auf diese Weise gemachten Versuche ist in Tabelle 5 verzeichnet. Man sieht, daß $\Delta_1 P$ stets deutlich meßbare Werte erreicht. Im allgemeinen steigen diese am gleichen Versuchskörper stets an, wenn die Last, bei der benetzt wird, gesteigert worden ist. Doch kann der Anstieg fehlen, wenn die Last beim neuen Versuch die des letzten nur um ein geringes übertrifft.

Diese Erscheinung hängt zusammen mit der auch sonst nachweisbaren Verfestigung bei plastischer Deformation unter Wassereinwirkung. (Siehe nächsten Abschnitt.) Wir haben diese Verfestigung (in drei Versuchen) auch noch dadurch festgestellt, daß wir nach einem Wasserversuch bei einer höheren Last auf eine niedrigere zurückgingen, bei der schon einmal Wasserwirkung nachgewiesen worden war. Ein Benetzungsversuch führte jetzt jedesmal zu negativen Resultaten, es war keine plastische Durchbiegung zu erzielen.

Die ersten deutlichen Wassereffekte sind in einzelnen Fällen bei Spannungen nachgewiesen worden, die nur etwa ein Siebentel der Bruchlast betrugen. Das Wasser hat also die Elastizitätsgrenze hier auf ein Siebentel des normalen Wertes herabgesetzt. Doch kann diese Zahl schon deswegen nur zur allgemeinen Orientierung dienen, weil die Deutlichkeit des Effekts sich mit der Höhe der Prismen wesentlich ändert, und zwar bei abnehmender Höhe stark zunimmt.

Wir erwähnen noch, daß an dem Angriffspunkt der Last keine Einsenkung entstanden war. Die Kraft wurde auf die obere Fläche nicht wie gewöhnlich durch eine Schneide, sondern durch eine Kugel übertragen. An der Stelle, wo sie den Kristall berührte, blieb durch unvollständige Ablösung eine kleine Erhabenheit übrig. Die Ablösung war sonst gleichmäßig bis auf die Kanten, die nicht angegriffen wurden und an denen dünne Leisten (von etwa $^1/_{10}$ mm Höhe) zurückblieben.

Tabelle 4. Zahlenwerte des in Fig. 5 dargestellten Versuches. (Abmessungen siehe Tabelle 5, Nr. 1 bis 7.)

Zeit	Belastung g	Skale cm	Zeit	Belastung g	Skale cm	Zeit	Belastung g	Skale cm
	0	67,35		3	66,59	1′ 20″		62,22
	3[1])	67,24		53	65,30	1′ 30″		61,62[3])
	22	66,96		3	66,56	1′ 40″		61,49
	3	67,22	0′	53	65,295	1′ 50″		61,47
	22	66,96	1′		65,29[2])	2′ 50″		61,47
	3	67,235	1′ 10″		64,97		3	64,09
0′	22	66,97	1′ 20″		64,82		61,8	61,06
1′		66,975[2])	1′ 30″		64,75[3])		3	64,055
1′ 10″		66,55[3])	2′ 30″		64,75		63,5	60,97
1′ 20″		66,54		3	66,25		3	64,035
2′ 20″		66,55		58	64,56	0′	63,5	60,95
	3	66,89		3	66,26	1′		60,95[2])
	25,5	66,48	0′	58	64,56	1′ 10″		60,07
	3	66,90	1′		64,56[2])	1′ 20″		59,27
0′	25,5	66,49	1′ 10″		64,08	1′ 30″		58,62
1′		66,495[2])	1′ 20″		63,82	1′ 40″		57,87[3])
1′ 10″		66,21[3])	1′ 30″		63,67[3])	1′ 50″		57,68
1′ 20″		66,19	1′ 40″		63,65	2′		57,63
2′ 20″		66,20	1′ 50″		63,62	3′		57,52
	3	66,73	2′ 50″		63,62		3	61,33
	41	66,095		3	65,79		64,5	57,22
	3	66,77		60,5	63,50		3	61,27
0′	41	66,10		3	65,64		66,5	57,07
1′		66,10[2])	0′	60,5	63,49		3	61,10
1′ 10″		65,79[3])	1′		63,48[2])	0′	66,5	57,07[2])
1′ 20″		65,73	1′ 10″		62,82	20″		54,0[4])
2′ 20″		65,75						

Betont sei noch der bereits erwähnte Umstand, daß die Trocknung nur durch Absaugen des Wassers erfolgte. Die Oberfläche blieb dabei merklich feucht. Dennoch verhielt sich der Kristall in den Perioden zwischen den Benetzungen wie trocken (vgl. Fig. 5). Das liegt daran,

[1]) Als Nullpunkt wurde hier eine Belastung mit 3 g gewählt.
[2]) Nach der Ablesung erfolgt Benetzung mit Wasser.
[3]) Nach der Ablesung erfolgt Trocknung.
[4]) Hier brach der Kristall durch.

Tabelle 5.

Bei Berührung mit Wasser an der Druckseite erzielte plastische Durchbiegungen.

Nr.	h vor dem Versuch mm	b mm	l mm	S_1 g/mm²	S_2 g/mm²	ΔD		$\Delta_1 P$	$\Delta_2 P$ (= $\Delta P - \Delta_1 P$)	h nach dem Versuch	
						ΔP an der Skale cm	ΔE an der Skale cm	an der Skale cm	an der Skale cm	gef. mm	ber. mm
1	0,84	4,80	20,0	198	230	0,35	0,08	0,00	**0,35**	—	0,77
2	—	4,80	20,0	270	320	0,17	0,12	0,00	**0,17**	—	0,71
3	—	4,80	20,0	510	590	0,18	0,17	0,01	**0,17**	—	0,66
4	—	4,80	20,0	765	840	0,31	0,23	0,00	**0,31**	—	0,63
5	—	4,80	20,0	915	1080	0,47	0,47	0,31	**0,16**	—	0,58
6	—	4,80	20,0	1120	1270	1,55	0,47	0,13	**1,42**	—	0,55
7	—	4,80	20,0	1340	1550	2,71	0,72	0,63	**2,08**	0,51	0,51
8	1,74	4,80	40,0	582	618	0,22	0,10	0,00	**0,22**	—	1,69
9	—	4,80	40,0	666	723	0,20	0,17	0,00	**0,20**	—	1,62
10	1,42	4,80	40,0	468	545	0,23	0,17	0,00	**0,23**	—	1,31
11	—	4,80	40,0	589	642	0,41	0,23	0,00	**0,41**	1,29	1,26
12	1,05	4,80	40,0	363	406	0,49	0,21	0,00	**0,49**	—	0,99
13	—	4,80	40,0	682	723	0,38	0,22	0,00	**0,38**	—	0,96
14	—	4,80	40,0	797	862	0,92	0,34	0,00	**0,92**	0,94	0,92
15	1,50	5,21	40,0	985	1063	0,38	0,26	0,01	**0,37**	1,48	1,44
16	1,46	5,21	40,0	832	1018	0,57	0,58	0,00	**0,57**	1,34	1,32

h, b und l sind die Abmessungen.

S_1 und S_2 die Höchstspannungen vor und nach der Benetzung. (Die Differenz beruht auf der Abnahme von h.)

ΔD = Änderung der Durchbiegung während der Benetzung, ΔP = plastischer, ΔE = elastischer Anteil.

$\Delta_1 P$ = Anteil der plastischen Durchbiegung, der auf den Spannungszuwachs von S_1 auf S_2 entfällt.

$\Delta_2 P$ = Bleibende Durchbiegung als Folge der plastizierenden Wirkung des Wassers.

daß die noch vorhandene Wassermenge auf NaCl gesättigt und daher wirkungslos ist. Auch in eigens hierzu angestellten Versuchen erwies sich, daß die Benetzung mit gesättigter Kochsalzlösung keine plastizierende Wirkung hat.

4. Festigkeit von Steinsalz, trocken und unter Wasser. Es gibt eine Merkwürdigkeit in der Festigkeit von Steinsalz, die bereits von W. Voigt festgestellt wurde, aber bisher noch nicht erklärt werden konnte. Sie besteht darin, daß die Zugfestigkeit weit unter der Bruchfestigkeit gelegen ist. Das Verhältnis der beiden Größen fand Voigt zu etwa 1 : 2, und zahlreiche Versuche, die wir in anderem Zusammenhang selbst ausgeführt haben, bestätigen dieses Ergebnis.

Ähnliche Abweichungen sind gelegentlich auch bei polykristallinen Materialien (Gußeisen, Steinen) gefunden worden und konnten dort zurückgeführt werden auf die Abweichungen vom Hookeschen Gesetz. Dieser Ausweg ist hier nicht gangbar, weil Abweichungen vom Hookeschen Gesetz nicht gefunden worden sind und auch vom Standpunkt der Bornschen Gittertheorie (bei den in Betracht kommenden Spannungen) unmöglich eintreten können. Angesichts dieser ungeklärten Sachlage betrachten wir in der Folge die normale Reißspannung von etwa 450 bis 550 g/mm² und die normale Bruchspannung von 1050 bis 1250 g/mm² als durch die Erfahrung im Zug- bzw. Biegungsversuche gegebenen Zahlen, deren Beziehung zueinander nicht erörtert wird.

Das Studium der Festigkeit unter Wasser begannen wir mit einigen Wiederholungen des Joffe-Effekts. Prismen von 25 mm² Querschnitt wurden in entsprechende Metallfassungen[1]) eingekittet und mit etwa der halben normalen Bruchlast, und zwar 5250 g, belastet und hierauf allseitig mit Wasser benetzt. In etwa 10 Minuten erfolgt das Reißen. Die sofort getrockneten Reißstücke zeigten, daß der Bruch nicht an der engsten Stelle eingetreten war. Diese Stellen hatten den Querschnitt von 1,0, 1,5, 1,6 und 3,0 mm². Die Festigkeit dieser Stellen war also jedenfalls größer als 5250, 3500, 3280 bzw. 1750 g/mm². Es zeigt sich also eine Verfestigung um mehr als das Zehnfache.

Eine weitere Steigerung wäre bei unserer Anordnung nur möglich, wenn wir auch noch kleinere Querschnitte abgelöst hätten. Damit kämen wir aber auf das Gebiet, in dem sich Steinsalz nach H. Müller[2]) abnorm verhält. Es zeigt sich hier auch in trockenem Zustande erhöhte Festigkeit, was die systematische Durchführung unserer vergleichenden Unter-

[1]) Die nach der Vorschrift von W. Voigt (l. c.) angefertigt wurden.
[2]) H. Müller, Phys. ZS. **25**, 223, 1924.

suchungen unübersichtlich gestaltet hätte. Auf den von Müller gefundenen Effekt, den wir bestätigen konnten, kommen wir später noch zurück.

In einer nächsten Versuchsreihe wurden Prismen von genau derselben Art, wie sie zum Nachweis des Joffe-Effekts verwendet wurden, zu Zugversuchen verwendet, jedoch so, daß die Versuchskörper diesmal im unbelasteten Zustand abgelöst, hierauf durch Bespritzung mit Alkoholäther getrocknet und innerhalb von zwei bis drei Minuten gerissen wurden. Die Prismen rissen an den engsten Stellen, deren Querschnitte 9,9, 11,1, 13,6 und 14 mm^2 betrugen, und hatten hierauf bezogen die Festigkeiten 530, 477, 490 bzw. 448 g/mm^2, also, wie zu erwarten war, durchaus normale Werte.

Ebenso ergab sich die Bruchfestigkeit von Steinsalzprismen, deren Oberfläche in Wasser abgelöst und die nachfolgend getrocknet wurden, zu 1193, 1100, 1045 und 1105 g/mm^2, also auch hier durchaus normale Werte.

Ganz anders wird das Verhalten der mit Wasser abgelösten und getrockneten Prismen, wenn die Ablösung der Oberfläche unter Spannung vor sich geht. In den hierauf bezüglichen sieben Versuchen wurden wiederum Prismen von 25 mm^2 mit 5250 g vorbelastet und hierauf allseitig mit Wasser benetzt, bis eine erhebliche Querschnittsabnahme erreicht war. Diese wurde jedoch nicht so weit getrieben wie bei den Versuchen über den Joffe-Effekt, sondern auf Grund der dort gewonnenen Erfahrungen so weit eingeschränkt, daß zunächst kein Bruch eintrat. Dann wurde mit Alkoholäther getrocknet und durch Zufließenlassen von Schrotkörnern das Gewicht bis zum Bruch gesteigert.

Dabei zeigte sich, daß die Prismen stets an den jüngsten Stellen am festesten waren und daher an weiteren Stellen rissen. Die Tabelle 6 enthält die Querschnitte der jüngsten Stellen sowie der Reißstellen und die auf die engeren Querschnitte berechneten Festigkeiten. Diese sind

Tabelle 6. Festigkeit von Steinsalz bei Vorbelastung unter Wasser und nachheriger Trocknung.

Nr.	Bruchlast	Reißquerschnitt	Engster Querschnitt	Untere Grenze der Festigkeit	Verfestigung
1	5800	7,5	5,0	1160	**2,3**fach
2	6400	8,85	5,0	1280	**2,6** „
3	9250	16,8	4,65	2000	**4,0** „
4	8400	6,3	3,5	2400	**4,8** „
5	5600	5,3	3,6	1550	**3,1** „
6	8800	23,0	4,9	1800	**3,6** „
7	5250	12,0	2,1	2500	**5,0** „

also (ebenso wie beim Joffe-Effekt) als untere Grenzen zu betrachten. In Fig. 6 sieht man das eine Bruchstück des Probestückes Nr. 6 der Tabelle 6. Die auf rund 500 g/mm² bezogene Verfestigung ist in der letzten Spalte enthalten und beträgt das 2,3- bis 5fache.

Die an u für sich unwirksame Ablösung wirkt verfestigend, wenn sie unter Anspannung erfolgt.

Wir fügen hier noch einige Messungen der Reißfestigkeit an engen Querschnitten hinzu. Die Prismen, die ursprünglich 25 mm² Querschnitt hatten, wurden auf die Querschnitte von 0,25 mm², 0,40 mm², 0,6 mm² und 0,22 mm² abgelöst, getrocknet und gerissen. Die so gewonnenen dünnen Stäbe zeigten deutliche Biegsamkeit. In den Fällen 1 bis 3 ergeben sich die Festigkeiten zu 400 g/mm², 437 g/mm² und 615 g/mm². Im Falle 4 riß der Kristall nicht an der engsten Stelle, sondern an einer anderen Stelle mit 0,65 mm². Auf den engeren Querschnitt bezogen ergibt sich der stark erhöhte Wert von 1320 g/mm².

Fig. 6.
Durch Belastung unter Wasser verfestigter und dann trocken gerissener Steinsalzkristall.

Auch diese Erscheinung, deren genauere Untersuchung hier nicht unternommen werden soll, möchten wir als Verfestigung deuten. Eine solche kann entweder dadurch zustande kommen, daß während der Ablösung das Gewicht der unteren Fassung, das etwa ein Viertel der Bruchlast ausmacht, die Verfestigung hervorruft, oder kommt vielleicht eine Plastizität des dünnen Kristallfadens als Grundlage der Verfestigung in Betracht.

Tabelle 7. Bruchversuche, bei denen die Zugseite unter Wasser steht.

Nr. d. Versuchskörpers	Ob unter Wasser oder trocken	h mm	b mm	l mm	P g	F g/mm²
1	unter Wasser	1,76	4,32	40,0	250	1120
	trocken	1,89	4,31	20,0	615	1192
	trocken	1,93	4,34	20,0	626	1165
2	unter Wasser	1,87	4,82	40,0	302	1082
	trocken	1,99	4,83	20,0	681	1070
	trocken	2,02	4,82	20,0	690	1060
3	unter Wasser	1,91	4,85	40,0	294	1000
	trocken	2,02	4,87	20,0	710	1070
	trocken	2,00	4,88	20,0	680	1050
4	unter Wasser	1,56	4,92	40,0	202	1020
	trocken	1,72	4,90	20,0	510	1058
	trocken	1,71	4,92	20,0	503	1058

Zum Schluß sei noch auf die Bruchversuche eingegangen, bei denen die „Zugseite" des Steinsalzes bis zum Augenblicke des Bruches unter Wasser und der übrige Teil des Kristalls trocken war. Sie ergaben normale Werte. Zum Vergleich wurden die beiden Bruchstücke des Versuchskörpers in trockenem Zustande gebrochen. Die dabei erzielten Ergebnisse stimmen mit den unter Wasser beobachteten Werten überein. (Vgl. Tabelle 7.)

Man sieht hier, daß eine erhöhende Wirkung des Wassers auf die Festigkeit ausbleibt, wenn man dafür sorgt, daß das Wasser keine Plastizierung und daher auch keine Verfestigung herbeiführt. Hier ist dies durch den wasserdichten Überzug an den Seitenflächen und an der „Druckseite" erreicht worden. Erwähnt sei, daß die Seitenflächen im unteren Drittel ebenfalls frei gelassen und mit Wasser benetzt wurden, damit nicht ein Brechen an einer vielleicht nicht völlig benetzten Kante eintreten könne.

Rückblick.

1. Es wurde die bekannte Plastizierung des Steinsalzes unter Wasser im Biegungsversuch untersucht und festgestellt, daß der Effekt in einer Herabsetzung der Elastizitätsgrenze besteht, die sofort bei Berührung mit Wasser einsetzt und bei Trocknung oder bei Sättigung des Wassers an NaCl aufhört.

2. Auch wenn nur die obere (also gedrückte) Seite des gebogenen Prismas benetzt wird, tritt der Effekt ein, wenn auch etwas schwächer.

3. Wenn nur die untere, also die unter Zugspannung stehende Seite des gebogenen Prismas benetzt wird, ist die Plastizierung kaum nachweisbar.

Aus der Punkten 1 bis 3 ist zu schließen, daß bei Steinsalz von normaler Temperatur der wesentlichste Widerstand gegen Formänderung in der Oberfläche gelegen ist. Während der Ablösung der oberflächlichen Schichten werden diese Widerstände dauernd beseitigt.

Eine Erklärung dieses Effektes kann man darauf gründen, daß die Biegung der Steinsalzprismen durch ein Gleiten entlang der Rhombendodekaederfläche bedingt ist. Dabei treten die gleitenden Schichten an der Oberfläche hervor und erzeugen feine Treppen, die man Gleitlinien nennt. Es muß wohl angenommen werden, daß in der normalen Oberfläche sich ein Widerstand gegen dieses Hinausschieben von Gleitschichten geltend macht, so daß diese hier gleichsam abgeriegelt sind.

Die dauernd vor sich gehende Ablösung der Oberflächenschicht scheint die Verriegelung dauernd wegzunehmen. Anscheinend muß eine gewisse Zeit verstreichen, ehe sich diese an einer frischen Fläche ausbildet.

4. Des weiteren wurde die von Joffe gefundene erhöhte Festigkeit von Steinsalz unter Wasser untersucht. Der Effekt wurde bis zu zehnfacher Verfestigung reproduziert.

5. Steinsalzprismen, deren Oberfläche abgelöst wurde, zeigen normale Zug- und Bruchfestigkeit.

6. Erfolgt die Ablösung der Oberfläche unter Belastung, so erweist sich Steinsalz auch nach der Trocknung als bedeutend verfestigt. Es wurde bis zu 5facher Festigkeit gefunden.

7. Ein Steinsalzprisma, das man so bricht, daß die untere Seite („Zugseite") unter Wasser steht, dagegen der übrige Kristall wasserdicht überzogen ist, bricht bei normaler Last.

Aus den Versuchen 5 bis 7 wird geschlossen, daß die Erklärung des Joffe-Effektes in einer Verfestigung zu suchen ist, die das Steinsalz bei Belastung unter Wasser erleidet. Die Verfestigung wird durch die Herabsetzung der Elastizitätsgrenze durch das Wasser herbeigeführt. Diese Herabsetzung ist der primäre Effekt, wenn er fehlt (wie im Falle 7), so bleibt auch die Wirkung des Wassers auf die Festigkeit aus.

Der Standpunkt, zu dem wir gelangen, ist also der, daß man sich der „molekularen Festigkeit" von Steinsalz, wie sie sich aus der Bornschen Gittertheorie ergibt, durch Verfestigung des Kristalls nähern kann. Die Verfestigung ändert wohl nichts Wesentliches an den Gitterkräften, aber sie beseitigt die Umstände, die ein vorzeitiges Reißen bedingen.

Worin diese Umstände bestehen, wissen wir freilich nicht, es spricht aber bisher wenig dafür, daß sie in der Oberfläche gelegen sind. In einer Untersuchung, über die demnächst berichtet werden soll, konnten wir feststellen, daß bei Steinsalzkristallen, die man auf Grund genauer optischer Prüfung des Materials auswählt, die einzelnen Bestimmungen der Festigkeit (namentlich im Biegungsversuch) auf wenige (im Mittel 1 bis 2) Prozente übereinstimmen. Der Zustand der Oberfläche — ob Spaltfläche, geschliffen, poliert, abgelöst oder auch angeritzt — ist nur von mäßigem Einfluß. Am stärksten weichen grobgeschliffene Stücke ab, deren Festigkeit etwa 20 Proz. über dem Durchschnitt liegt.

Bei Ausführung der obigen Arbeit sind wir vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaften unterstützt worden, wofür wir nochmals unseren besten Dank aussprechen.

Für gütige Unterstützung bei der Beschaffung von Steinsalz aus Wieliczka danken wir den „Optischen Werkstätten von B. Halle Nachf. in Berlin-Steglitz".

Schließlich sei Herrn Dr. E. Schmid für sein dauerndes Interesse und seine Hilfsbereitschaft herzlichst gedankt.

Berlin-Dahlem.
Kaiser Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie.
Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie.

Der quadratische elektrische Effekt an den *D*-Linien des Natriums in Absorption [inverser Starkeffekt][1]).

Von **Rudolf Ladenburg** in Breslau.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 13. Juni 1924.)

Untersuchung der Einwirkung starker elektrischer Felder auf die Absorptionslinien des Natriums mittels Lummer-Gehreke-Platte. Beschreibung der besonderen, auch für Resonanzversuche geeigneten Lichtquelle, die die Interferenzmaxima liefert, auf deren Untergrund die *D*-Linien in Absorption erscheinen; Einzelheiten des Absorptionsrohrs, das elektrische Felder bis 160000 Volt/cm in Na-Dampf unter 10^{-5} mm Druck herzustellen erlaubt. Messung dieser Felder und der elektrischen Einwirkung auf die D_1- und D_2-Absorptionslinien, Abhängigkeit von der Feldstärke, Polarisationserscheinungen. Theoretische Überlegungen auf Grund klassischer und quantentheoretischer Vorstellungen.

Die bekannte Schwierigkeit, Gase oder Dämpfe mit hinreichend scharfen Spektrallinien hohen elektrischen Feldern auszusetzen, löste J. Stark, indem er die hochgeladenen Kondensatorplatten im Kathodendunkelraum anbrachte und die zwischen ihnen hindurchgehenden leuchtenden Kanalstrahlen untersuchte. Eine andere Möglichkeit bieten Metalldämpfe im Vakuumrohr, die bei sehr geringer Dampfdichte und bei Ausschluß fremder Gase schmale Absorptionslinien liefern: daher kann man sie in diesem Zustande beträchtlichen elektrischen Feldern unterwerfen und so den „inversen" elektrischen Effekt untersuchen.

Die ersten Versuche an den *D*-Linien des Na-Dampfes schlugen fehl, d. h. sie zeigten, daß jedenfalls in Feldern von 27000 Volt/cm keine Änderung der *D*-Linien von 0,1 Å auftrat[2]). Versuche von Paschen und Gerlach[3]) an der Absorptionslinie 2537 des Hg mit noch empfindlicheren Apparaten, sowie von Mendenhall und Wood[4]) an verschiedenen scharfen Absorptionslinien fester Körper ließen ebenfalls keinen Einfluß der angewandten elektrischen Felder erkennen. Erst bei Erreichung einer Feldstärke von über 100000 Volt/cm und bei Benutzung einer großen Lummerschen Interferenzplatte als Spektralapparat wurde an den *D*-Linien ein positives Ergebnis erzielt: hierüber ist in einer vor-

[1]) Die wesentlichsten Ergebnisse dieser Arbeit wurden auf der Sitzung des Gauvereins Niedersachsen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Braunschweig am 10. Februar 1924 vorgetragen.

[2]) R. Ladenburg, Schles. Ges. f. vaterl. Kultur, Breslau: Sitzungsbericht vom 24. Februar 1914.

[3]) Phys. ZS. **15**, 489, 1914.

[4]) Phil. Mag. (6) **30**, 316, 1915.

läufigen Mitteilung bereits kurz berichtet worden [1]). Der grundsätzliche Unterschied gegenüber den anderweitigen Untersuchungen des Starkeffekts besteht darin, daß diese ausschließlich an elektrisch erregten leuchtenden Gasen, in erster Linie an Kanalstrahlen angestellt wurden, also an angeregten, speziell schnell bewegten, Atomen, während es sich hier um unerregten Dampf handelt. Die Versuche sind nunmehr mit verbesserten Hilfsmitteln dank der Unterstützung durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und durch die Helmholtzgesellschaft fortgeführt worden.

Die verwendete Lummer-Gehrcke-Platte [2]) hat eine Länge von 30 cm, eine Dicke von 1,031 cm, einen Brechungsquotienten von $n = 1{,}574$ für $\lambda = 5890$ Å; hieraus berechnet sich ihr Auflösungsvermögen im Gelb zu 785 000 ($\delta\lambda = 0{,}0075$ Å), das Dispersionsgebiet, d. h. der Abstand benachbarter Ordnungen, beträgt dabei jedoch nur [3]) 0,133 Å.

Deshalb mußten als kontinuierlicher Untergrund für die Absorptionslinien helle D-Linien von etwa 0,1 Å Breite ohne Selbstumkehr verwendet werden, die im Interferenzapparat relativ breite Maxima liefern. Bringt man zwischen diese „Lichtquelle" und den Spektralapparat ein kurzes evakuiertes Rohr mit schwach erhitztem Na-Dampf, so treten in den Maxima mehr oder weniger feine Absorptionslinien auf. Indem man im Innern des Absorptionsrohrs zwei einander dicht gegenüberstehende Kondensatorplatten anbringt und sie auf eine hohe Potentialdifferenz auflädt, kann man im Na-Dampf ein elektrisches Feld bis 160 000 Volt/cm erreichen und seine Einwirkung auf die Absorptionslinien untersuchen.

Die Lichtquelle. Die von R. J. Strutt [4]) beschriebene Na-Vakuumbogenlampe zeigte auch bei Anwendung des Hilfsmagnets, der die Entladung an die Rohrwand drückt, etwas Selbstumkehr — wie übrigens der Verfasser selber bemerkt hat —, so daß sie für den beabsichtigten Zweck unbrauchbar war. Denn auch eine geringe Selbstumkehr lagert sich gerade über die zu untersuchenden Absorptionslinien und stört die Einzelheiten bei deren elektrischer Beeinflussung. Geeignete D-Linien lieferte dagegen eine mit hochtransformiertem Wechselstrom betriebene, vertikal stehende Quarzkapillare von etwa 2 mm Durchmesser (vgl. Fig. 1). Sie verbindet zwei kugelförmige Gefäße, in die die beiden Elektroden

---

[1]) Phys. ZS. **22**, 549, 1921.

[2]) Vgl. die in der Breslauer Dissertation von Erich Geissler (1919) angegebenen Daten.

[3]) Geprüft mittels des normalen Zeemaneffekts an der scharfen Neonlinie 5853 Å.

[4]) Proc. Roy. Soc. (A) **96**, 275, 1919.

von oben und unten ein wenig hineinragen. In einem Ansatzrohr befindet sich vorgereinigtes „Rohnatrium“ [1]), aus dem ein Tropfen metallisch reinen Natriums an das eine Ende der vollständig evakuierten Kapillare gebracht wird. Nach mehrfachem Erhitzen der Kapillare zum Austreiben des Wasserstoffs läßt man reines He-Ne-Gemisch von einigen Millimetern Druck einströmen [2]). Bei steigender Erregung der Röhre entwickelt sich durch die Stromwärme allmählich Na-Dampf in der Kapillare, dessen gelbes Licht das rote Ne-Licht schließlich ganz verdrängt. Im Spektrum verblassen die He-Ne-Linien zugunsten der *D*-Linien dank der geringeren Anregungsspannung des Natriums, und es verbleiben bei geeigneten Stromverhältnissen (2 bis 3 Amp. des primären Wechselstroms von 500 Perioden, 50 bis 80 Milliamp. Effektivstromstärke in der Lampe) im Gelb neben der zur Justierung dienenden D_3-Linie nur die hellen *D*-Linien geeigneter Breite, die auch bei der hohen Auflösung der Lummerplatte völlig frei von Selbstumkehr sind [3]). Je nach der Belastung nehmen die Maxima das halbe Dispersionsgebiet der Interferenzerscheinung oder mehr ein. Man kann auch den Na-Dampf durch Heizen der Kapillare in einem elektrischen Ofen erzeugen, doch ist obige Erregungsart vorzuziehen. Die Stärke der Erregung und die Helligkeit der Lampe sind dadurch begrenzt, daß bei allzu starkem Strom die Interferenzen verschwimmen oder Selbstumkehr in den *D*-Linien auftritt. Die Röhre und die Elektroden werden durch die Entladung beträchtlich erhitzt, letztere bestehen deshalb aus ziemlich langen Eisenstäben, deren äußere Enden mit Siegellack eingekittet und mit Wasser gekühlt werden. Da Eisen allzusehr zerstäubt, sind

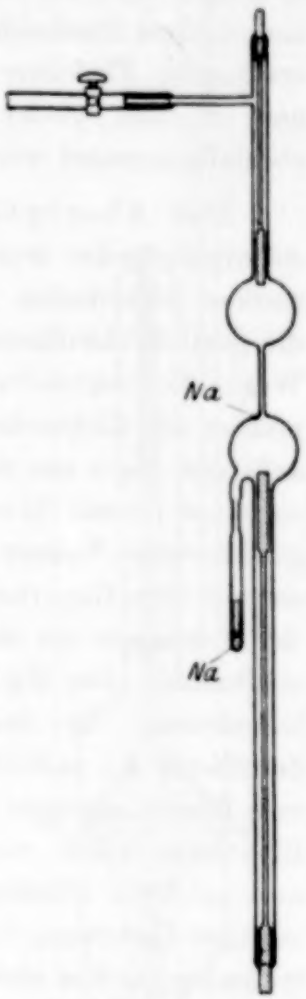


Fig. 1. Na-Lampe.

[1]) Vgl. L. Dunoyer, Le Radium **9**, 177, 1912; R. Minkowski, Ann. d. Phys. (4) **66**, 214, 1921.

[2]) Der Firma Linde-Höllriegelskeuth möchte ich auch an dieser Stelle für die kostenlose Lieferung der erforderlichen Gasmengen aufrichtigen Dank aussprechen.

[3]) Die Lampe hat sich auch als besonders geeignet zur Erregung von Resonanzstrahlung in dünnem Na-Dampf erwiesen.

innen als eigentliche Elektroden kurze Aluminiumstäbe angesetzt, die die Öffnung der kugelförmigen Gefäße nahezu völlig abschließen. Unter Innehaltung der genannten Vorsichtsmaßregeln kann die Lampe stundenlang brennen und häufig von neuem benutzt werden[1]). Nach langem Gebrauch wird die Kapillare durch den Na-Dampf allmählich gebräunt und weniger durchsichtig. Nach vorsichtiger Reinigung mit Alkohol und verdünnter Flußsäure wird sie in der Gebläseflamme durchgeschweißt und ist dann wieder gebrauchsfähig. Das Rohnatrium muß natürlich ebenfalls erneuert werden.

Das Absorptionsrohr. Das Hauptaugenmerk beim Bau des Absorptionsrohrs wurde naturgemäß auf die Erzielung eines möglichst starken elektrischen Feldes gerichtet; außerdem sollte sich möglichst die gesamte absorbierende Dampfschicht im gleichmäßigen Felde befinden. Wegen der elektrischen Leitfähigkeit des Glases bei höheren Temperaturen mußten die Elektrodeneinschmelzstellen außerhalb des Ofens verbleiben; außerdem ragte aus dem Ofen das dünne Verbindungsrohr zum Pumpenaggregat heraus (Gaedesche rotierende Vor- und Hg-Pumpe mit angeschlossener Volmer-K-Pumpe), um die bei Erwärmung meist wieder entwickelten Gase (hauptsächlich Wasserstoff) fortzupumpen und während der Messungen ein möglichst gutes Vakuum, unter 10^{-5} mm, aufrechtzuerhalten. Der Hg-Dampf wurde in üblicher Weise mit flüssiger Luft ausgefroren. Bei den letzten Versuchsreihen erwies sich das vielfach destillierte Na endlich so frei von Gasverunreinigungen, daß das Rohr vom Pumpenaggregat abgesperrt erhitzt und benutzt werden konnte. Die Elektroden selbst waren starke Nickelhalbkugeln mit ebengeschliffenen und polierten Flächen. Diese standen einander parallel in möglichst geringer Entfernung[2]) gegenüber und waren wegen der zwischen ihnen auftretenden starken elektrostatischen Anziehungskräfte besonders stabil befestigt. Die Halbkugeln und die Zuführungsstäbe waren gleichmäßig eng mit einem Glasschutzrohr umgeben, das seinerseits gerade in das zu evakuierende Rohr hineinpaßte (vgl. Fig. 2), um die Ausbildung eines Kathodendunkelraumes und das Einsetzen der Entladung nach Möglichkeit zu verhindern. Nur dadurch konnten Spannungen bis 20000 Volt und darüber angelegt und Felder bis 160000 Volt/cm erreicht werden.

[1]) Die bei den endgültigen Messungen benutzte Lampe hat über 20 Versuchsreihen, bei denen sie meist mehrere Stunden lang brannte, ohne Reinigung durchgehalten.

[2]) Bei den verschiedenen Röhren variierte der Plattenabstand zwischen 1 und 2 mm.

Damit die Spannung führenden Teile nirgends die zu erhitzenden Glasteile berühren und dadurch ein Überkriechen der Spannung ermöglichen, waren sie an den kritischen Stellen mit Röhrchen aus amorphem Quarz isoliert. Fig. 2 stellt eine der zu den endgültigen Messungen verwendeten Röhren dar. Sie ist aus Gundelachglas hergestellt[1]), der weite Teil an den Stellen *D* besonders gut durchsichtig ausgesucht, so daß man durch ihn hindurchblickend Schrift lesen kann; denn an diesen Stellen muß das Licht der Kapillare durch den engen Schlitz zwischen den Kondensatorplatten auf den Spalt des Spektralapparats abgebildet werden (vgl. auch Fig. 4). Der Plattenabstand wurde vor dem Füllen des Rohrs mit Na, aber im elektrisch geheizten Ofen durch dessen ebene Fenster hindurch auf der Teilmaschine ausgemessen; dadurch konnte auch die kleine Korrektion infolge der verschiedenen Ausdehnung des Glases und der aus Nickel gefertigten Elektroden und Zuleitungsstäbe berücksichtigt werden. Der mittlere Plattenabstand ergab sich bei diesem Rohr zu $1{,}30 \pm 0{,}01$ mm. Der Plattendurchmesser betrug 28 mm, die lichte Weite des äußeren Rohrs 33,5 mm, so daß sich eine Na-Dampfschicht von 5,5 mm außerhalb des gleichmäßigen elektrischen Feldes befand. In das eine Ansatzrohr wurde wieder nach Dunoyer-Vorschrift bei etwa 350° vorgereinigtes Rohnatrium im Glasröhrchen eingeführt und reinstes Na im hohen Vakuum bei unter 250° in das Versuchsrohr überdestilliert. Es erwies sich als nützlich, bei den eigentlichen Messungen zwei getrennte Öfen zu verwenden, von denen einer (2) das Ansatzrohr mit Na, der andere (1) den Rohrteil mit den elektrisch geladenen Platten und dem untersuchten Na-Dampf heizte; dadurch konnte nach jeder Versuchsreihe

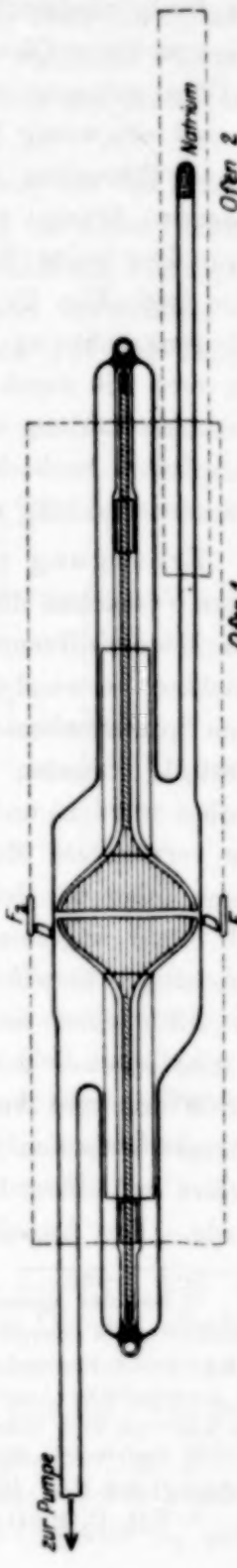


Fig. 2. Absorptionsrohr mit Elektroden.

[1]) Ich möchte der Firma Gundelach-Gehlberg für die kostenlose Überlassung ausgesuchter Glasröhren auch an dieser Stelle bestens danken.

durch Ausschalten des einen Ofens das Na wieder im Ansatzrohr kondensiert werden, ohne daß es sich an den Wänden des weiter erhitzten Hauptteils niederschlug. Das Ende des hinteren engen Ofens 2 ragte in den weiteren Ofen 1 hinein, damit sich das Na nicht an der Stelle, wo die Öfen zusammenstießen, kondensierte. Bei den Versuchen destillierte dauernd ein wenig Na [1]) durch das Absorptionsrohr hindurch in den zur Pumpe führenden Ansatz, dagegen drang infolge der gut ineinander passenden Quarz- und Glasröhren nur wenig Na in die Elektrodenansätze. Der weite Ofen trug, entsprechend den Stellen *D* des Absorptionsrohrs (vgl. Fig. 2), zwei einander gegenüberliegende ebene Glasfenster und senkrecht zu ihrer Verbindungsrichtung ein drittes Fenster, um von oben die durch die hellen *D*-Linien der Na-Lampe intensiv erregte Resonanzstrahlung senkrecht zum erregenden Licht zwischen den Kondensatorplatten beobachten und den Einfluß des elektrischen Feldes auf die Resonanzstrahlung untersuchen zu können [2]).

Erzeugung und Messung des elektrischen Feldes. Bei den ersten Versuchen diente zur Erzeugung der Hochspannung eine Wehrsen-„Starkstrominfluenzmaschine", später wurde eine 20plattige Leunersche Maschine verwendet. Die Spannung wurde in üblicher Weise durch einen Spitzennebenschluß [3]) reguliert (je 10 feine Platinspitzen, gemeinsam befestigt, konnten im geschlossenen Rohr gegeneinander meßbar verschoben werden) und mit einem Elektrometer nach C. Müller [1]) gemessen. Das verwendete Meßinstrument war dem Original nachgebildet, erhielt jedoch außer der Zeigerablesung einen Spiegel, so daß meist mit Fernrohr und Skale abgelesen wurde. Das Instrument bewährte sich in jeder Beziehung. Es wurde zunächst mit paralleler Funkenstrecke geeicht, später mit Hilfe eines hochohmigen Flüssigkeitswiderstandes — Jodcadmium in Amylalkohol mit Zusatz von Äthylalkohol und Cadmiumelektroden. Der Widerstand von $1{,}1 \cdot 10^8$ Ohm bei 0^0 erwies sich bis auf $^1/_2$ Proz. konstant zwischen 100 und 10000 Volt angelegter Spannung —, wobei letztere mit einem Braunschen Voltmeter von Bühler-Tübingen gemessen wurde. Die Ausschläge des Hochspannungselektrometers waren im be-

---

[1]) Bei der Beobachtungstemperatur von 160 bis 180^0 beträgt der Druck des gesättigten Na-Dampfes 1 bis 4 10^{-5} mm, extrapoliert aus der von Ladenburg-Minkowski angegebenen Dampfdruckformel (ZS. f. Phys. **6**, 162, 1921). Da bei der verwendeten Anordnung der Na-Dampf ungesättigt durch das Versuchsrohr in den kälteren Teil überdestilliert, ist der wirkliche Dampfdruck wohl noch geringer.

[2]) Vgl. vorläufige Mitteilung über den elektrischen Effekt an der Resonanzstrahlung des Na. Die Naturwissenschaften **12**, 414, 1924.

[3]) Vgl. C. Müller, Ann. d. Phys. **28**, 585, 1909. Dissertation, Berlin 1909.

nutzten Meßbereich (4000 bis 40000 Volt) dem Quadrat der Spannung proportional, die Meßgenauigkeit betrug etwa 2 Proz. Bei Anlegen der Spannung an den Kondensator des Absorptionsrohrs sank die Spannung meist etwas, blieb aber dann konstant, so daß die wirksame Feldstärke auf etwa 2 Proz. gemessen werden konnte. Der durch das Absorptionsrohr fließende Strom schwankte zwischen 1 und $6 \cdot 10^{-5}$ A. Bisweilen traten im Absorptionsrohr grüne Fluoreszenzflecke auf, die das Einsetzen eines Entladungsstoßes anzeigten. Zur Herabsetzung des dabei fließenden Stromes, der in einem Falle das Rohr durchschlug, wurde ein Flüssigkeitswiderstand von $4 \cdot 10^8$ Ohm eingeschaltet. Die dabei verwendete elektrische Schaltung zeigt Fig. 3. Der nicht geerdete Pol der Influenz-

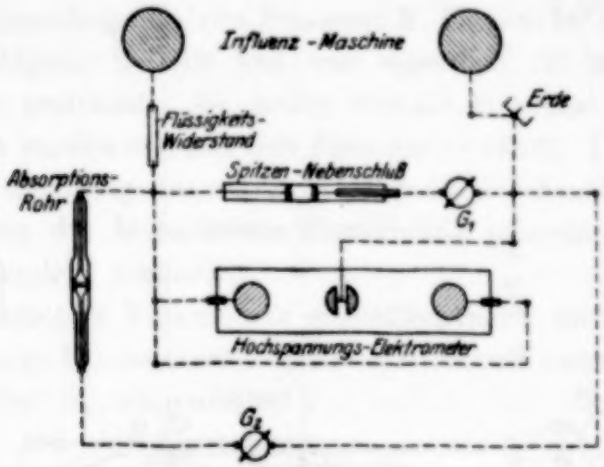


Fig. 3. Schaltungsskizze.

maschine ist fest mit dem Flüssigkeitswiderstand W verbunden; hinter ihm kann sich der Strom verzweigen und zum Teil durch den Spitzennebenschluß SN und das Galvanometer G_1, zum Teil durch das Absorptionsrohr und das Galvanometer G_2 zur Erde fließen. Durch Zusammenschieben des SN kann die am Absorptionsrohr liegende Spannung vom höchstmöglichen Wert an beliebig verkleinert werden.

Die optische Anordnung geht aus Fig. 4a und b hervor. Das Licht der senkrecht stehenden Kapillare der Na-Lampe, wird durch das achromatische Objektiv L_1 auf das Fenster des Ofens 1 abgebildet, durchsetzt dann den engen Spalt zwischen den Kondensatorplatten, und zwar durch Blenden begrenzt nur den mittleren Teil, in dem die Dampfschicht zwischen den Platten möglichst lang im Vergleich zu der nicht vom Feld beeinflußten Dampfschicht zwischen Platten und Glaswand ist, und wird durch das nach Höhe und Seite fein verstellbare Objektiv L_2 auf den

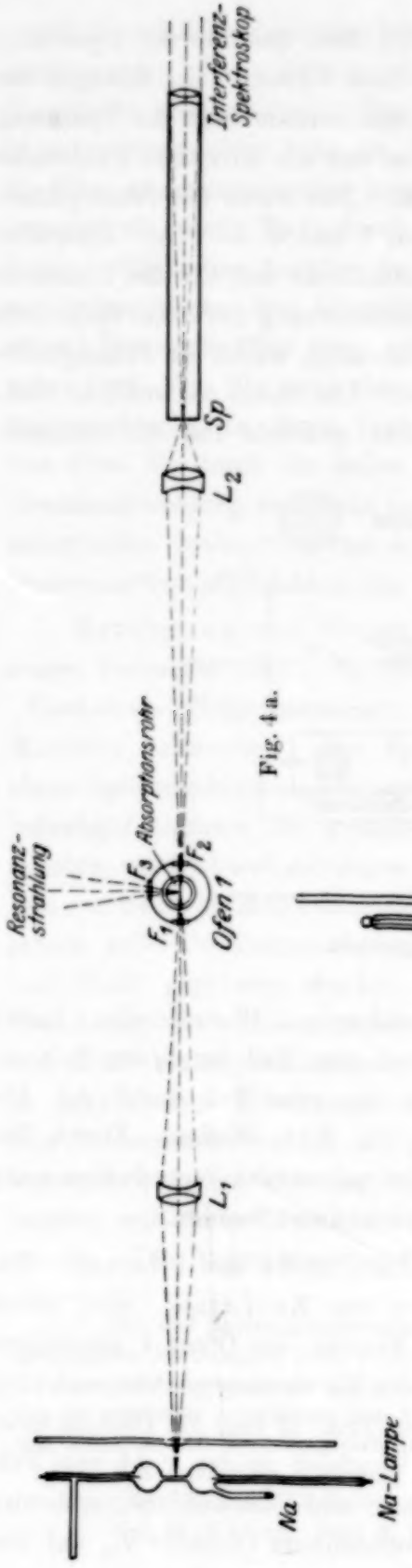

Interferenz-Spektroskop
Sp
L_2
Absorptionsrohr
Resonanz-strahlung
F_3
F_2
F_1
Ofen 1
L_1
Na
Na-Lampe

Fig. 4a.

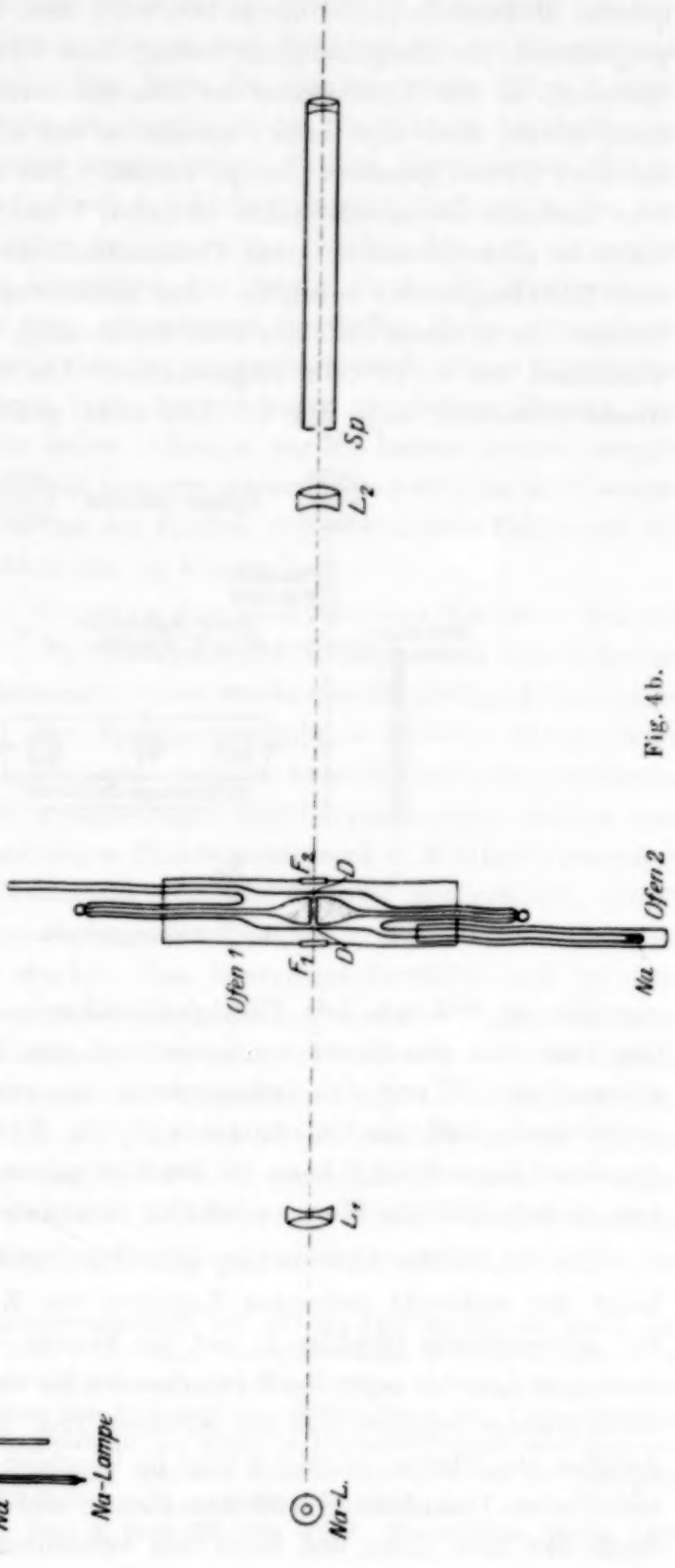

Sp
L_2
F_2
D
Ofen 1
F_1
D
Ofen 2
Na
L_1
Na-L.

Fig. 4b.

Spalt *Sp* des Lummer-Gehrcke-Interferenzspektroskops als kleiner schmaler Lichtfleck abgebildet. Dieses Spektroskop ist mit einem großen, die *D*-Linien gut trennenden Rutherfordprisma und der oben beschriebenen Lummer-Gehrcke-Platte ausgerüstet.

Die beschriebene Anordnung erlaubt natürlich nur den „transversalen" elektrischen Effekt zu untersuchen.

Da für längere Expositionszeiten weder die Intensitätsverteilung der Interferenzmaxima und -minima noch die Stärke des elektrischen Feldes genügend konstant waren, konnten die untersuchten Erscheinungen nicht photographiert, sondern mußten subjektiv mit dem Auge beobachtet werden. Zu den Messungen diente neben einem Okularmikrometer ein Zeissscher Zeichenapparat; er wurde vom pflanzenbiologischen Institut durch das Entgegenkommen von Professor F. Rosen in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt und war eigentlich für mikroskopische Untersuchungen bestimmt. Er mußte deshalb erst dem Spektroskopokular angepaßt werden und hat sich dann gut bewährt. Durch geeignet abgestimmte Beleuchtung des vertikal stehenden Zeichenblattes konnten viele Einzelheiten der beobachteten Erscheinung quantitativ mit einiger Genauigkeit festgelegt werden.

Von wesentlichem Nutzen war schließlich noch ein Satz aus vier totalreflektierenden Prismen, der mit einem Handgriff zwischen die Linse L_1 und den Ofen O_1 eingeschaltet werden konnte und das Licht der Lampe auf dem gebrochenen Wege 1 — 2 — 3 — 4 (Fig. 5) um das Absorptionsrohr herumleitete. So konnte man sich jederzeit überzeugen, ob die *D*-Linien der Lampe etwa Selbstumkehr zeigten, und konnte die Interferenzminima von den häufig ebenso breiten Absorptionslinien des absorbierenden Dampfes des Absorptionsrohrs unterscheiden. Dies war besonders anfänglich wertvoll, als man alle Versuchsbedingungen noch nicht völlig beherrschte.

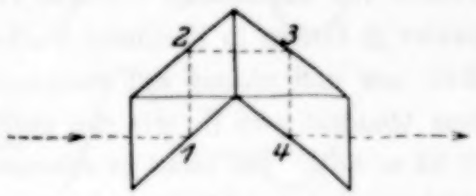


Fig. 5.

Mittels eines einfachen Handgriffes konnte vom Beobachtungsplatz am Okular aus die Hochspannung mit der einen Kondensatorplatte des Absorptionsrohrs in Verbindung gebracht und dadurch während der Beobachtung das elektrische Feld an- und abgeschaltet werden.

Aussehen der Erscheinung und Ergebnisse. Infolge der hinreichenden Auflösung des vorzerlegenden Prismas und dank den günstigen Dimensionen der Platte lagen die Interferenzen von D_1 und D_2 — je 3

bis 4 Maxima und Minima — bei mäßig engem Spalt des Kollimators getrennt dicht nebeneinander und konnten gleichzeitig, bzw. unmittelbar nebeneinander beobachtet werden[1]). Die relative Breite der Maxima und Minima hängt von den Erregungsbedingungen der Lampe ab, sie konnte, wie gesagt, nur eine beschränkte Zeit, die zur subjektiven Beobachtung, aber nicht zur photographischen Fixierung ausreichte, konstant gehalten werden. Sie beeinflußt zugleich naturgemäß die Sichtbarkeit und die scheinbare Breite der Absorptionslinien, die außerdem durch die Temperatur des Absorptionsrohrs wesentlich bedingt werden. Bei 150 bis 160° C ist die D_2-Linie als feine, etwa $^1/_{100}$ Å breite dunkle Linie in der Mitte der Maxima sichtbar, die D_1-Linie erscheint infolge ihrer geringeren Stärke erst bei höheren Temperaturen, bei denen zugleich die D_2-Linie merklich breiter ist. Je nach den Verhältnissen der Lampe und des Absorptionsrohrs können die Absorptionslinien schmaler und weniger dunkel oder breiter und schwärzer als die Minima erscheinen. Die Figuren 6 a, b, c geben charakteristische Bilder der Erscheinung, die nach den Messungen mit dem Zeichenapparat und dem Okularmikrometer angefertigt sind; die durch die Ordinatenhöhe gekennzeichneten Helligkeitsverhältnisse, von denen die Größe des elektrischen Effekts nur sekundär abhängt, sind lediglich geschätzt.

Bei Anlegen der Hochspannung und Erregung eines elektrischen Feldes von mindestens 100000 Volt/cm tritt eine deutliche Verschiebung beider D-Linien in Richtung wachsender Interferenzordnungen, d. h. nach Rot, auf und nimmt mit steigender Feldstärke $\mathfrak{F}$ rasch zu [proportional dem Quadrat von $\mathfrak{F}$, wie die unten angegebenen Messungen zeigen (vgl. S. 62 u. 63)]. Bei nicht zu schmalen Absorptionslinien und mittleren Feldstärken wird der Effekt dadurch besonders deutlich, daß der violette Teil der Maxima breiter und heller, der rote Teil schmaler und dunkler wird. Bei genügend hoher Feldstärke (über 150000 Volt/cm) rückt die D_2-Linie bis an das anschließende Minimum, so daß dieses mit der Absorptionslinie zu breiten dunklen Streifen verschmilzt und die schmalen, übrigbleibenden violetten Teile der Maxima hell hervortreten (Fig. 6 c). Diese Erscheinungen kommen folgendermaßen zustande: auch außerhalb der eigentlichen, als dunkle Linien sichtbaren Absorptionslinien erleiden die Maxima eine Schwächung durch den absorbierenden Na-Dampf, da die Absorptionslinien eine gewisse Intensitätsverteilung besitzen; dabei mag diese zum Teil der natürlichen Linienbreite entstammen, zum Teil von

[1]) Die Helligkeit von D_1 war nicht viel geringer als die von D_2.

der begrenzten Auflösungskraft der Lummerplatte herrühren. Auch die schwach absorbierenden Ränder der Absorptionslinien werden natürlich durch das elektrische Feld beeinflußt, und durch ihre Rotverschiebung wird der violette, ursprünglich geschwächte Teil des Maximums aufgehellt.

Besonders an der breiteren Absorptionslinie D_2 beobachtet man fernerhin, daß sie nicht als Ganzes gleichmäßig zur Seite rückt, sondern daß die Linie bei Anlegen der Spannung etwas breiter, und daß besonders ihr violetter Rand unschärfer und weniger dunkel wird und sich nicht so deutlich verschiebt wie der rote Rand. Dies kann zum Teil in einem nebensächlichen Umstand, der Inhomogenität des Feldes begründet sein: die wenn auch relativ kurze Na-Dampfschicht vor und hinter den Platten (je 2,7 mm gegen 28 mm des Plattendurchmessers, vgl. Fig. 2 u. S. 55) wird wenig oder gar nicht vom Feld beeinflußt [1]) und ruft deshalb stets eine freilich nur schwache Absorption im Schwerpunkt der unverschobenen D-Linien, also in der Mitte der Maxima, hervor. Die Hauptursache der beschriebenen Beobachtung an D_2 beruht aber auf der durch das Feld erzeugten Polarisation, nämlich darauf, daß die parallel und die senkrecht

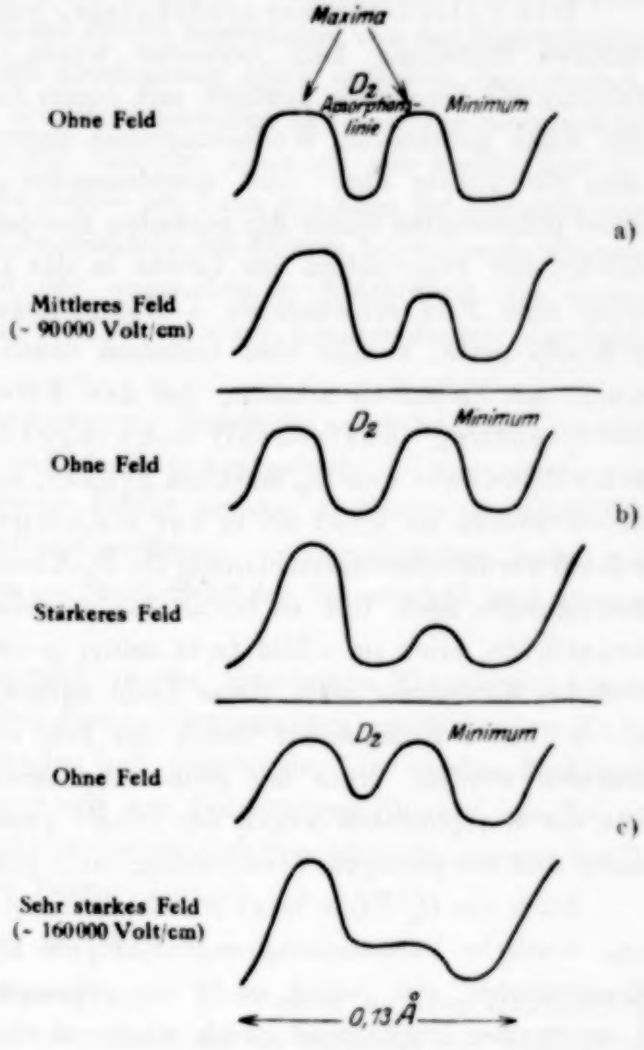


Fig. 6.

Schematische Zeichnung der Interferenzen der D_2-Absorptionslinie ohne und mit elektrischem Feld.

[1]) Außerdem wird das Feld an den Plattenrändern schwächer als mitten zwischen den Platten sein.

zum Feld schwingenden (p- und s-)Komponenten des durchgehenden Lichts von dem Felde verschieden stark beeinflußt werden.

Die Polarisationsverhältnisse, von denen bereits in der vorläufigen Mitteilung kurz berichtet wurde, konnten außer mit einem Okularnicol besonders deutlich mit einem lichtstarken, unmittelbar vor das Auge gebrachten Wollastonprisma untersucht werden. Man sieht dann gleichzeitig über- oder nebeneinander die beiden senkrecht zueinander polarisierten Bilder der gesamten Erscheinung an beiden D-Linien [1]). Infolge der Polarisation des Lichts in der Lummerplatte war die senkrecht zum Feld schwingende s-Komponente merklich dunkler als die p-Komponente, konnte aber trotzdem deutlich beobachtet werden. So wurde mit Sicherheit erkannt, daß der Effekt in dem parallel zur Feldrichtung (horizontal) schwingenden Licht, d. h. in der p-Komponente von D_2, merklich größer, schätzungsweise doppelt bis dreimal so groß als in der s-Komponente war. Während im p-Bilde der Interferenzerscheinung die D_2-Absorptionslinie unter geeigneten Bedingungen nach Rot zu bis an das anschließende Interferenzminimum heranrückte, blieb im s-Bild trotz seiner geringeren Helligkeit vom roten Teil des Maximums noch etwas Licht zurück. Ob mehrere oder nur je eine p- und s-Komponente durch das Feld entstehen, konnte nicht entschieden werden; trotz der großen Auflösung ($\delta\lambda = 0{,}0075$ Å) hätte man die Komponenten wegen der relativ großen Breite der Absorptionslinien und der geringen Verschiebung nicht getrennt wahrnehmen können.

Auch die D_1-Linie zeigt sowohl in der p- wie in der s-Komponente eine deutliche Verschiebung nach Rot; ein Unterschied zwischen beiden Komponenten war jedoch nicht zu erkennen, vielmehr werden beide Komponenten anscheinend gleich stark und ebenso weit wie die p-Komponente von D_2 nach Rot verschoben.

Die absolute Größe des Effekts ist nach dem Vorangehenden nur im polarisierten Licht bzw. an den Rändern der Absorptionslinien einwandfrei zu bestimmen. Die Verschiebung des roten Randes der D_2-Linie konnte (ohne Polarisator sowohl als an der p-Komponente) besonders bei den höheren Feldstärken einigermaßen genau gemessen werden. Bei Veränderung der Feldstärke von 95000 auf 160000 Volt/cm änderte sich die Verschiebung — im Mittel einer großen Zahl von

[1]) Durch geeignete Wahl der Blende vor dem Absorptionsrohr kann man die Erscheinungen in der Höhe derart begrenzen, daß die beiden Bilder übereinander ohne Trennungslinie gerade aneinanderstoßen, so daß man sie gegeneinander nach Lage und Helligkeit photometrieren kann.

Messungen — von $0{,}009 \pm 0{,}002$ Å auf $0{,}025 \pm 0{,}003$ Å, die Verschiebung wächst also wesentlich schneller als die Feldstärke, und zwar mit guter Annäherung proportional dem Quadrat der Feldstärke[1]). Auch zeigte sich der Effekt unabhängig von der Richtung des elektrischen Feldes, d. h. die Erscheinung blieb natürlich unverändert, wenn man das Vorzeichen der Hochspannung bei gleichem Absolutwert und bei geerdetem zweiten Pol änderte; denn ob die rechte oder die linke Platte positiv gegen die andere ist, kann den Sinn der Verschiebung nicht ändern. Wegen der Unsymmetrie des Effekts folgt bereits hieraus, daß der Effekt nicht wie der symmetrische Starkeffekt der ersten Potenz der Feldstärke, sondern daß er einer geraden Potenz der Feldstärke proportional ist[2]).

Theoretische Überlegungen. Durch die beschriebenen Versuche ist experimentell erwiesen, daß der hier beobachtete — unsymmetrische und quadratische — elektrische Effekt an den D-Linien grundsätzlich verschieden ist von dem sehr viel größeren — symmetrischen, linear mit der Feldstärke anwachsenden — Starkeffekt der Wasserstoff- und wasserstoffähnlichen Linien.

Während dieser bekanntlich in der klassischen Theorie der quasielastisch gebundenen und bei ihren Schwingungen emittierenden Elektronen keine Erklärung gefunden hat, stimmt der hier an den D-Linien beobachtete Effekt weitgehend mit den Folgerungen überein, die Voigt bereits vor 20 Jahren aus der klassischen Elektronentheorie gezogen hat[3]). Indem er das quasielastische Potential durch den Ansatz

$$\varphi = \tfrac{1}{2} k \mathfrak{r}^2 + \tfrac{1}{4} k' \mathfrak{r}^4$$

erweiterte, fand er als Wirkung einer konstanten äußeren elektrischen Kraft auf die Schwingungen, und damit auf die Emission und Absorption der Elektronen eine sehr geringe, dem Quadrat der Feldstärke proportionale Frequenzänderung, und zwar erwartete er bei Beobachtung senkrecht zur Feldrichtung eine Aufspaltung in eine äußerst gering nach Rot verschobene s-Komponente und eine dreimal so stark und gleichsinnig

---

[1]) Dies Ergebnis findet sich bereits in der ersten Mitteilung, dort ist eine Verschiebung um nur 0,02 Å bei 160000 Volt/cm angegeben; damals war die Spannungs- und Feldmessung noch weniger genau, wie dort bereits erwähnt wurde.

[2]) Hierauf sowohl als auf die quantentheoretische Deutung der Erscheinung nach Kramers (vgl. unten) machte bei der ersten Diskussion bereits Herr Schrödinger aufmerksam.

[3]) W. Voigt, Ann. d. Phys. **4**, 197, 1901; Magneto- u. Elektrooptik, Leipzig 1908, S. 356 ff. u. 378 ff.

verschobene p-Komponente. Die absolute Größe des Effekts war wegen der Unkenntnis des neueingeführten Koeffizienten k' nicht genau vorauszusagen; bei Verwertung der Größe der elektrischen Doppelbrechung an Schwefelkohlenstoff errechnete Voigt eine Verschiebung der D-Linien von etwa 0,03 Å in einem Feld von 150000 Volt/cm — also gerade in der hier beobachteten Größenordnung. Voigts Versuche an leuchtendem Na-Dampf zum Nachweis dieses Effekts schlugen, wie er schreibt, fehl, da die erreichbaren elektrischen Feldstärken viel zu klein waren.

Die Bohrsche Quantentheorie andererseits liefert bekanntlich nicht nur die genaue Beschreibung aller Einzelheiten des Starkeffekts an den Wasserstofflinien und denen des ionisierten Heliums, sondern gibt auch eine ungezwungene Deutung der wesentlich geringeren und anders gearteten Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes auf wasserstoffunähnliche Linien. Hierauf hat Bohr bereits in einer seiner ersten Abhandlungen aufmerksam gemacht [1]).

Im Wasserstoffatom ist nämlich die Bahn des den isolierten Kern umlaufenden Elektrons ohne äußeres Feld nicht vollständig festgelegt, und daher ist jede elliptische Bahn stationär (entartetes System!). Infolgedessen ändert ein äußeres elektrisches Feld die Bahn vollständig ab und übt auf die Wasserstofflinien den gewaltigen Einfluß aus, den wir aus Starks berühmten Versuchen kennen. Voraussetzung hierfür ist, daß sich die auf das Elektron wirkenden Kräfte genau umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung vom Kern ändern. Diese Bedingung ist nicht mehr erfüllt, wenn das Atom außer dem betrachteten „Leuchtelektron" noch andere Elektronen enthält. Die Stärke der „Störung", die diese Elektronen auf die Bewegung des Leuchtelektrons ausüben, wird durch die Abweichung des zugehörigen Spektralterms vom entsprechenden Wasserstoffterm gemessen, also durch die Abweichung der Funktion $\Theta_r(n)$ von der Einheit, wenn man den Term durch den Ausdruck

$$\frac{R}{n^2} \cdot \Theta_r(n)$$

darstellt (R = Rydbergzahl). Man kann daher einen Starkeffekt von gleicher Größenordnung wie beim Wasserstoffatom nur dann erwarten, wenn jene Abweichung sehr klein ist. Für die diffusen Serien des Heliums und Lithiums beträgt diese Abweichung bereits für $n = 5$ nur ein Tausendstel oder noch weniger. In der Tat fand Stark für die

[1]) N. Bohr, Phil. Mag. **27**, 506, 1914, speziell S. 517/518; **30**, 408, 1915; s. auch Abhandlungen über Atombau, Braunschweig 1921, S. 86 u. 116.

Linien dieser Serien einen Effekt, der dem an den Wasserstofflinien und den Funkenlinien des Heliums am nächsten kommt, und je mehr die Funktion $\Theta(n)$ des durch das Feld vornehmlich beeinflußten Terms einer Linie von der Einheit abweicht, um so geringer ist der beobachtete Starkeffekt.

Eine genauere Berechnung der Einwirkung eines elektrischen Feldes auf wasserstoffunähnliche Linien wird durch die Überlegung ermöglicht[1]), daß man nach Sommerfeld die störende Wirkung der inneren Elektronen auf die Bewegung des Leuchtelektrons in gewisser Annäherung durch eine kleine Zentralkraft beschreiben kann, die zur Coulombschen Anziehungskraft des Kerns hinzutritt und sich rascher als mit der zweiten Potenz der Entfernung vom Kern ändert — ähnlich wie der Einfluß der von der Relativitätstheorie geforderten Veränderlichkeit der Elektronenmasse beim Wasserstoffatom durch ein störendes Zentralfeld beschrieben werden kann, und für diesen Fall hat Kramers die Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes berechnet[1]). Allerdings ist, wie Kramers hervorhebt, dieser Vergleich mit der elektrischen Beeinflussung der Feinstrukturkomponenten der Wasserstofflinien nur als eine unvollkommene Analogie anzusehen. R. Becker[2]) hat dann, veranlaßt durch die Beobachtungen des Verf. an den D-Linien, diese Rechnung für den Fall der Alkaliatome durchgeführt und, abgesehen von den Polarisationsverhältnissen, eine leidliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erhalten. Vor allem ergibt sich, daß der Einfluß des äußeren Feldes in einer Verschiebung der Spektrallinien besteht, die nicht der Feldstärke selbst, sondern der zweiten Potenz der Feldstärke proportional wächst, wenigstens solange sie klein im Vergleich zur Störungskraft der inneren Elektronen ist. Denn infolge dieser Störungen tritt bekanntlich in erster Annäherung eine Rotation der großen Achse der Ellipse, eine Periheldrehung auf, so daß der Abstand des Elektrons von der durch den Kern senkrecht zum Feld gelegten Ebene im zeitlichen Mittel $(\bar{z})$ 0 ist und daher auch die durch das Feld erzeugte Energieänderung $Fe\bar{z}$ in erster Annäherung verschwindet. Daher tritt der an Wasserstofflinien bekannte lineare Starkeffekt hier nicht auf. Die rosettenähnliche Bahn des Leuchtelektrons wird aber durch das Feld ein wenig deformiert, so daß $\bar{z}$ einen dem Feld proportionalen Wert erhält; die dadurch entstehende Änderung der Bahnenergie ist mithin proportional F^2 und ebenso nach der Bohrschen Frequenzbedingung die Änderung der Schwingungszahl der beim

[1]) H. A. Kramers, ZS. f. Phys. **3**, 199, 1920, speziell S. 223.
[2]) R. Becker, ebenda **9**, 333, 1922.

Übergang von einer so veränderten Bahn zu einer unbeeinflußten Bahn ausgesandten Spektrallinie.

Es ist verschiedentlich beobachtet worden, daß der elektrische Effekt auf wasserstoffunähnlichen Linien nicht genau der ersten Potenz proportional ist[1]), speziell an den Hauptserienlinien des He schließt Stark, daß die von Liebert[1]) beobachtete Verschiebung eine quadratische Funktion der Feldstärke sei[2]). Jedenfalls sind die hier an den D-Linien beobachteten Erscheinungen ein typisches Beispiel des reinen unsymmetrischen, quadratischen Effekts. In der Tat ist hier die Bedingung, daß das elektrische Feld klein gegen das der inneren Elektronen (der „Rumpfelektronen") ist, entschieden erfüllt. Denn selbst ein Feld von 160000 Volt/cm ruft nur eine Wellenlängenänderung von 0,025 Å hervor, während bereits der Unterschied, der von den verschiedenen Bahnstellungen des Leuchtelektrons herrührt und lediglich die Abweichung von der Zentralsymmetrie charakterisiert, dem Wellenlängenunterschied der D-Linien, das sind 6 Å, entspricht.

Was den beobachteten Unterschied in der Größe der Verschiebung der p- und s-Komponente betrifft, so kann man, wie Herr Reiche bemerkte, aus den Rechnungen Beckers bereits einen gewissen Hinweis dafür entnehmen. Dort ergibt sich nämlich für die räumliche Quantenzahl $n_3' = 2$ (die die Komponente des Impulsmomentes um die Feldrichtung festgelegt) der durch das Feld beeinflußten π-Bahn (Endbahn der Absorptionslinie) die Verschiebung $\Delta\lambda = 0$, während für $n_3' = 1$ $\Delta\lambda = 0{,}024$ Å bei 160000 Volt/cm folgt. Die Anfangsbahn der Absorptionslinie bleibt wegen der großen Wirkung der Rumpfelektronen durch das elektrische Feld praktisch ungestört, für diese σ-Bahn ist deshalb auch im elektrischen Feld $n_3'' = n_2'' = 1$. Nach der üblichen Auswahlregel der räumlichen Quantenzahl entspricht die Änderung $n_3' - n_3'' = \Delta n_3 = 0$ der p-Komponente — diese soll also nach der Theorie die relativ große Verschiebung zeigen ($n_3' = n_3'' = 1$), in Übereinstimmung mit dem Experiment; dagegen sollte $\Delta n_3 = 1$ der s-Komponente entsprechen, diese dürfte also nach der Beckerschen Rechnung

[1]) J. Stark, Ann. d. Phys. **48**, 217, 1915; Li-Linien 4147 ($2p - 5p$) (Verschiebung anfangs rascher als proportional F); H. Lüssem, Ann. d. Phys. **49**, 876, 1916 (Linien der scharfen Hauptserie des Li, Zerlegung anfangs proportional F, bei höheren Feldstärken langsamer!); G. Liebert, Ann. d. Phys. **56**, 592, 1918, Hauptserie von He I (Verschiebung rascher als proportional F); T. Takamine und N. Kokubu, Mem. Coll. of Sc. Kyoto III, Nr. 9, 1919 (Verschiebung an einigen Linien des sekundären Wasserstoffspektrums rascher als proportional F).

[2]) Ann. d. Phys. **56**, 587, Anm. [1]).

keine Verschiebung erleiden, während die Versuche eine deutliche, wenn auch wesentlich kleinere Verschiebung als die p-Komponente ergaben. Hierin zeigt sich die nicht ausreichende Annäherung der Rechnung. Die zentrale Störung der Rumpfelektronen ist dabei ja auch nur durch den Ansatz c_1/r^3 berücksichtigt, wobei die Konstante c_1 mit Hilfe des empirischen Terms bestimmt ist; mittels der Fuesschen Darstellung[1]) läßt sich heutzutage eine weit bessere Approximation erreichen[2]).

Vom Standpunkt der neuen quantentheoretischen Auffassung Bohrs[3]), die die von den Atomen ausgehende Strahlung „virtuellen" Oszillatoren zuschreibt, deren Eigenfrequenzen den möglichen Quantenübergängen des Atoms entsprechen, gewinnt die oben erwähnte klassische Rechnung Voigts vielleicht neue Bedeutung. Denn nach dieser Auffassung (l. c., S. 81) sollen sich auch die Eigenschaften der virtuellen Oszillatoren bei Einwirkung eines äußeren Feldes kontinuierlich ändern[4]). Aus der Voigtschen Rechnung kann man also entnehmen, daß man in diesem Falle jene Änderung nach der klassischen Theorie in erster Annäherung berechnen kann, wenn man annimmt, daß die den D-Linien korrespondierenden „virtuellen" Oszillatoren nicht rein quasielastisch gebunden sind, sondern dem angegebenen anharmonisch erweiterten Kraftansatz folge. Es ist allerdings zweifelhaft, ob sich diese Erweiterung der neuen Bohrschen Vorstellung bewähren wird und ob nicht die strenge quasielastische Bindung für die „virtuellen" Oszillatoren erforderlich ist.

Schließlich sei hier nochmals darauf hingewiesen[5]), daß die Verbreiterung der Alkalidampflinien bei Einwirkung fremder Gasmoleküle, z. B. von Stickstoff höheren Drucks, durch den hier beschriebenen elektrischen Effekt nach der Holtsmarkschen Theorie[6]) nicht erklärt werden kann.

---

[1]) ZS. f. Phys. **11**, 364; **12**, 1, 1923.

[2]) Herr W. Thomas ist im hiesigen Institut mit einer Berechnung der Einwirkung des elektrischen Feldes auf die Na-Linien mittels der Fuesschen Darstellung beschäftigt (vgl. ZS. f. Phys. **24**, 186, 1924).

[3]) N. Bohr, ZS. f. Phys. **13**, 161, 1923; N. Bohr, H. A. Kramers und J. C. Slater, ebenda **24**, 69, 1924; vgl. auch R. Ladenburg und F. Reiche, Bohrheft der Naturwissenschaften **11**, 584, 1923. Die hier als „Ersatzoszillatoren" eingeführten klassischen Gebilde, deren Reaktion auf äußere Strahlung die Wirkung der Atome bei den Zerstreuungs- und Dispersionserscheinungen ersetzt, werden nun nach Bohr als „virtuelle" Oszillatoren zu bezeichnen sein.

[4]) Dadurch kann man die Lorentzsche Theorie des normalen Zeemaneffektes unverändert in die neue Quantentheorie übernehmen.

[5]) Ausführlich dargelegt in Phys. ZS. **22**, 551—552, 1921; vgl. dazu auch O. Stern, Phys. ZS. **23**, 481, 1923; **24**, 71, 1923.

[6]) Ann. d. Phys. **58**, 577, 1919; Phys. ZS. **25**, 73, 1924.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. In einer Na-Lampe aus Quarz gelingt es, die D-Linien in sehr großer Helligkeit bei nur 0,1 Å Breite ohne Selbstumkehr zu erzeugen, so daß gut sichtbare breite Interferenzmaxima in einer großen Lummer-Gehrcke-Platte entstehen. Die Lampe hat sich auch als Lichtquelle für Resonanzversuche gut bewährt.

2. In einem hochevakuierten, mit Na beschickten, schwach geheizten Glasrohr werden zwischen eng gegenüberstehenden Metallplatten elektrische Felder bis 160000 Volt/cm hergestellt.

3. Die als Absorptionslinien auf dem kontinuierlichen Untergrund der Interferenzmaxima erscheinenden D_1- und D_2-Linien werden durch elektrische Felder bei Beobachtung senkrecht zu den Kraftlinien nach Rot verschoben, und zwar beide Linien etwa in der gleichen Stärke. Die senkrecht zum Feld schwingende Komponente von D_2 wird wesentlich weniger verschoben als die parallel schwingende Komponente, die Verschiebung beträgt für die p-Komponente 0,025 Å bei 160000 Volt/cm und ist dem Quadrat der Feldstärke proportional.

4. Die hier an den D-Linien beobachteten Erscheinungen sind ein typisches Beispiel des reinen unsymmetrischen quadratischen Effekts, wie er nach der Bohrschen Atomtheorie an wasserstoffunähnlichen Linien zu erwarten ist, wenn das äußere elektrische Feld klein gegen das der „Rumpfelektronen“ ist. Übrigens entspricht dieser unsymmetrische quadratische Effekt an den D-Linien nach Art und Größe annähernd den von Voigt aus der klassischen Elektronentheorie gezogenen Folgerungen, wobei das quasielastische Potential durch den Ansatz

$$\varphi = \tfrac{1}{2} k \mathfrak{r}^2 + \tfrac{1}{4} k' \mathfrak{r}^4$$

erweitert wird.

Zum Schluß möchte ich der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und der Helmholtz-Gesellschaft für die gewährte Unterstützung der beschriebenen Versuche meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, Juni 1924.

Über die Walzstruktur kubisch kristallisierender Metalle.

Von **Franz Wever** in Düsseldorf.

Mit 9 Abbildungen und 4 Tafeln. (Eingegangen am 12. Juli 1924.)

Die Strukturänderung kubisch kristallisierender Metalle während des Kaltwalzens wird an Aluminium und Eisen in einzelnen Stufen röntgenometrisch verfolgt, die im Endzustand hoher Formänderung erreichte statistische Anisotropie durch Flächenpolfiguren gekennzeichnet und durch Angabe der ihr zugrunde liegenden idealen Gitterlage und des Typus der Streuung näher beschrieben.

Ziel der Untersuchung. In der metallverarbeitenden Technik spielt die bildsame Formänderung bei Raumtemperatur und die damit verbundene Beeinflussung der mechanischen Eigenschaften eine wichtige Rolle. Es hat daher nicht an Versuchen gefehlt, auf Grund bestimmter Vorstellungen von dem Mechanismus der Kaltverformung zu einer Deutung der dadurch herbeigeführten Eigenschaftsänderungen zu gelangen. Die Mehrzahl der bisher zu diesem Zweck gebildeten Theorien geht jedoch weit über die experimentell sichergestellten Grundlagen hinaus und ist daher wenig geeignet, zu einer Lösung des Problems beizutragen; demgegenüber erscheint es angebracht, zu betonen, daß ein Fortschritt vorläufig nur von einer Vermehrung des Tatsachenmaterials erwartet werden kann. Die vorliegende Arbeit will als ein Beitrag in diesem Sinne gewertet sein: es soll versucht werden, die Strukturänderung durch Kaltwalzen an einigen Metallen des kubischen Systems mit Hilfe röntgenogrammetrischer Verfahren in ihren einzelnen Stufen zu verfolgen und so ein möglichst vollständiges Bild von dem Wesen dieses Arbeitsvorganges zu gewinnen.

Der Plan für die Arbeit reicht in das Jahr 1922 zurück. Die Ausführung wurde jedoch durch eine große Reihe von Behinderungen außerordentlich verzögert und der Abschluß nur durch Zuhilfenahme verschiedener Provisorien ermöglicht. Es sei auch an dieser Stelle Herrn Direktor Gruner von der Düsseldorfer Zweigniederlassung der Veifa-Werke und den Herren Oberstudiendirektor Tiedge und Prof. Dr. Zoll von der Städt. Oberrealschule am Fürstenwall für die freundliche Überlassung von Apparaten und Räumen und die dadurch ermöglichte Einrichtung eines Aushilfslaboratoriums verbindlichst gedankt. Bei der Anfertigung der Röntgenaufnahmen wurde ich von Herrn Dr.-Ing. P. Rütten unterstützt.

Die Strukturänderungen metallischer Körper durch Kaltverformung sind in letzter Zeit wiederholt zum Gegenstand planmäßiger Untersuchungen gemacht worden. Die Änderung der Kristallstruktur durch den Arbeitsvorgang des Kaltziehens wurde von A. Ono[1]) in einigen Stufen an Kupfer verfolgt. Die Bremsstrahlaufnahmen hartgezogener Drähte zeigten eine mit abnehmendem Querschnitt immer deutlichere Auflösung der Interferenzflecken in radiale Streifen, die als Abbild einer sich allmählich ausbildenden Faserstruktur gedeutet wurde. Die Auswertung erfolgte an Hand der im Diagramm gemessenen Winkel unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Intensitäten; sie ergab in Übereinstimmung mit dem von M. Ettisch, M. Polanyi und K. Weissenberg[2]) auf anderem Wege abgeleiteten Befunde, daß sich die Kristallite mit einer [111]-Richtung in die Drahtachse einstellen.

Eine ausführlichere Erörterung der Endlage des Raumgitters in gezogenen Drähten kubisch-raumzentrierter und flächenzentrierter Metalle ist in der erwähnten Arbeit von Ettisch, Polanyi und Weissenberg[3]) gegeben; diese enthält als wesentliches Ergebnis die Feststellung, daß bei beiden Gittern dichtest belegte Netzebenen senkrecht zur Drahtachse liegen.

Die Strukturänderung durch Kaltdehnung ist von H. Mark, M. Polanyi und E. Schmid[4]) an Zink-Einkristalldrähten in allen Einzelheiten sichergestellt worden. Danach betätigt sich in dem hexagonalen Zink die Basisfläche als Gleitfläche und die digonale Achse $[10\bar{1}0]$ als Gleitrichtung; der Grundvorgang der Kristalldrehung besteht in einer Biegegleitung, d. h. einer Gleitung entlang gekrümmter Gleitflächen unter gleichzeitiger Umbiegung der Gleitschichten in eine zur Drahtachse nahezu parallele Lage. Auf Grund ähnlicher Beobachtungen an anderen Metallen wird geschlossen, daß die Biegegleitung allgemein als Mechanismus der Drehung anzusehen ist.

Die mit dem Kaltwalzen verbundene Strukturänderung ist von H. Mark und K. Weissenberg[5]) an Folien von Silber, Gold, Platin, Aluminium und Kupfer untersucht worden; die Arbeit beschränkt sich jedoch auf eine Analyse des Endzustandes und enthält daher keinerlei Angaben über den Walzvorgang selbst und den Walzgrad der unter-

[1]) Mem. Coll. of Eng. Kyushu Imp. Univ. Fukuota **2**, 242, 1922.
[2]) ZS. f. Phys. **7**, 181, 1921.
[3]) A. a. O.
[4]) ZS. f. Phys. **12**, 58, 1922.
[5]) Ebenda **14**, 328, 1923.

suchten Proben. Mark und Weissenberg stellen mit Hilfe einer großen Anzahl von orientierten Debye-Scherrer-Aufnahmen eine zusammenhängende Gruppe von Gitterlagen fest; parallel zur Walzebene liegt eine (110)-Ebene und parallel zur Walzrichtung mit einer Streuung von etwa 8° eine [112]-Richtung. Unter der Voraussetzung, daß der Deformationsvorgang beim Walzen nach den gleichen Gesetzen verläuft wie die Dehnung von Zink, wird daraus geschlossen, daß sich im flächenzentrierten Silber die Rhombendodekaederebene (110) als Gleitfläche betätigt. In einer späteren Fortsetzung ihrer Arbeit präzisieren Mark und Weissenberg[1]) diese Angaben und beschreiben zugleich noch eine zweite Gitterlage, wobei die Würfelkanten [001] parallel zu den Hauptdeformationsrichtungen liegen. Sie skizzieren am Schluß dieser Mitteilung unter Berufung auf Untersuchungen von G. J. Taylor und C. F. Elam[2]) eine neue Deutung ihres früheren Befundes; danach sollen in kubischen Kristallen die gleichwertigen Gleitebenen im Wechsel zusammenwirken mit dem Endergebnis, daß sich die zu den Gleitebenen und Gleitrichtungen symmetrischen Ebenen und Richtungen parallel zur Hauptdeformationsrichtung einstellen. Sie schließen so, daß sich in kubisch-flächenzentrierten Metallen die (111)-Ebene als Gleitebene betätigt; diese Deutung wird von M. Polanyi[3]) in einer anschließenden ausführlichen Diskussion weiter ausgebaut.

Eine Sonderstellung nehmen die ausgedehnten Arbeiten von J. Czochralski[4]) ein; dieser schließt aus dem Übergang des normalen Laue-Bildes in ein Radialdiagramm, daß bei der überelastischen Beanspruchung tiefgehende Störungen des Raumgitters bis zu dessen vollständiger Zerstörung eintreten. Es muß dahingestellt bleiben, wieweit sich diese Auffassung als heuristisches Prinzip für die weitere Forschung von Vorteil erweist; die weitgehenden Schlüsse Czochralskis werden durch das von ihm bekanntgegebene Untersuchungsmaterial nicht ausreichend gestützt.

Versuchsmaterial und Verfahren. Als Vertreter der Metalle mit kubisch-flächenzentriertem Raumgitter wurde Aluminium gewählt, das sich wegen seiner Bearbeitbarkeit, Kristallisationsfähigkeit und nicht zuletzt wegen seines niedrigen Absorptionskoeffizienten besonders gut eignet; von den kubisch-raumzentrierten Metallen wurde das Elektrolyteisen in der α-Modifikation untersucht. Für die Analyse sehr geringer

[1]) ZS. f. Phys. **16**, 314, 1923.
[2]) Proc. Roy. Soc. **102**, 643, 1923.
[3]) ZS. f. Phys. **17**, 42, 1923.
[4]) ZS. f. Metallkde. **15**, 60, 126, 1923.

Formänderungen wurden künstlich großkristallin gezüchtete Folien benutzt und damit die Anwendung des Laue-Verfahrens ermöglicht; die Analyse höherer Bearbeitungsstufen wurde im wesentlichen nach der Debye-Scherrer-Methode an gewöhnlichem polykristallinen Metall ausgeführt.

Die benutzten röntgenographischen Verfahren lassen sich unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenfassen, wenn man auf die in der Kristallographie gebräuchliche Darstellung eines Kristalles durch seine Flächenpolfigur zurückgreift. Die Vorstellung der Kristallfläche wird dabei durch die der Netzebene des Kristallgitters ersetzt, und zur Erleichterung der Übersicht die Polfigur für jeden Netzebenenkomplex $< h\,k\,l >$ gesondert abgeleitet. Wir erweitern diese Darstellung nunmehr auch auf Kristallhaufwerke, indem wir in sinngemäßer Anwendung einem quasi-isotropen Körper aus sehr vielen, vollkommen regellos angeordneten Kriställchen eine gleichmäßig dichte Belegung der Kugel mit Flächenpolen zuordnen. Eine Mittelstellung zwischen Einkristall und regellosem Vielkristall nehmen statistisch-anisotrope Körper ein, bei denen bestimmte kristallographische Richtungen in sämtlichen Kristallfragmenten mehr oder weniger genau parallel gestellt sind. Die Belegung der Polkugel zieht sich dann zu Flecken von charakteristischer Gestalt zusammen, deren gegenseitige Anordnung die Anisotropie des untersuchten Mediums erschöpfend und zugleich in anschaulichster Weise kennzeichnet.

Die vorbeschriebene Darstellung wird durch die unmittelbare Beziehung der Flächenpolfigur zur Röntgenaufnahme selbst besonders nahegelegt; diese stellt nach F. Rinne[1]) die „Reflexprojektion“ eines Schnittes durch die Polkugel dar, wobei jedem Objektpunkt P der Kugel ein Bildpunkt Π zugeordnet wird, der mit ihm in der gleichen Einfallsebene liegt und durch Reflexion unter dem Braggschen Glanzwinkel $\vartheta/2$ an der zugehörigen Netzebene entstanden ist. Danach wird der Kugelkreis mit der Öffnung $90^0 - \frac{\vartheta}{2}$ um den einfallenden Strahl als Achse geometrischer Ort für die Flächenpole, die bei Einstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 2\,d \sin \frac{\vartheta}{2}$ zur Abbildung gelangen [Reflexionskreis][2]).

Bei der Einstrahlung eines kontinuierlichen Röntgenspektrums bilden die Reflexionskreise einen Kugelgürtel, der nach der kurzwelligen Seite hin entsprechend der Grenzfrequenz des Röhrenspektrums begrenzt ist,

$$\frac{\vartheta}{2}_{\min} = \arcsin \frac{\lambda_{\min}}{2\,d},$$

[1]) Einführung in die kristallogr. Formenlehre, 4. Aufl., Leipzig 1922, S. 218.
[2]) Vgl. M. Polanyi, ZS. f. Phys. **7**, 149, 1921; ebenda **9**, 123, 1922; **10**, 41, 1922.

und der nach langen Wellenlängen allmählich abklingt. Besteht das bestrahlte Objekt aus einem Einkristall, so wird jeder in diesen Kugelgürtel fallende Flächenpol als diskreter Punkt abgebildet; wir erhalten so das normale Laue-Diagramm. Beim Übergang zum Kristallhaufwerk werden die mit Flächenpolen belegten Teile der Kugeloberfläche als ausgedehnte Flecken projiziert. Wir nehmen hier bereits vorweg, daß die Lauebilder deformierter Metalle stets den Charakter von Radialdiagrammen aufweisen. Zur Erklärung dieser Radialdiagramme müssen wir weiter vorausschicken, daß die Struktur gewalzter Metalle nicht in einer idealen Parallelstellung der Kristallite besteht, daß diese vielmehr eine beträchtliche Streuung um eine ideale Lage zeigen, die im wesentlichen als Pendelung um eine rationale Richtung beschrieben werden kann. Damit ist gegeben, daß die zur Drehachse der Streuung tautozonalen Flächenpole zu kugelkreisförmigen Belegungen zusammenfließen, deren Reflexprojektion nach N. Uspenski und S. Konobejewski[1]) zu einem Radialdiagramm führt. Die Entstehung des Radialdiagramms kann so ohne Hinzunahme neuer Hypothesen lediglich durch eine Gleichrichtung mit Drehstreuung erklärt werden. Für die Auswertung der Radialdiagramme haben die genannten Autoren Regeln angegeben, auf die nicht näher eingegangen werden soll; die Überlegenheit des Debye-Scherrer-Verfahrens legt vielmehr nahe, die Laue-Diagramme lediglich als Übersichtsbilder zu benutzen und die quantitative Auswertung ausschließlich auf Debye-Scherrer-Aufnahmen zu stützen.

Bei Verwendung von monochromatischem Licht, entsprechend nur einem diskreten Reflexionskreis, gewinnen wir in der Röntgenaufnahme Fragmente von Debye-Scherrer-Ringen, entsprechend den Schnitten des Reflexionskreises durch die belegten Zonen der Polkugel. Die Ableitung der vollständigen Polfigur ist danach ohne weiteres gegeben: Einstrahlung mit monochromatischem Licht in verschiedenen Richtungen, derart, daß die abgebildeten Kugelschnitte ein ausreichend dichtes Netz über die Kugeloberfläche schließen und endlich graphische Zusammentragung der Aufnahmen nach einfachen Regeln der darstellenden Geometrie.

Zu den Bremsstrahlaufnahmen wurde eine Radiologie-Therapieröhre mit Wolfram-Antikathode benutzt; die Belichtungszeiten betrugen durchschnittlich 60 Min. bei etwa 80 $kV_{eff.}$ und 6 mA, 25 cm Fokusabstand und 35 mm Abstand des Objektes von der Platte. Die Aufnahmen mit monochromatischer Strahlung wurden unter Verwendung einer Glüh-

[1]) ZS. f. Phys. **16**, 215, 1923; vgl. auch E. Schiebold, ebenda **9**, 180, 1922.

kathodenröhre mit Metallkörper[1]) angefertigt; bei den Aluminiumaufnahmen bestand die Antikathode aus Kupfer, bei den Eisenaufnahmen aus Eisen. Die Belichtungszeiten betrugen bei 40 $kV_{eff.}$ und 10 bis 20 mA etwa $1^1/_2$ Stunden. Die benutzte Kamera war für die gerichteten Aufnahmen zur Ermittlung der Flächenpolfigur mit einem kleinen zweikreisigen Drehapparat versehen, mit dessen Hilfe sich beliebige Einfallswinkel gegen die Hauptrichtungen der Folie einstellen ließen[2]).

I. Die Walzstruktur des Aluminiums.

Material. Für die Herstellung der Versuchsproben stand eine vom Erftwerk, Grevenbroich, in liebenswürdiger Weise überlassene Platine von $300 \times 300 \times 10$ mm aus sehr reinem Aluminium mit $> 99{,}5$ Proz. Al zur Verfügung. Aus dieser wurden vier Streifen von 30 mm Breite herausgeschnitten und davon zwei unter Verwendung eines von der Firma Klein, Dahlbruch, freundlichst zur Verfügung gestellten Kaltwalzwerkes fortlaufend in Stufen von der halben Dicke bis zu der geringsten ohne Doppeln erreichbaren Stärke von etwa 0,07 mm heruntergewalzt. Von den so erhaltenen beiden Reihen wurden die Proben der ersteren (A-Reihe) zunächst sechs Stunden bei 550° geglüht, danach in einer Zerreißmaschine um 1 Proz. gereckt und schließlich einer 73stündigen Glühung bei Temperaturen von 450 bis 600° unterworfen. Die Bleche besaßen nach dieser Behandlung durchweg Kristallite von mehreren

Tabelle 1. Aluminium. Einkristallreihe A.

Endstärke (mm)	Ausgangsstärke (mm)								Walzgrad Proz.
	8,80	4,37	2,28	1,12	0,55	0,28	0,15	0,07	
	8,80	4,37	2,28	1,12	0,55	*0,28*	*0,15*	*0,07*	0
	4,45	2,19	1,14	0,56	*0,27*	0,14	*0,07*		50
	2,19	1,17	0,57	*0,29*	0,13	*0,07*			75
	1,17	0,57	*0,29*	0,14	*0,07*				87,5
	0,57	*0,27*	0,13	*0,07*					93,8
	0,29	0,13	0,06						96,9
	0,14	0,06							98,4
	0,07								99,2
					0,54				1,8
					0,53				3,6
					0,51				7,2
					0,48				12,5
					0,41				25

[1]) F. Wever, ZS. f. Phys. **14**, 410, 1923.
[2]) F. Wever, Mitt. a. d. K. W.-Inst. f. Eisenforschung **5**, 69, 1924.

Quadratzentimetern Fläche; sie können daher für die Röntgenuntersuchung als Einkristalle angesehen werden. Die Proben der zweiten Reihe (B-Reihe) wurden eine Stunde bei 450° geglüht, um die Einwirkung der vorhergehenden Kaltbearbeitung möglichst ohne stärkeres Kornwachstum zu beseitigen.

Nach dieser Vorbehandlung wurden beide Reihen in der ursprünglichen Walzrichtung weiter auf jeweils die halbe Dicke ausgewalzt, außerdem noch einige Proben mit Ausgangsdicken von 0,55 mm um geringere Beträge von 1,8 bis 25 Proz. gestreckt. Ausgangs- und Endstärken der so erhaltenen Bleche sind in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt.

Tabelle 2. Aluminium. Vielkristallreihe B.

	Ausgangsstärke (mm)								Walzgrad Proz.
	9,52	4,73	2,37	1,20	0,54	0,29	0,15	0,07	
Endstärke (mm)	9,52	4,83	2,37	1,20	0,54	*0,29*	0,15	*0,07*	0
	4,85	2,37	1,20	0,52	*0,28*	0,14	*0,07*		50
	2,39	1,20	0,57	*0,30*	0,13	*0,07*			75
	1,20	0,59	*0,29*	0,14	*0,06*				87,5
	0,61	*0,31*	0,13	*0,06*					93,8
	0,30	0,14	0,05						96,9
	0,16	*0,06*							98,4
	0,07								99,2
					0,47		*0,13*		12,5
					0,40		*0,11*		25

Für die Durchstrahlung nach dem Laue-Verfahren erwiesen sich die Bleche von etwa 0,28 mm als besonders geeignet, da sie das günstigste Verhältnis zwischen Belichtungszeit und Intensität lieferten; für die Debye-Scherrer-Aufnahmen wurden dagegen zur Abkürzung der Belichtungszeit die dünnsten zur Verfügung stehenden Folien benutzt. Die bestrahlten Proben sind in den Tabellen 1 und 2 durch Kursiv-Druck hervorgehoben.

Einkristallreihe. In Tafel 1 sind die Bremsstrahlaufnahmen der Einkristallbleche mit Walzgraden von 0 bis 25 Proz. wiedergegeben, der Primärstrahl war dabei parallel zur Foliennormale gerichtet. Die erste Aufnahme entspricht einem vollkommenen Einkristall; die geringfügigen Verzerrungen einzelner Interferenzpunkte sind auf die unvermeidlichen Verbiegungen der sehr weichen Folie beim Befestigen in der Kamera zurückzuführen. Bei den schwachen Walzgraden von 1,5 und 3,5 Proz. tritt nur eine mäßige Verwaschung der Interferenzen ein. Daraus muß geschlossen werden, daß sich der Einkristall durch Gleiten nach Gleit-

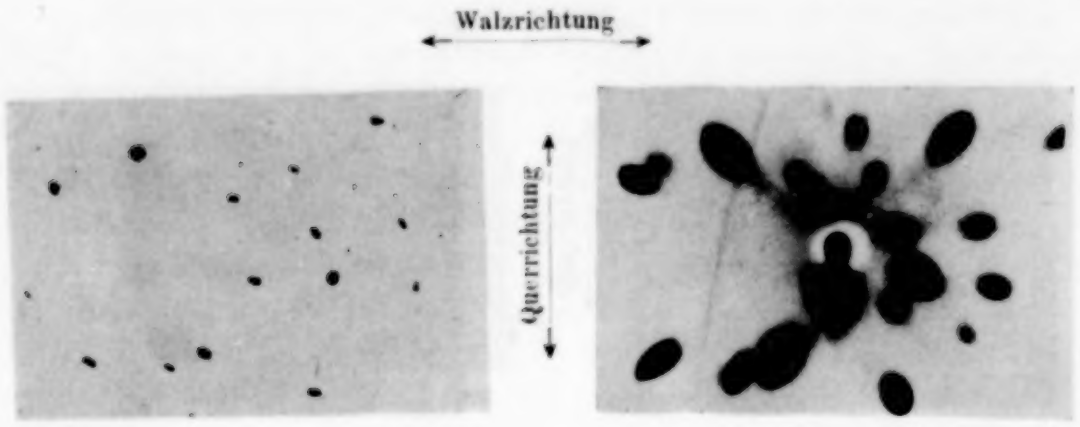
flächen in Teile zerlegt, die ihre ursprüngliche Orientierung zunächst verhältnismäßig gut beibehalten. Bei höheren Bearbeitungsgraden macht sich neben der weiteren Verwaschung eine radiale Verzerrung einzelner Interferenzflecke bemerkbar, die nach den in der Einleitung gemachten Bemerkungen als Beginn einer rotatorischen Streuung gedeutet werden muß. Bis zu den höchsten Walzgraden tritt eine weitere grundsätzliche Änderung des Bildes, abgesehen von einer allmählichen Verlängerung der Interferenzflecke in radialer Richtung, nicht mehr ein.

In Tafel 2 sind die Debye-Scherrer-Diagramme der gleichen Einkristallreihe für höhere Walzgrade von 50 Proz. an wiedergegeben; der einfallende Strahl war wieder parallel zur Foliennormale gerichtet. In diesen rührt der innere der nur in Fragmenten vorhandenen Debye-Scherrer-Ringe von Reflexionen an $<111>$, der äußere von Reflexionen an $<002>$ her; einzelne Bilder lassen daneben noch Spuren des $<022>$-Ringes erkennen; von den K_β-Interferenzen sehen wir in diesem Zusammenhang ab. Die Aufnahmen zeigen als wesentlichste Erscheinung eine überaus stark ausgeprägte Gleichrichtung der Kristallite, die auch bei dem höchsten untersuchten Bearbeitungsgrad von 99 Proz. nur erst unvollkommene Symmetrie aufweist.

Beim Walzvorgang besitzt das angelegte Kräftefeld drei aufeinander senkrechte digonale Achsen; damit ist verknüpft, daß auch die Kristallitordnung im Grenzzustand sehr starker Walzung drei aufeinander senkrechte digonale oder höherzählige Achsen parallel zur Walzrichtung, Normale und Querrichtung haben muß[1]). Die Untersuchung ergibt nunmehr, daß sich diese Symmetrie aus der zufälligen Lage des Ausgangskristalles erst bei hohen Bearbeitungsgraden eben erkennbar herausschält. Daraus muß geschlossen werden, daß der Mechanismus der Deformation weitgehend in einer Parallelverschiebung der Kristallfragmente längs Gleitebenen besteht und eine Drehung in die symmetrische Endlage erst allmählich hinzutritt. In diesem Sinne sind die Aufnahmen als eine gute Bestätigung der Tammannschen Gleithypothese[2]) anzusprechen.

Vielkristallreihe. Die Bremsstrahlaufnahmen der Vielkristallproben sind in Tafel 3 wiedergegeben. Bereits las erste Bild, Bearbeitungsgrad 0 Proz., läßt Spuren einer Faserstruktur in symmetrischer Lage zur Walzrichtung erkennen; danach hat die einstündige Erwärmung auf 450° nicht ausgereicht, die durch die vorgehende starke Verwalzung

[1]) K. Weissenberg, Ann. d. Phys. **69**, 409, 1922.
[2]) Lehrb. d. Metallographie, 3. Aufl., Leipzig 1923, S. 70.



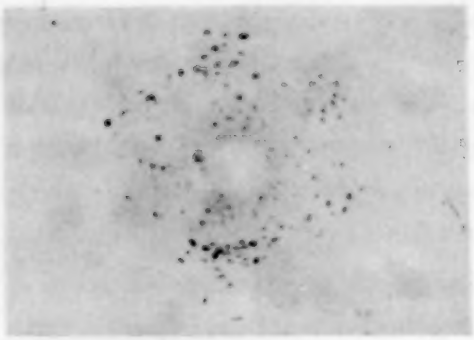
A 0,55/0,55 0 Proz. A 0,55/0,51 7 Proz.

A 0,55/0,54 1,5 Proz. A 0,55/0,48 12,5 Proz.

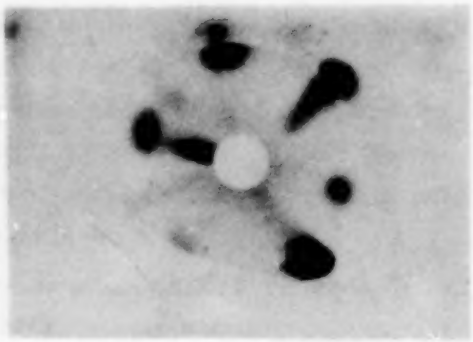
A 0,55/0,53 3,5 Proz. A 0,55/0,41 25 Proz.

Tafel 1. Einkristallproben; Laue-Diagramme.

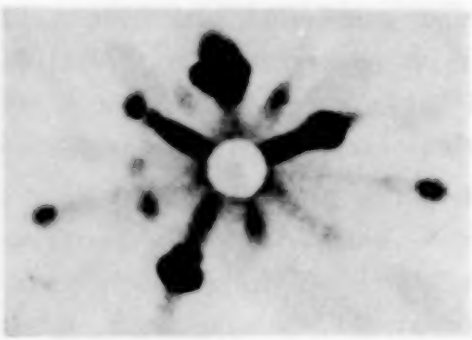
Walzrichtung



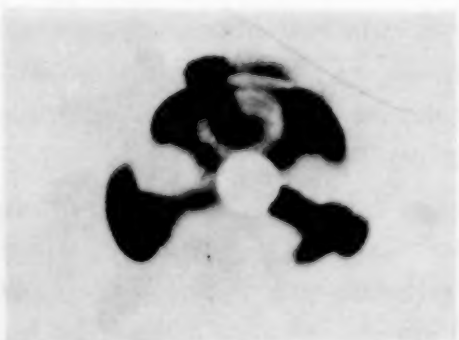
Querrichtung

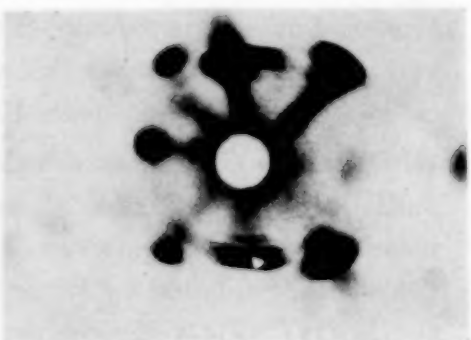


A 0,08/0,08 0 Proz. A 0,55/0,07 87,5 Proz.



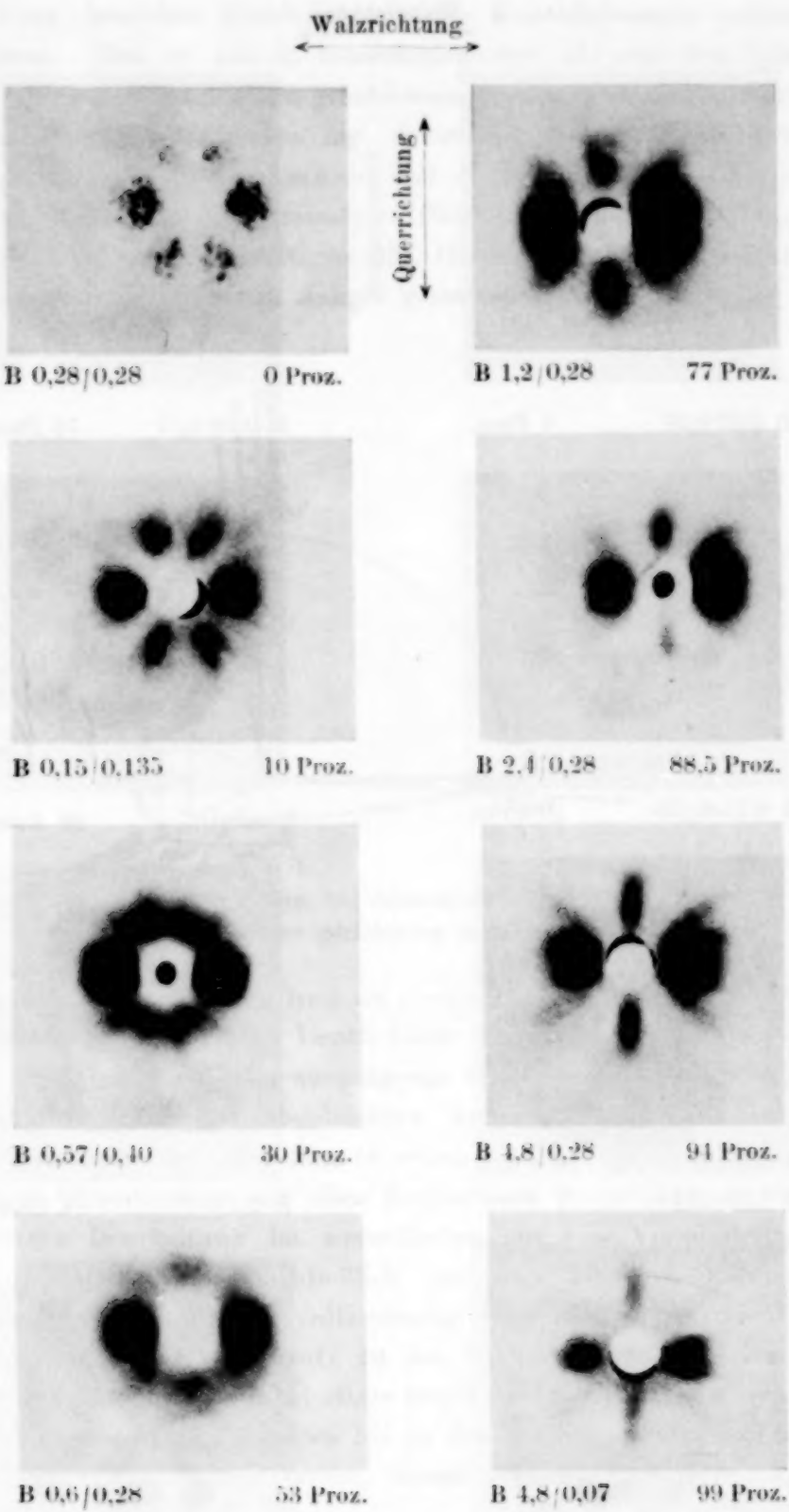
A 0,14/0,07 50 Proz. A 1,15/0,07 94 Proz.





A 0,28/0,07 75 Proz. A 8,94/0,07 99 Proz.

Tafel 2. Einkristallproben; Debye-Scherrer-Diagramme.



Tafel 3. Vielkristallproben; Laue-Diagramme.

B 0,07/0,07 0 Proz.

B 0,28 0,07 75 Proz.

B 0,15 0,135 10 Proz.

B 0,6 0,07 88 Proz.

B 0,15 0,11 27 Proz.

B 1,2 0,07 94 Proz.

B 0,14/0,07 50 Proz.

B 10,0 0,08 99 Proz.

Tafel 4. Vielkristallproben: Debye-Scherrer-Diagramme.

von 97 Proz. bewirkte Gleichrichtung der Kristallelemente vollständig zu zerstören. Das ist um so bemerkenswerter, als aus dem körnigen Aussehen der Interferenzflecken geschlossen werden muß, daß eine kräftige Rekristallisation stattgefunden hat, deckt sich jedoch im übrigen mit Beobachtungen von G. Tammann und R. Schröder[1]), daß sich die statistische Anisotropie kaltgewalzter Bleche auch durch langdauerndes Glühen nicht vollständig beseitigen läßt. Die überaus erschwerten Arbeitsverhältnisse des vergangenen Jahres gestatteten nicht, die Reihe durch

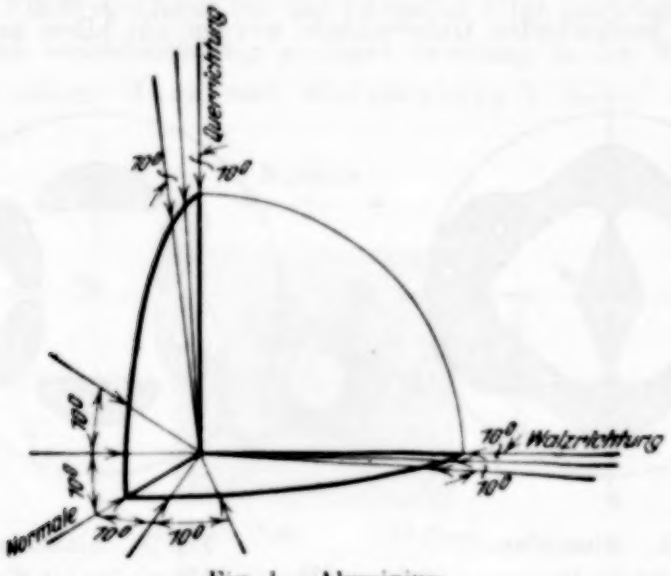


Fig. 1. Aluminium.
Schema der gerichteten Aufnahmen.

eine von dieser Erscheinung freie zu ersetzen. Die weiteren Aufnahmen zeigen wiederum mit großer Deutlichkeit eine mit fortschreitender Verwalzung sich immer schärfer ausprägende Gleichrichtung.

Bei den in Tafel 4 abgebildeten Aufnahmen der gleichen Reihe mit monochromatischer Strahlung ist schon bei sehr niedrigen Walzgraden die spätere Orientierung mit allen Kennzeichen vorgebildet, so daß bei der weiteren Bearbeitung im wesentlichen nur eine Verminderung der Streuung stattthat, bis schließlich bei dem höchsten untersuchten Bearbeitungsmaß eine sehr vollkommene Gleichrichtung erreicht wird. Von Interesse ist der Gegensatz zu den entsprechenden Aufnahmen der A-Reihe auf Tafel 2: während diese bereits bei 50 Proz. eine sehr vollständige Gleichrichtung, dagegen bis zu den höchsten Stufen nur mangelhafte Symmetrie erkennen lassen, nimmt nunmehr die Streuung sehr

[1]) ZS. f. Metallkde. **16**, 202, 1924.

allmählich ab; dagegen ist die Symmetrie von vornherein scharf ausgeprägt. Das letztere ist ohne weiteres verständlich, da die ursprüngliche nahezu regellose Orientierung einer symmetrischen Ausbildung der Endlage keine Hindernisse entgegensetzt. Besondere Beachtung verdient schließlich noch die unverkennbare Ähnlichkeit der erreichten Endlagen; man erkennt nun auch, daß die Unsymmetrie der letzten Einkristallaufnahme weniger eine Unsymmetrie der Lage als vor allem der Intensität bedeutet. Damit ist sichergestellt, daß sich der Mechanismus der Deformation in beiden Probenreihen wesentlich nach den gleichen Gesetzen vollzieht; die beobachteten Unterschiede werden vor allem auf die gegen-

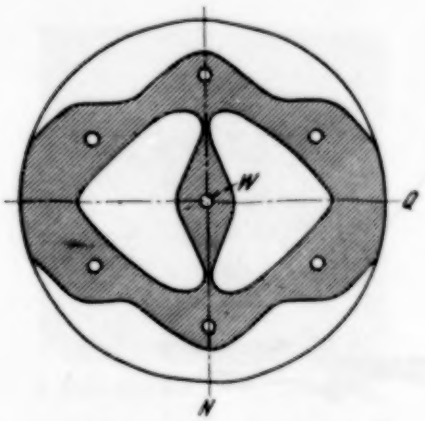


Fig. 2. Aluminium.
Flächenpolfigur für das Oktaeder $<111>$.

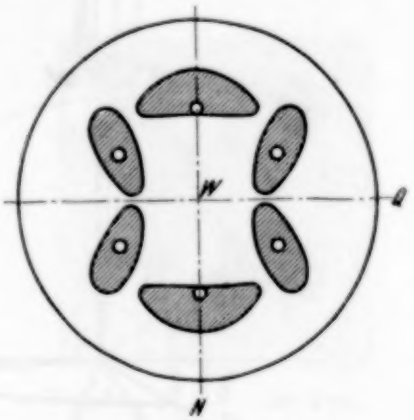


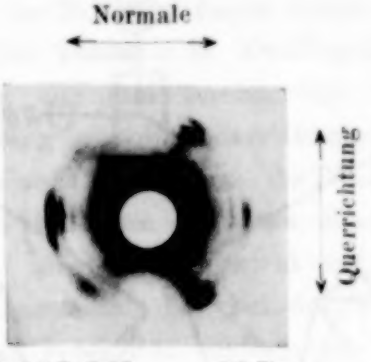
Fig. 3. Aluminium.
Flächenpolfigur für den Würfel $<001>$.

seitige Beeinflussung der einzelnen Kristallite zurückzuführen sein, der sich große Kristalle oder ausgedehnte Bereiche nahezu parallel gerichteter Fragmente naturgemäß sehr viel länger zu entziehen vermögen.

Struktur stark gewalzter Folien. Für die Konstruktion der vollständigen Flächenpolfigur erwiesen sich die in Fig. 1 schematisch angegebenen Richtungen in mehrfacher Hinsicht als vollkommen ausreichend, diese ist damit bereits weitgehend in sich geprüft und so in hohem Maße sichergestellt. Auf eine Wiedergabe der entsprechenden Diagramme soll verzichtet werden, da diese keine neuen Gesichtspunkte ergeben. Die daraus konstruierten Flächenpolfiguren für das Oktaeder $<111>$ und für den Würfel $<001>$ sind in den Fig. 2 und 3 in stereographischer Projektion dargestellt. Dabei ist von einer Abstufung der Intensität Abstand genommen, da die bloße Schätzung nicht genügend sicher erschien und eine Durchphotometrierung des gesamten Materials unter den gegenwärtigen Verhältnissen bisher nicht möglich war.

Nachdem so ein Übersichtsbild von der statistischen Anisotropie der untersuchten Folie gewonnen ist, bleibt noch die Aufgabe, dieses durch Zuordnung einer idealen rationalen Lage, welcher das Raumgitter im Grenzfalle zustrebt, sowie durch Klärung der Streuung, durch welche diese ideale Lage zu der gefundenen realen Belegung verwischt wird, dem Verständnis näher zu bringen und damit zugleich Schritte in Richtung einer späteren Klärung der Ursachen für die Ausbildung der beobachteten Struktur zu tun.

Aus der Flächenpolfigur für das Oktaeder folgt zunächst, daß [111]-Richtungen mit verhältnismäßig geringer Streuung in die Walzrichtung fallen. Nun haben Mark und Weissenberg[1]) darauf aufmerksam



B 10,0 0,08 99 Proz.

Fig. 4. Aluminium.
Debye-Scherrer-Aufnahme in der Walzrichtung.

gemacht, daß das Komplement des Glanzwinkels von (111) für Kupferstrahlung bei Aluminium, $90^0 - \frac{\vartheta}{2} = 70^0\,52{,}4'$, sehr nahe gleich dem Winkel zwischen zwei [111]-Richtungen ist, $70^0\,31{,}7'$. Man erhält demnach bei Einstrahlung in einer [111]-Richtung auf dem Debye-Scherrer-Ring die Reflexionen an den entsprechenden drei Parallelscharen (111) als Intensitätsmaxima, die um 120^0 gegeneinander gedreht sind, und aus denen die Orientierung des Oktaeders $<111>$ unmittelbar abgeleitet werden kann. Die in Fig. 4 wiedergegebene Aufnahme zeigt in der Tat zwei zur Walzebene spiegelsymmetrische Gruppen derartiger Intensitätsmaxima, danach muß die Walzrichtung eine (112)-Ebene und zugleich Zwillingsebene der Kristallitordnung sein; die Querrichtung ist damit als [110]-Richtung festgelegt.

[1]) ZS. f. Phys. **14**, 328, 1923.

Wir tragen zur Nachprüfung dieser Orientierung die ihr entsprechenden Flächenpole in die Polfiguren ein (Fig. 2 und 3), dabei zeigt sich, daß sie sich ausnahmslos gut in die belegten Bereiche einpassen. Damit ist die zunächst etwas unsichere Bestimmung in zuverlässiger Weise gestützt. Die entsprechende Gitterlage ist in Fig. 5 schematisch dargestellt.

Zur weiteren Bestätigung und zugleich zur Aufklärung der Natur der Streuung wurden schließlich noch in der gewöhnlichen zylindrischen Debye-Scherrer-Kamera je eine Drehaufnahme unter Drehung um die Walzrichtung und die Querrichtung angefertigt. Die Drehaufnahme um die Querrichtung zeigt mit mäßiger Deutlichkeit eine Schichtlinie im Abstand $\sigma = 19\,\text{mm}$ vom Äquator; daraus berechnet sich in

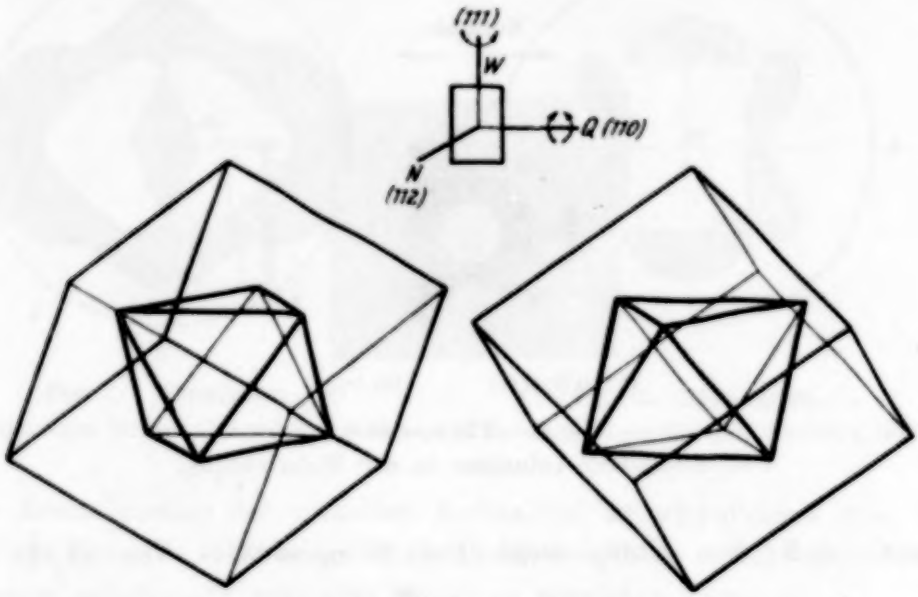


Fig. 5. Aluminium.
Lage des Oktaeders $< 111 >$ und des Würfels $< 001 >$.

bekannter Weise[1]) unter Einführung des Kameraradius $a = 29{,}6\,\text{mm}$ die Identitätsperiode in der Richtung der Drehachse zu $\frac{1}{\varphi} = 2{,}85 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}$; aus dem Gitterparameter des Aluminiums, $d = 4{,}07 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}$, ergibt sich andererseits die Identitätsperiode in der Richtung [011] zu $2{,}88 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}$. Damit ist die Querrichtung als [011]-Richtung bestätigt.

Die zweite Aufnahme unter Drehung um die Walzrichtung weist nur so verwaschene Intensitätshäufungen auf den Debye-Scherrer-Ringen auf, daß eine zuverlässige Entscheidung über die Indizierung der Dreh-

[1]) M. Polanyi, a. a. O.

achse nicht möglich ist; immerhin ist ein sehr starkes Maximum im Äquator der <022>-Linie als eine Bestätigung der entwickelten Auffassung anzusehen.

Aus den Drehaufnahmen ergibt sich weiter die noch fehlende Aufklärung über das Wesen der Streuung der Kristallite um die abgeleitete ideale Endlage. Die verhältnismäßige Schärfe, mit der die [011]-Richtung als Querrichtung in Erscheinung tritt, legt notwendig die Auffassung nahe, daß sich die Streuung wesentlich als Drehung um die Querrichtung betätigt. Damit ist zugleich gegeben, daß sich die Walzrichtung selbst nicht deutlich als rationale Richtung darstellt, in Übereinstimmung mit der Drehaufnahme um die Walzrichtung, die aus diesem Grunde keine ausgeprägten Schichtlinien erkennen läßt. Das oben gegebene Bild von der Polkugel findet damit zugleich eine einfache Erklärung. Die Kristalle kommen in Zwillingslagen nach der Walzebene als Zwillingsebene vor und streben von beiden Seiten her im wesentlichen unter Drehung um die Querrichtung der idealen Lage zu. Dabei fehlt allerdings eine Drehung um die Walzrichtung nicht ganz, auch fallen anscheinend bei dem höchsten Bearbeitungsmaß die Repräsentationspunkte der idealen Lage nicht mit den Häufungspunkten der realen Belegung zusammen. Die bei den Einkristallblechen beobachtete Unsymmetrie der Intensität erklärt sich in diesem Zusammenhang in zwangloser Weise dadurch, daß sich unter dem Einfluß der zufälligen Ausgangsstellung des Einkristalles eine der beiden Zwillingslagen nur bei einem kleineren Teil der Kristallfragmente herausbildet. Die gewonnene Vorstellung rundet sich damit zu einem geschlossenen Bilde ab.

Zweite Gitterlage. Eine nachträgliche Durchmusterung der Debye-Scherrer-Aufnahmen der Vielkristallreihe bestätigt zunächst in bester Weise die früher ausgesprochene Ansicht, daß die ideale Endlage schon von niedrigen Walzgraden ab in allen Merkmalen vorgebildet ist. Jedoch treten bei mittleren Walzgraden von etwa 10 bis 50 Proz. auf dem <111>-Ringe Intensitätshäufungen auf, die mit der vorbeschriebenen idealen Lage auch bei Annahme starker Streuung nicht vereinbar sind. Eine genaue Nachprüfung dieser Erscheinung führt nunmehr zu der bemerkenswerten Feststellung, daß bei diesen Walzgraden noch eine zweite Gitterlage vorhanden ist, bei der [001]-Richtungen parallel zu den Hauptdeformationsrichtungen der Folie gestellt sind, in Übereinstimmung mit der von Mark und Weissenberg besonders deutlich bei Platin und Gold beobachteten zweiten

Gitterlage. Diese ist jedoch bei Aluminium so wenig scharf ausgeprägt, daß eine vollständigere Darstellung mit Hilfe der Flächenpolfigur nicht möglich wird; bei höheren Walzgraden geht sie vollständig in der beschriebenen Hauptlage auf.

Ein Vergleich der von Mark und Weissenberg angegebenen idealen Gitterlage mit dem vorstehend erörterten eigenen Befund führt zu dem Ergebnis, daß die Polfigur für das Oktaeder <111> eine bündige Entscheidung zwischen beiden Auffassungen nicht zu liefern vermag, da auch die Repräsentationspunkte der von Mark und Weissenberg postulierten Lage in die belegten Bereiche fallen. Dagegen ist diese mit der Polfigur für den Würfel <001> nicht vereinbar. Mark und Weissenberg machen keine Angaben über den Walzgrad der untersuchten Folie, daher kann nicht nachgeprüft werden, worauf dieser Widerspruch zurückzuführen ist; es liegt die Vermutung nahe, daß die von ihnen benutzte Folie einen niedrigeren Walzgrad und damit eine vermehrte Streuung aufweist. Diese Auffassung wird dadurch verstärkt, daß die von Mark und Weissenberg in ihrer Folie nachgewiesene zweite Gitterlage nach den vorstehenden Ausführungen in Aluminium nur bei mittleren Walzgraden gefunden wird. Immerhin erscheint es in diesem Zusammenhang geboten, zu betonen, daß die bisher mitgeteilten Befunde zunächst nur für die untersuchten speziellen Fälle Gültigkeit besitzen und eine Verallgemeinerung erst dann erfolgen darf, wenn ihre Berechtigung durch die Ergebnisse weiterer Arbeiten einwandfrei gegeben ist. Ebenso müssen die von Mark und Weissenberg angedeuteten, von Polanyi[1]) weiter ausgeführten Versuche zu einer Erklärung der beobachteten Strukturen vorläufig noch als verfrüht bezeichnet werden.

II. Die Walzstruktur des Eisens.

Material. Nach der sehr ausführlichen Behandlung des Aluminiums kann die Erörterung der Walzstruktur des Eisens wesentlich kürzer gefaßt werden, da trotz der abweichenden Gitterstruktur bemerkenswerte neue Gesichtspunkte nicht hinzutreten. Die Schwierigkeit, Eisen-Einkristalle ausreichender Größe zu züchten, machte es überdies notwendig, die Untersuchung ausschließlich auf polykristallines Metall zu beschränken. Zur Herstellung der Blechproben wurde aus einer von den Langbein-Pfanhauser-Werken, Leipzig, gelieferten Elektrode ein Streifen von $100 \times 30 \times 6{,}8$ mm herausgeschnitten und

[1]) A. a. O.

zunächst zur Entfernung des Wasserstoffs mehrere Stunden bei 950° C im hohen Vakuum geglüht. Nach der so bewirkten vollständigen Entgasung wurden daraus eine Reihe von Proben mit jeweils um die Hälfte abnehmender Dicke bis herunter zu 0,06 mm ausgewalzt. Die dabei eintretende beträchtliche Kalthärtung ließ eine so weitgehende Formänderung gerade noch zu. Ausgangs- und Endstärken der erhaltenen Proben sind in Tabelle 3 zusammengestellt; für die Debye-Scherrer-Aufnahmen wurden die stärkeren Folien mit Königswasser bis auf etwa 0,1 mm heruntergeätzt.

Tabelle 3. Eisen.

Ausgangsstärke mm	Endstärke mm	Walzgrad Proz.	Ausgangsstärke mm	Endstärke mm	Walzgrad Proz.
6,80	6,80	0	6,80	0,45	93,5
	3,40	50		0,24	96,5
	1,70	75		0,12	98,4
	0,90	86,7		0,06	99,3

Die Struktur stark gewalzten Eisens. Auf die Wiedergabe der Bremsstrahlaufnahmen kann verzichtet werden, da diese gegen-

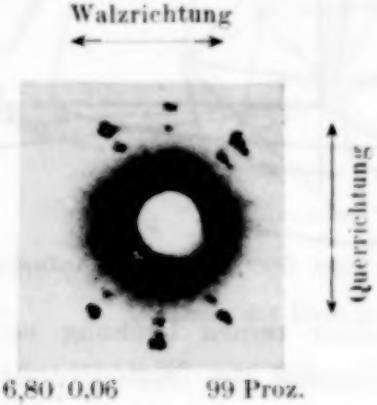


Fig. 6. Eisen.
Debye-Scherrer-Aufnahme in der normalen Richtung.

über den gleichen Aufnahmen an Aluminium keinerlei grundsätzliche Unterschiede aufweisen; es bleibt lediglich zu bemerken, daß die Ausbildung eines Radialdiagramms bereits bei niedrigen Walzgraden mit großer Schärfe einsetzt. Ebenso erübrigt sich die Mitteilung einer vollständigen Reihe von Aufnahmen mit monochromatischer Strahlung; diese lassen in gleicher Weise wie die Bremsstrahlaufnahmen eine schon bei niedrigen Walzgraden ausgeprägte Gleichrichtung er-

kennen. In Fig. 6 ist das Debye-Scherrer-Bild der am stärksten deformierten Folie mit einem Walzgrad von 99 Proz. wiedergegeben; die darin nur in Spuren auftretenden Ringe entsprechen der Reflexion der Eisen-K_α- und -K_β-Strahlung an der Rhombendodekaederebene (011).

Die Bestimmung der Struktur des Eisens im Grenzzustande sehr starker Formänderung wurde wie bei Aluminium bis zur Ermittlung der vollständigen Flächenpolfigur durchgeführt. Die Orientierung der dabei zugrunde gelegten Aufnahmen ist in Fig. 7 schematisch angegeben. Die hieraus konstruierte Flächenpolfigur für das Rhombendodekaeder $<011>$ findet sich in Fig. 8. Die Feststellung der Indizierung der Hauptrichtungen, Walzrichtung, Querrichtung und Foliennormale, wird in diesem Falle wesentlich durch die Beobachtung erleichtert, daß die

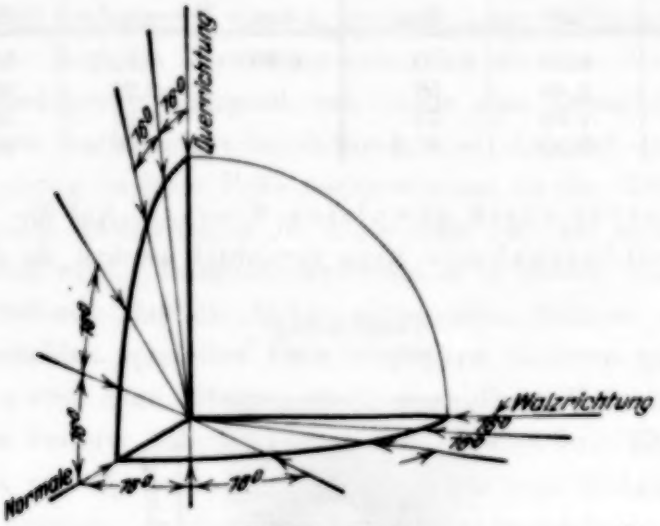


Fig. 7. Eisen.
Schema der gerichteten Aufnahmen.

Streuung den Typus einer reinen Drehung um die Walzrichtung aufweist. Es ergibt sich, daß die Walzrichtung und die Querrichtung nach [011] indiziert sind, während die Foliennormale eine [001]-Richtung ist. In Fig. 9 ist diese Lage schematisch dargestellt; die ihr entsprechenden Flächenpole decken sich sehr gut mit der Polfigur.

Zur weiteren Bestätigung der so ermittelten idealen Gitterlage wurden wiederum Drehaufnahmen um die Walzrichtung und die Querrichtung als Drehachse angefertigt. Die erstere dieser Aufnahmen zeigt mit ausgezeichneter Schärfe eine Schichtlinie im Abstand $\sigma = 16$ mm vom Film-Äquator; daraus folgt die Identitätsperiode in der Drehachse zu $\frac{1}{\varphi} = 4{,}05 \cdot 10^{-8}$ cm, während sich aus dem Gitter-

parameter des α-Eisens, $d = 2{,}86 \cdot 10^{-8}$ cm, die Identitätsperiode in der [011]-Richtung zu $4{,}04 \cdot 10^{-8}$ cm berechnet. Damit ist die Walzrichtung als [011]-Richtung sichergestellt. Die Drehaufnahme um die Querrichtung läßt keinerlei Schichtlinien erkennen.

Zusammenfassung. Durch die röntgenogrammetrische Untersuchung großkristalliner Aluminiumfolien wird nachgewiesen, daß sich die Formänderung bei dem Arbeitsvorgang des Kaltwalzens zunächst weitgehend in einer Translation längs Gleitflächen im Sinne der Tammannschen Gleithypothese auswirkt. Dazu tritt erst bei höheren Bearbeitungsgraden eine Drehung der Kristallite in eine be-

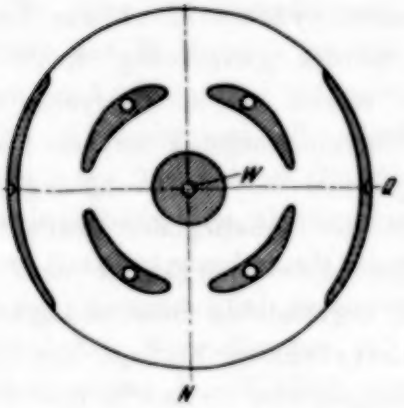


Fig. 8. Eisen.
Flächenpolfigur für das Rhombendodekaeder <011>.

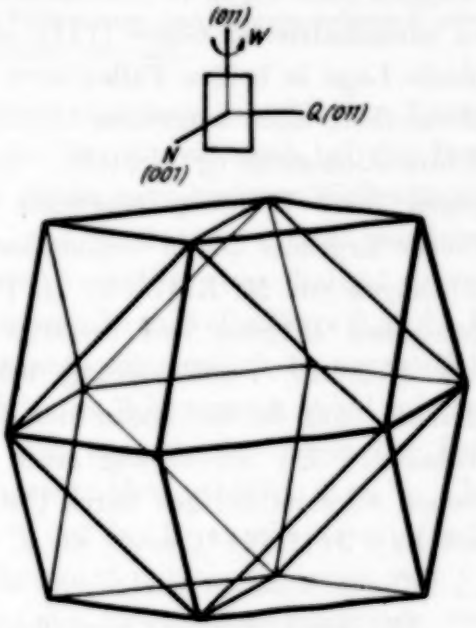


Fig. 9. Eisen.
Lage des Rhombendodekaeders <011>.

stimmte Endlage. Über den Mechanismus dieser Drehung selbst kann vorerst nichts ausgesagt werden, es muß daher auch dahingestellt bleiben, ob dieser bei kubischen Metallen in der von H. Mark, M. Polanyi und K. Schmid bei dem hexagonalen Zink festgestellten Biegegleitung besteht.

Die Ausbildung der Endlage, welcher das Gitter im Grenzzustande zustrebt, wird bei Aluminium und Eisen in einzelnen Schritten verfolgt und die Endlage selbst durch die Flächenpolfiguren für die dichtest belegten Netzebenenkomplexe gekennzeichnet. Die ideale Endlage läßt sich in den untersuchten beiden Fällen äußerst knapp beschreiben, wenn man vorausschickt, daß die dichtest belegten

Netzebenen der kubisch-flächenzentrierten Raumgruppe die Oktaederebene (111) und danach die Würfelebene (001) sind, während in der kubisch-innenzentrierten Raumgruppe die Rhombendodekaederebene (011) die dichteste Belegung aufweist. Bei beiden Gittertypen liegt alsdann im Zustande stärkster Verformung eine dichtest belegte Netzebene senkrecht zur Walzrichtung als der Hauptdeformationsrichtung, während zugleich die Symmetrie der übrigen dichtest belegten Netzebenen in bezug auf die beiden anderen ausgezeichneten Richtungen, Querrichtung und Walzennormale, von möglichst hohem Grade wird. Nimmt man weiter in Übereinstimmung mit M. Polanyi[1]) an, daß sich die dichtest belegten Richtungen in der Gleitebene, im flächenzentrierten Gitter [011], im raumzentrierten Gitter [111], als Gleitrichtungen betätigen, so ist die ideale Lage in beiden Fällen auch dadurch gekennzeichnet, daß sich die Gesamtheit aller möglichen Gleitrichtungen symmetrisch zur Hauptdeformationsrichtung einstellt. Dabei werden gleichzeitig die Winkel gegen diese Richtung möglichst klein, soweit sie nicht rechte sind. Dieses Ergebnis ist in vollkommener Übereinstimmung mit den Beobachtungen von M. Ettisch, M. Polanyi und K. Weissenberg[2]) an gezogenen Drähten und bestätigt damit die naheliegende Auffassung, daß sich die Formänderung bei beiden Arbeitsvorgängen nach den gleichen, nur in der Natur des Gitters begründeten Gesetzmäßigkeiten vollzieht. Die Ausbildung einer symmetrischen Endlage der Gleitebenen wird im übrigen durch Untersuchungen von Sykes[3]), E. C. Bain und Zay Jeffries[4]), sowie G. J. Taylor und C. F. Elam[5]) an großkristallinen Metallen weitgehend sichergestellt.

Die ideale Endlage wird durch eine beträchtliche Streuung verwischt. Diese besteht bei Aluminium darin, daß die Kristallite in Zwillingsstellung nach der Walzebene als Zwillingsebene auftreten und von beiden Seiten her im wesentlichen unter Drehung um die Querrichtung der idealen Lage zustreben; zugleich tritt eine geringere Drehung um die Walzrichtung auf. Bei Eisen besitzt die Streuung den Charakter einer sehr scharf ausgeprägten Drehung um die Walzrichtung.

---

[1]) ZS. f. Phys. **17**, 42, 1923.
[2]) A. a. O.
[3]) Trans. Am. Inst. of Min. and Metallurg. Eng. Nr. 1032, S. 1, 1923.
[4]) Chem. and Metallurg. Eng. **25**, 775, 1921.
[5]) A. a. O.

Über den Energieverbrauch bei der Ionisation der Luft durch Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge.

Von **L. Grebe** und **L. Kriegesmann** in Bonn.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juli 1924.)

Der Zusammenhang der für eine bestimmte Ionisation in Luft nötigen Energie mit der Wellenlänge der verwendeten Röntgenstrahlung wird experimentell untersucht. Für die Energiemessung wird eine Kompensationsmethode angegeben, durch die die Energiemessung auf Stromstärkemessungen zurückgeführt wird. Die Versuche ergeben eine gesetzmäßige Abhängigkeit des Energieverbrauchs von der Wellenlänge in dem Sinne, daß mit abnehmender Wellenlänge der Energieverbrauch nach einem Exponentialgesetz zunimmt.

In einer auf Veranlassung des einen von uns ausgeführten Untersuchung hat B. Boos[1]) gezeigt, daß der Energieverbrauch bei der Ionisation der Luft durch Röntgenstrahlen zweier verschiedener Wellenlängen ein verschiedener war. Es ergab sich, daß Strahlen von einer mittleren Wellenlänge 0,325 Å.-E für die gleiche Ionisation etwa dreimal so viel Energie verbrauchten, als Strahlen von der mittleren Wellenlänge 0,56 Å.-E. Dieses Resultat wurde nach seinem Bekanntwerden mehrfach angezweifelt, und zwar hauptsächlich deswegen, weil es im Widerspruch stand mit den theoretischen Vorstellungen, die man sich über die Ionisation der Luft in Gasen unter dem Einfluß von Röntgenstrahlen gebildet hatte[2]). Inzwischen hat der eine von uns gezeigt[3]), daß das Boossche Resultat sehr wohl mit diesen theoretischen Vorstellungen vereinbar ist, wenn man für den Ionisationsvorgang außer den durch die Röntgenstrahlen primär ausgelösten Photoelektronen auch die Rückstoßelektronen des Comptoneffekts mit verantwortlich macht.

Die Frage nach dem Energieverbrauch in der Abhängigkeit von der Wellenlänge ist nun eine außerordentlich wichtige, und zwar hauptsächlich deswegen, weil fast alle wissenschaftlichen und praktischen Messungen an Röntgenstrahlen nach der Ionisationsmethode ausgeführt werden, wobei man meist stillschweigend oder ausdrücklich die Annahme gemacht hat, daß man auch bei Strahlungen verschiedener Wellenlänge in der Größe des Ionisationsstromes ein Maß für die Energiewerte habe. Es war deshalb notwendig, das von Boos gewonnene Resultat zu prüfen und

---

[1]) B. Boos, ZS. f. Phys. **10,** 1—21, 1922. Daselbst auch Literaturangaben.
[2]) H. Holthusen, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen **26,** 211, 1919/20.
[3]) L. Grebe, ZS. f. Phys. **24,** 264, 1924.

nach Möglichkeit auf einen weiteren Wellenlängenbereich zu erweitern. Diese Aufgabe ist in der im folgenden berichteten Arbeit unternommen worden. Die zu diesem Zwecke verwendete Methode bestand in folgendem:

Die Energie eines Röntgenstrahlbündels von möglichst engem Wellenlängenbereich wurde durch eine thermometrische Methode bestimmt. Zu dem Zwecke war in ein Dewarsches Gefäß eine Bleiplatte gesetzt, in der die Strahlung zum größten Teile absorbiert wurde. Das Gefäß stand durch eine Kapillare in Verbindung mit einem zweiten gleichartigen Gefäß, in dem sich eine ebensolche Bleiplatte befand, die durch einen elektrischen Strom geheizt werden konnte. In der Kapillare befand sich ein Flüssigkeitstropfen, der durch seine Bewegung nach der einen oder anderen Seite eine Ungleichheit der Erwärmung der Luft in dem einen oder anderen Gefäße anzeigte. Blieb der Tropfen stehen, so war die Erwärmung in beiden Gefäßen die gleiche. Die Einstellung des Tropfens wurde durch ein Mikroskop von 100facher Vergrößerung beobachtet. Bei vorhandener Kompensation der Strahlungswärme auf der einen, durch die Stromwärme auf der anderen Seite war also, da die Erwärmung durch den Strom dem Quadrat der Stromstärke proportional ist, dieses Stromstärkenquadrat ein Maß für die Energie der absorbierten Röntgenstrahlung.

Die gleiche Strahlung wurde nun außerdem zur Ionisierung der Luft in einer großen Holthusenschen Kammer mit niedrigatomigen Wänden benutzt, so daß das Verhältnis des Wertes der Energie zur Ionisation bestimmt werden konnte.

Die Variation der Wellenlänge der verwendeten Strahlung wurde durch Variation der Spannung an der Röntgenröhre einerseits und durch Änderung der Dicke eines in den Strahlengang eingeschalteten Kupferfilters andererseits bewirkt. Die Ermittlung der mittleren Wellenlänge des so erhaltenen Gemisches wurde durch Einführung eines dünnen Zusatzfilters aus Kupfer bewerkstelligt, das durch das Abschwächungsverhältnis den Abschwächungskoeffizienten des Kupfers und daraus die mittlere Wellenlänge errechnen ließ. Zu diesem letzteren Zwecke dienten die Absorptionsbestimmungen von Richtmyer[1]).

Um die in der Ionisationskammer absorbierte Strahlenmenge zu berechnen, wurden Messungen des Gesamtschwächungskoeffizienten leichtatomiger Substanzen in bezug auf die Masseneinheit benutzt, O, X, H_2O, die ebenfalls von Richtmyer und Hewlett ausgeführt worden sind und

[1]) Richtmyer. Phys. Rev. **18**, 13. 1921; entnommen aus Roth-Scheel, Konstanten der Atomphysik. Berlin 1923.

die sehr angenähert den Werten für Luft entsprechen dürften. Eine gewisse Schwierigkeit bot es nur, von diesem Gesamtschwächungskoeffizienten auf den wahren Absorptionskoeffizienten überzugehen, der hier in Betracht gezogen werden muß, da nur die wirklich absorbierte, nicht aber die gestreute Röntgenstrahlung zur Ionisation beiträgt. Vom Massenstreukoeffizienten einfach als von einer konstanten Größe unabhängig von der Wellenlänge zu reden, schien in diesem kurzwelligen Bereich nicht mehr erlaubt. Andererseits sind die experimentellen Bestimmungen dieser Größe nicht so genau, daß man den Gang mit der Wellenlänge daraus mit genügender Sicherheit entnehmen könnte.

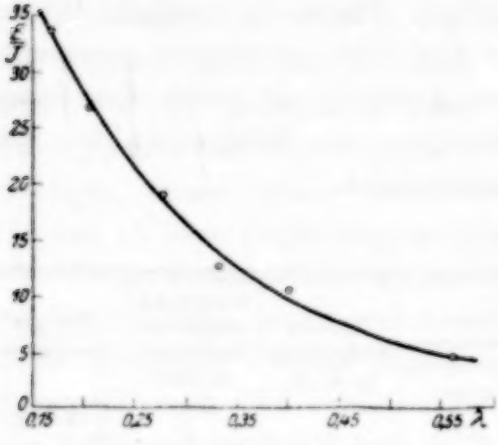


Fig. 1.

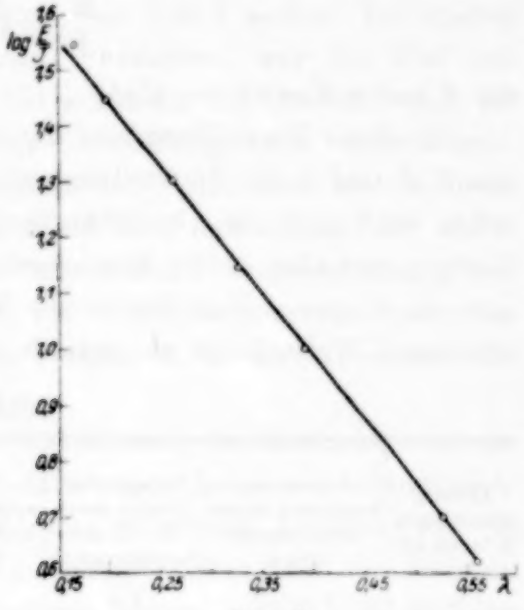


Fig. 2.

Glücklicherweise liegt nun eine theoretische Beziehung dieser Abhängigkeit vor, die die genannte Abhängigkeit richtig wiederzugeben scheint, und die sich aus der Compton-Debyeschen Theorie der Streuung ergibt [1]). Diese Beziehung wurde deshalb zur Bestimmung des wahren Absorptionskoeffizienten benutzt.

Auf die notwendigen Korrekturen der Messungen infolge der Durchlässigkeit des Bleis für diese kurzen Wellenlängen und der Absorption in den Glaswänden der Dewargefäße soll hier nicht näher eingegangen werden. Sie sind mit der größtmöglichen Sorgfalt angebracht worden und werden in der demnächst erscheinenden Dissertation des einen von uns diskutiert werden.

---

[1]) A. H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483, 1923.

Die Ergebnisse der Messungen zeigt die Tabelle und die Kurve Fig. 1. Sie enthält für fünf Wellenlängen das Verhältnis von Energie zu Absorption in willkürlichem Maß in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Als sechster Wert ist bei 0,56 Å.-E. der Wert eingetragen, der sich aus dem Wertverhältnis in der Boosschen Messung ergibt. Die Werte liegen mit geringen Abweichungen auf einer glatten Kurve. Trägt man statt der Verhältnisse E/J deren Logarithmen in Abhängigkeit von der Wellenlänge auf, so erhält man mit sehr guter Annäherung eine gerade Linie (Fig. 2). Die Abhängigkeit des Verhältnisses E/J von der Wellenlänge wird also im untersuchten Bereich dargestellt durch eine Beziehung von der Form

$$\frac{E}{J} = A e^{-c \cdot \lambda},$$

wo A und c Konstanten sind.

In dieser Darstellung sind nur die relativen Werte der Abhängigkeit von E/J und λ zur Darstellung gekommen. Die schon erwähnte Dissertation wird auch die Absolutwerte der Ionisation bei absolut gemessener Energie enthalten. Die hier gegebene Abhängigkeit reicht aber schon aus, um iontometrisch bestimmte Vergleiche von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge energetisch umzurechnen.

Tabelle.

Röhrenspannung in Kilovolt eff. v	Ionisation, bestimmt durch Elektrometerablauf $T = 1/J$	Energie, bestimmt durch Sk.-T. des Amperemeters $\sqrt{E}$	Abschwächungskoeffizient in Kupfer α	Mittlere Wellenlänge in Å.-E. λ	Wahrer Absorptionskoeffizient in Luft $\frac{\mu}{\varrho}$	$\frac{\text{Energie}}{\text{Ionisation}}$ $\frac{E}{J_0}$ (korrig.)
50	28,3	13	85,3	0,397	0,170	10,4
60	24,8	20	51,7	0,333	0,109	12,4
70	26,5	30	30,5	0,275	0,072	18,8
80	23,8	47	14,3	0,205	0,043	26,5
100	14,9	73	8,1	0,166	0,032	33,5
						$J_0 = \frac{J}{\frac{\mu}{\varrho}}$

Wir danken an dieser Stelle neben der Gesellschaft der Freunde und Förderer der Universität Bonn dem Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, die uns durch Gewährung von Mitteln die Ausführung der Arbeit ermöglicht haben.

Bonn, Röntgen-Institut der Universität, im Juli 1924.

Bemerkungen zu meiner Publikation: „Zur Grundlegung der Quantentheorie".

Von **H. A. Senftleben.**

(Eingegangen am 11. August 1924.)

Es wird auf die der genannten Publikation anhaftenden Unvollkommenheiten und den Weg zu ihrer Abstellung hingewiesen. Ferner werden die wesentlichsten Punkte der Teile II und III angedeutet. (Die ausführliche Darstellung ist einer besonderen Monographie vorbehalten.)

Wie ich schon bei der Korrektur von Teil I meiner Publikation „Zur Grundlegung der Quantentheorie [1])" bemerkte, war das dort entwickelte Begriffssystem lückenhaft und jedenfalls zur Durchführung der beabsichtigten Vollständigkeit in der Darstellung noch unzureichend. Ich hatte daher die Teile II, III zunächst zurückgehalten, um an diesen den Schaden auszubessern. Dies habe ich aber nun aufgegeben, da — abgesehen von anderen Gründen — wesentliche Umgestaltungen notwendig waren: Es waren einmal Teile von Teil III schon eher zu berücksichtigen, ferner haben verschiedene Stellen, u. a. die Grundsätze II, III und IV eine Ergänzung zu erfahren.

Es ist zunächst eine eingehende Betrachtung der Methode, nach der die Beschreibung des (klassischen) Modells zu geschehen hat, erforderlich: Diese involviert gewisse Schwierigkeiten, die darauf beruhen, daß die Elektrodynamik (im euklidischen Kontinuum) hinsichtlich der Existenz von Ladungen im Felde kein vollständiges System ist, da z. B. die Energie einer Ladung nicht allein auf ihr elektromagnetisches Feld zurückzuführen ist [2]). Diese Unvollständigkeit kommt aber nicht explizite bei der Anwendung zum Vorschein [3]), wenn man anstatt der üblichen Grundgleichungen von H. A. Lorentz eine andere nur auf den Feldgleichungen für das ladungsfreie Vakuum basierende Formulierung zugrunde legt. Diese liefert dann nur das Feld von gleichförmig bewegten Ladungen in Strenge, während die Anwendung auf ungleichförmige Bewegungen von vornherein nur mit einer gewissen Approximation möglich ist [4]). —

---

[1]) ZS. f. Phys. **22**, 127, 1924.

[2]) In der Lorentzschen Formulierung kommt dies darin zum Ausdruck, daß die Existenz von Ladungen durch die Grundgleichungen ohne Zuhilfenahme von fremden Elementen nicht gewährleistet ist.

[3]) Das ist merkwürdig und dürfte einen tieferen Grund haben.

[4]) Z. B. die Hertzsche Lösung.

Es kommt dann im wesentlichen auf den Übergang von der lokalen Beschreibungsweise der Feldtheorie zu einer substantiellen an, bei welcher das Modell durch eine Anzahl Parameter wie Impuls, Energie, Drehimpuls charakterisiert ist. Der Erhaltungssatz des Feldimpulses führt dann, auf das Feld von einzelnen Ladungen angewandt [1]), auf die dynamische Grundgleichung, wobei als Zusatzglied noch die auf die äußere Begrenzungsfläche des Feldes wirkende Flächenkraft tritt, die im allgemeinen klein ist, aber erst im Grenzfall schwacher gegenseitiger Einwirkung (bzw. sehr großem Abstande) der Ladungen zum Verschwinden zu bringen ist. Diese steht dann in unmittelbarer Beziehung zur Ausstrahlung. — Jedenfalls kann nun die Zuordnung von Parameterwerten, soweit sie sich auf das elektromagnetische Feld gründet, keine scharfe mehr sein, sobald Ausstrahlung statthat und das besagte Zusatzglied von Null verschieden ist. Die Zuordnung kann dann überhaupt nur dadurch Berechtigung erlangen, daß man das System mit einer endlichen geschlossenen Fläche räumlich begrenzt. Die Begrenzung hat dabei so zu erfolgen, daß die dynamische Grundgleichung bei Unterdrückung des Zusatzgliedes noch mit größter Approximation aus den Erhaltungssätzen des Feldes folgt, und zwar ist die Fläche so zu legen, daß die Integralwerte von Energie und Impuls des innerhalb der Fläche liegenden Feldes der Ladung nicht mehr von denen einer in gleicher Weise begrenzten mit gleicher, aber gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Ladung verschieden sind, wie diese von deren Gesamtwerten bei unendlich weiter äußeren begrenzenden Fläche. (Je nach der Approximation ist der Fläche dann ein gewisser Spielraum gelassen.)

Betrachten wir etwa das einfache Modell $n = 2$ aus zwei entgegengesetzten Ladungen $e_1 = e$, $e_2 = -e$, die komplanar auf „Keplerellipsoiden" umlaufen. Sind $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2$ die Lagenvektoren von deren gemeinsamem Brennpunkt (Schwerpunkt), so sei für ihre Differenz

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, \mathfrak{e}^* a^\nu \cos 2\pi(\sigma\omega_1 + \omega_2)t + \mathfrak{e}^{**} a^\nu \sin 2\pi(\sigma\omega_1 + \omega_2)t,$$

$$\text{wo} \qquad (\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{e}^{**}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{e} = [\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{e}^{**}] \qquad (1)$$

der Einheitsvektor der Bahnnormale ist. Dann ist

$$\mathfrak{x}^2,\ \dot{\mathfrak{x}}^2,\ \ddot{\mathfrak{x}}^2 \cdots (\mathfrak{x}\ddot{\mathfrak{x}}) \cdots [\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}}],\ [\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}] \cdots$$

[1]) Es ist vorauszusetzen, daß der Feldimpuls in den (aus dem Felde auszuschließenden) Ladungen weder entstehen noch vergehen kann.

periodisch in t mit der Periode $1/\omega_1$. Ferner sei

$$|\mathfrak{x}| \leqq \varrho, \quad |\dot{\mathfrak{x}}| \leqq \gamma, \quad 1 > \frac{\gamma}{c} \geqq 2\pi \frac{\varrho\,\omega_1}{c}, \tag{2}$$

wo das Gleichheitszeichen für verschwindende Exzentrizität gilt. Die das System begrenzende Fläche sei für diesen Fall eine um den Schwerpunkt beschriebene Kugel vom Radius der Wellenlänge der Umlaufsschwingung

$$r = \frac{c}{\omega_1}; \tag{3}$$

für wachsende Exzentrizität werden aber immer kleinere Radien zu wählen sein. Das in der Kugel enthaltene System verliert infolge des Flusses von elektromagnetischer Energie und Drehimpuls durch ihre Oberfläche langsam von seiner Energie E und seinem Drehimpuls $\mathfrak{M} = \mathfrak{e}M$, und zwar ist[1]) (für kleine Exzentrizität einschließlich den Gliedern der Ordnung γ/c genau):

$$\left.\begin{aligned} -\delta E &= \frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t-\delta t}^{t} (\ddot{\mathfrak{x}})^2\, dt = \delta t\, \frac{e^2}{3c^3}\, 16\pi^5 \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} (\sigma\omega_1 + \omega_2)^4 a^{\sigma 2}, \\ -\delta \mathfrak{M} &= \frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t-\delta t}^{t} [\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}]\, dt = \delta t\, \frac{e^2}{3c^3}\,\mathfrak{e}\, 8\pi^2 \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \sigma(\sigma\omega_1 + \omega_2)^3 a^{\sigma 2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo

$$\delta t = \frac{1}{\omega_1} \tag{5}$$

gleich der Dauer eines Umlaufes zu setzen ist[2]). Durch diese Gleichungen ist dann die Veränderung der Bahnkurve durch die Ausstrahlung bestimmt. Führt man für E, M die Größen J_k, $k = 1, 2$ (definiert durch $\frac{\partial E(J_1 J_2)}{\partial J_k} = \omega_k$, $k = 1, 2$) ein, so ist für diese

$$-\frac{\delta J_k}{\delta t} = \frac{e^2}{3c^3}\, 8\pi^2 \sum_\tau \omega^{\tau 3} a^{\tau 2} \tau_k^\tau, \quad k = 1, 2 \tag{6}$$

und wegen

$$\tau_1 = 0, 1, 2 \cdots + \infty, \quad \tau_2 = +1, -1 \quad (\text{bei } \omega^\tau > 0) \tag{7}$$

---

[1]) Die vom Verfasser (ZS. f. Phys. **22**, 153, 1924) angegebene Ableitung ist hier also zu modifizieren. Es findet sich dort auch ein Rechenfehler.

[2]) δt muß dabei in der betrachteten Näherung die Eigenschaft eines „Differentials" haben, daß $\frac{\delta^2 t}{\delta t} \ll 1$ ist. Dies stellt dann auch die Bedingung für das Bestehen einer Schwingungsbewegung (1) dar.

ist dann[1])

$$-\frac{\delta J_1}{\delta t} \geqq -\frac{\delta J_2}{\delta t} > 0,$$

was ein monotones Abnehmen der großen Achse und ebenso der Exzentrizität, also monotone Annäherung an kreisförmige Bewegung bedeutet.

Indem wir in (5) δt gleich der Umlaufszeit zu setzen haben, findet die Genauigkeit, mit der dem Modell Energie und Drehimpuls bzw. zwei damit äquivalente Parameter zugeordnet werden können, eine obere Grenze. Dies kommt unmittelbar in einer Unschärfe in den Schwingungszahlen zum Ausdruck, die im Spektrum besteht, sobald sie als zeitlich (langsam) veränderlich anzusehen sind. — Es sei bemerkt, daß wir von der Unschärfe die Breite unterscheiden müssen; letztere, die auf der Veränderlichkeit der Amplituden beruht, gestattet, die Schwingungszahl eines Maximums scharf zu definieren.

Der Unschärfe in der Zuordnung von Parameterwerten entspricht nun auch die Begrenzung in der Genauigkeit, mit der die Bewegungsgleichungen der Ladungen aufzustellen sind. Hierbei kommt es im wesentlichen nur auf die Bewegung bis zu einem Umlauf an, wofür die Parameterwerte als konstant anzusetzen sind und die Bewegungsgleichungen das Energie- und Drehimpulsintegral besitzen. Sie sind dann in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{x}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

aufzustellen, wo die Lagrangesche Funktion L in maximaler Genauigkeit die von C. G. Darwin[2]) angegebene ist:

$$L(\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}) = -(m_1+m_2)c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathfrak{x}}^2 + \frac{e^2}{4\pi r}$$
$$+ \frac{1}{8c^2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^3}(m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2)\dot{\mathfrak{x}}^4 + \frac{e^2}{8\pi c^2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\frac{\dot{\mathfrak{x}}^2}{r} + \frac{(\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x})^2}{r^3}\right).$$

Diese liefert dann in der Tat die in (1) angegebene Bewegung. Bei der Aufstellung der Funktion L ist dabei konsequent nach dem Verhältnis γ/c zu entwickeln und nach den Gliedern der zweiten Ordnung abzubrechen. Daß der Rest dann verhältnismäßig klein bleibt, ist aber nur bei kleiner Exzentrizität der Bahn gewährleistet, während er mit zunehmender Exzentrizität über alle Grenzen wachsen wird. Für geringe Exzentrizität ist dann damit die Begrenzung des Systems durch eine Kugel vom Radius $r = c/\omega_1$ im Einklang, da Energie und Impuls

[1]) Das $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 1$ entsprechende Summenglied ist wegen seiner Kleinheit ohne Einfluß.

[2]) C. G. Darwin, Phil. Mag. **39**, 547, 1920.

des von dieser eingeschlossenen Feldes einer Ladung sich von denen eines ebenso begrenzten Feldes einer mit derselben, aber gleichförmigen Geschwindigkeit γ bewegten Ladung und denen ihres Gesamtfeldes bei unendlich weiter äußerer Begrenzung dann nur in Gliedern von der Ordnung $\left(\frac{\gamma}{c}\right)^3$ an unterscheiden.

Der Zuordnung von Energie und Drehimpulswerten für ein auf der klassischen Elektrodynamik begründetes Modell ist ein gewisser Spielraum gelassen, der in der Unschärfe der ausgestrahlten Schwingungszahl physikalisch begründet ist. — In der Quantentheorie der Molekeln ist das aber nicht der Fall, wenn man annimmt, daß die hier auftretenden Spektrallinien alle wohl eine gewisse Breite, aber doch ein scharfes Maximum haben können. Die Zuordnung von Parameterwerten geschieht dabei vermittelst der (die Konstante h definierenden) Beziehung $\Delta E = h\nu$ (bzw. der Quantisierungsvorschrift). — Es ist zu beachten, daß unsere Beobachtungen hier nur statistisch sind. Für die Umwandlung der Molekeln besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, das für die einzelne „quantisierbare" Molekel im limes $h \to 0$ auf Differentialgleichungen führt, die im Falle $n = 2$ lauten[1]):

$$\lim_{h \to 0} -\frac{\delta J_k}{\delta t} = \frac{e^2}{3c^3} 8\pi^2 \sum_z \omega^{z\,3} a^{z\,2} \tau_k^z, \tag{9}$$

wo die rechten Seiten also mit (6) übereinstimmen. Es stimmt dann das Verhalten der Molekel mit ihrem klassischen Modell insofern überein, als die Maxima im Spektrum der Molekel stets innerhalb des unscharfen Bereiches der klassischen Schwingungszahl liegen. Es rücken nämlich, wenn τ_k, $k = 1, 2$ ein gewisses Zahlsystem (7) ist, die sukzessiven Übergängen

$$J_k \to J_k - \tau_k \to J_k - 2\tau_k \to \cdots, \quad k = 1, 2$$

entsprechenden Spektrallinien der Molekel im limes $h \to 0$ in gleichem Maße zusammen, wie sie sich der klassischen Frequenz annähern, indem für beides das Verschwinden von

$$\frac{h}{2} \sum_1^2{}_k \sum_1^2{}_i \frac{\partial^2 E}{\partial J_k \partial J_i} \tau_k \tau_i \quad \text{gegen} \quad \sum_1^2{}_k \frac{\partial E}{\partial J_k} \tau_k \tag{10}$$

---

[1]) H. A. Senftleben, ZS. f. Phys. **22**, 156, 1924. Das dort S. 143 angegebene Kriterium für die „Quantisierbarkeit" ist hier erfüllt, wenn für $(\mathfrak{x})$ ein gewisses (endliches oder verschwindendes) Librationsgebiet besteht. — Es dürfte für die „Quantisierbarkeit" noch darauf ankommen, daß die aus dem elektrischen Moment des Modells abzuleitenden Vektorinvarianten zeitlich periodisch sind mit einer Periode δt, wobei $\delta^2 t \leqslant \delta t$ ist.

maßgebend ist, so daß sich diese Linien also an der Stelle der klassischen Schwingungszahl häufen. — Mit dem Übergang $h \to 0$ ist aber für die Molekel noch keine vollständige Übereinstimmung mit ihrem klassischen Modell erreicht, was z. B. darin zum Ausdruck kommt, daß die linken Seiten von (6) und (9) nicht identisch sind. Um dies noch zu erreichen, könnte man darauf verfallen, die mittlere Lebensdauer der Molekel in ein gewisses festes Verhältnis zur Umlaufsdauer des Modells zu setzen bzw. für h (bis auf einen Faktor) anzusetzen

$$h \sim \frac{e^2}{c}\left(\frac{e^2}{cJ}\right)^2. \tag{11}$$

Im Falle, daß das erste Glied in (10) gegen das zweite nicht völlig verschwindet, ist eine Unschärfe in der Schwingungszahl dann hervorgerufen durch die Superposition von Spektrallinien einer gewissen Breite mit nahezu, aber nicht völlig übereinstimmenden Maxima und die eine entsprechende Unschärfe im Intensitätsmaximum durch die statistischen Schwankungen in den Übergängen der Molekel. Diese Unschärfe kann für verschwindende Exzentrizität dann hinsichtlich der Grundschwingung mit der des klassischen Modells in Übereinstimmung gebracht werden; ob aber dies allgemeiner dann auch für die übrigen Schwingungen gilt, ist eine Frage, auf die der Verfasser hier noch die Antwort schuldig ist[1]). Es sei bemerkt, daß die so aus Spektrallinien mit scharf definiertem Maximum durch Superposition entstehende Unschärfe unbeschränkt groß sein kann, und dies würde den „unquantisierbaren" Molekeln entsprechen, bei denen die Bewegung im allgemeinen nicht mehr einem bestimmten Typus mit isolierten, langsam veränderlichen Schwingungszahlen angehört.

Eine vollkommene Behandlung dieser Verhältnisse dürfte nun noch eine nähere Theorie der Spektrallinienbreite und ein näheres Eingehen auf Interferenzfragen erfordern. Da die Ansätze des Verfassers dafür aber noch einer genügenden Begründung entbehren, so sei hier von weiterem abgesehen[2]).

[1]) Anm. b. d. Korr. Es scheint dies doch auf eine Übereinstimmung erst im limes $h = 0$ hinauszulaufen, in welchem Falle dann auch die genügende Unschärfe vorhanden sein dürfte.

[2]) Anm. b. d. Korr. Der Verfasser glaubte die reziproke mittlere Lebensdauer des Anfangszustandes für die Breite einer Spektrallinie als maßgebend annehmen zu können, solange als nur ein Übergang zu dieser beiträgt. Sobald aber das erste Glied in (10) gegen das zweite verschwindet, dürften andere Verhältnisse eintreten, die daran liegen, daß die sukzessiven Übergänge dann kohärente Strahlung liefern.

Nach dem Obigen haben die Grundsätze II und III dem Sinne nach also noch die Ergänzung zu erfahren, daß für ein aus stabilen Ladungen $+e$ (mit endlicher Masse) bestehendes Modell die Genauigkeit, mit der die Beschreibung durch Koordinaten erfolgen kann, bei endlicher Lichtgeschwindigkeit eine natürliche obere Grenze hat [die nach (11) einem endlichen Werte von h entsprechen würde]. — Grundsatz III ist dann in seiner Formulierung in Strenge nur für $c = \infty$ zu verstehen. Grundsatz IV hat die Ergänzung zu erfahren, daß die Zustände der Molekel (unabhängig von h und c) zu definieren sind durch solche Parameter, die im limes $h \to 0$ $c \to \infty$ Parameter des Modells darstellen, deren Nullwert dem Zustande entspricht, in dem das Modell auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist.

Aus dem oben Auseinandergesetzten erhellt, daß das Nichtübereinstimmen der klassischen Elektrodynamik mit der Wirklichkeit im wesentlichen in der Art der Zuordnung von Parameterwerten zu einem System von Ladungen seinen Grund hat, die darauf beruht, beim Übergang von der lokalen zur substantiellen Beschreibungsweise, die Bewegung der Ladungen mit größter Annäherung aus den lokalen Erhaltungssätzen der Feldgleichungen zu folgern, was aber mit der Existenz einer Konstanten h unverträglich ist. Die Zuordnung hat vielmehr nach der Quantentheorie in einer besonderen Weise zu geschehen, was dann die Verbindung zwischen den elektromagnetischen Feldgleichungen und den Bewegungsgleichungen der Ladungen bis zum gewissen Grade aufhebt, und wodurch die Elektrodynamik dann nicht mehr in voller Ausdehnung auf die Wirklichkeit Anwendung hat.

Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke.

Von **V. Fock** in St. Petersburg.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 9. Juli 1924.)

Es wird eine neue Methode zur Berechnung der Beleuchtungsstärke von Flächen willkürlicher Form vorgelegt. Die Methode beruht auf der Anwendung des Stokesschen Satzes und gestattet, die Anzahl der nötigen Integrationen auf die Hälfte zurückzuführen. Es wird gezeigt, daß der Beleuchtungsvektor ein curl eines anderen Vektors ist, für welchen der Name „Vektorpotential der Beleuchtung" vorgeschlagen wird. Den gewonnenen Formeln wird eine geometrische Deutung gegeben. Als Beispiel wird die Beleuchtungsstärke von einer kreisförmigen und von einer elliptischen Scheibe betrachtet.

1. Es sei eine nach dem Lambertschen Gesetz gleichmäßig ausstrahlende Fläche von willkürlicher Größe und Form gegeben, sowie eine zweite Fläche, die durch die erste beleuchtet wird. Das in der vorliegenden Notiz behandelte Problem besteht in der Berechnung des gesamten auf die zweite Fläche einfallenden Lichtstroms, oder — falls die zweite Fläche sich auf ein Flächenelement reduziert — der Beleuchtungsstärke des betreffenden Flächenelements.

Fig. 1.

Das soeben erwähnte photometrische Problem wurde schon von Beer[1]) behandelt, jedoch scheint es, daß selbst neuere Autoren[2]) die Anwendbarkeit des Stokesschen Satzes auf das betrachtete Problem übersehen haben. Durch Anwendung dieses Satzes gewinnt aber nicht nur die Theorie an Eleganz und Übersichtlichkeit, sondern es vereinfachen sich auch ganz bedeutend die Rechnungen, so daß es nunmehr als möglich erscheint, eine vollständige Lösung einiger neuer Spezialfälle zu erhalten. Aus diesem Grunde dürften vielleicht die nachfolgenden Erörterungen von Interesse sein.

2. Indem wir die Helligkeit der leuchtenden Fläche gleich Eins setzen, erhalten wir für die Beleuchtungsstärke des Flächenelements P (Fig. 1) den folgenden Ausdruck:

$$E_n = \frac{1}{\pi} \int\int \frac{dS}{r^2} \cos(N, r) \cos(n, r). \qquad (1)$$

---

[1]) Beer, Grundriß des photometrischen Calcüls, S. 61. Braunschweig 1854.

[2]) Siehe z. B. S. Maysel, Verh. d. Opt. Inst. in Petrograd **3**, Heft 16, 1923, wo auch die neuere Literatur angegeben ist; unter anderem Basset Jones, Trans. Ill. Eng. Soc. **5**, 281, 1910, u. Foote, Scient. Pap. Bur. of Stand. Nr. 263.

Hier bezeichnet dS das Flächenelement der ausstrahlenden Fläche, r den Abstand zwischen dS und P, N die Normale zu dS und n die Normale zu P. Die Integration ist auf denjenigen Teil der leuchtenden Fläche zu erstrecken, welcher von P aus sichtbar ist und welcher auf der einen Seite der zum Flächenelement P geführten Tangentialebene gelegen ist. Die geschlossene Kurve, welche den soeben definierten Teil der leuchtenden Fläche von den übrigen Teilen abgrenzt, wollen wir im folgenden mit C' bezeichnen.

Bezeichnen wir ferner mit α, β, γ die Richtungskosinusse der Normale n, so wird

$$\cos(n, r) = \alpha\cos(r, x) + \beta\cos(r, y) + \gamma\cos(r, z)$$

und die Beleuchtungsstärke läßt sich in der Form

$$E_n = \alpha E_x + \beta E_y + \gamma E_z$$

schreiben, wo

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\pi}\int\int \frac{dS}{r^2}\cos(N, r)\cos(r, x), \\ E_y &= \frac{1}{\pi}\int\int \frac{dS}{r^2}\cos(N, r)\cos(r, y), \\ E_z &= \frac{1}{\pi}\int\int \frac{dS}{r^2}\cos(N, r)\cos(r, z) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ist.

Den Vektor mit den Komponenten E_x, E_y, E_z werden wir als Beleuchtungsvektor bezeichnen. Die Größe E_n erscheint dann als die zum Flächenelement P senkrechte Komponente dieses Vektors.

Wir wollen nun eine der Komponenten des Vektors E, z. B. E_x näher betrachten. Bezeichnen wir mit x', y', z' die Koordinaten des Elements dS und mit x, y, z diejenigen des Punktes P, so werden wir haben:

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

$$\cos(r, x) = \frac{x' - x}{r}, \quad \cos(r, y) = \frac{y' - y}{r}, \quad \cos(r, z) = \frac{z' - z}{r}.$$

$$\cos(N, r) = \frac{x' - x}{r}\cos(N, x) + \frac{y' - y}{r}\cos(N, y) + \frac{z' - z}{r}\cos(N, z).$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{2(x' - x)^2}{r^4}\cos(N, x) + \frac{2(x' - x)(y' - y)}{r^4}\cos(N, y) + \frac{2(x' - x)(z' - z)}{r^4}\cos(N, z)\right]dS.$$

Man ersieht, daß der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck die Projektion des Vektors mit den Komponenten

$$A = \frac{2(x' - x)^2}{r^4}, \quad B = \frac{2(x' - x)(y' - y)}{r^4}, \quad C = \frac{2(x' - x)(z' - z)}{r^4}$$

auf die Normale N zum Flächenelement dS ist. Der Vektor A, B, C ist aber, wie man leicht nachrechnet, der curl eines Vektors mit den Komponenten

$$P = 0, \qquad Q = -\frac{z'-z}{r^2}, \qquad R = \frac{y'-y}{r^2};$$

denn wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} &= \frac{2(x'-x)^2}{r^4}, \\
\frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} &= \frac{2(x'-x)(y'-y)}{r^4}, \\
\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} &= \frac{2(x'-x)(z'-z)}{r^4}.
\end{aligned}$$

Folglich können wir den Stokesschen Satz anwenden und die Größe E_x in Form eines Linienintegrals schreiben; die Ausdrücke für E_y und E_z erhält man aus E_x durch zyklische Permutation der Buchstaben x, y, z. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(y'-y)\,dz' - (z'-z)\,dy'}{r^2}, \\
E_y &= \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(z'-z)\,dx' - (x'-x)\,dz'}{r^2}, \\
E_z &= \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(x'-x)\,dy' - (y'-y)\,dx'}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus den Formeln (3) folgt unmittelbar das bekannte Resultat, daß nämlich die Beleuchtungsstärke nur von der Berandung der leuchtenden Fläche, nicht aber von deren Form abhängt.

Wir möchten hier hervorheben, daß die Funktion unter dem Integralzeichen eine rationale Funktion der Koordinaten ist.

3. Wir ziehen nun den folgenden Vektor in Betracht:

$$\left.\begin{aligned}
L_x &= -\frac{1}{2\pi}\int_C \lg r\, dx', \\
L_y &= -\frac{1}{2\pi}\int_C \lg r\, dy', \\
L_z &= -\frac{1}{2\pi}\int_C \lg r\, dz'.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Linienintegrale sind hier längs unserer früheren geschlossenen Kurve C' zu nehmen.

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial L_y}{\partial z}, \\ E_y &= \frac{\partial L_x}{\partial z} - \frac{\partial L_z}{\partial x}, \\ E_z &= \frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und

$$\frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

ist. Der Beleuchtungsvektor läßt sich hiermit als curl eines solenoidalen Vektors ausdrücken, für welchen wir den Namen „Vektorpotential der Beleuchtung" vorschlagen.

Hierbei ist zu betonen, daß der aus den Formeln (1), (3) oder (4) berechnete Ausdruck für E oder L nur für diejenigen Punkte P gültig ist, welchen ein und dieselbe Kurve C' bzw. Fläche S entspricht, nämlich die, auf welche die Integration in den betreffenden Formeln erstreckt worden ist. Außerdem muß man die in § 2 gemachte Bemerkung über die Lage der zu P geführten Tangentialebene im Auge behalten.

4. Indem wir nun zur Berechnung des Lichtstroms durch eine endliche Fläche übergehen, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß alle Punkte dieser Fläche den soeben erwähnten Bedingungen genügen, d. h. daß für alle diese Punkte die Kurve C' die nämliche ist.

Der Lichtstrom durch die Fläche S_2 wird durch das auf diese Fläche erstreckte Doppelintegral

$$J = \int\int_{S_2} [E_x \cos(n, x) + E_y \cos(n, y) + E_z \cos(n, z)]\, d S_2 \tag{7}$$

ausgedrückt; n bezeichnet die Normale zu S_2.

Wir wissen aber, daß der Vektor E ein curl ist; folglich können wir abermals den Stokesschen Satz anwenden und erhalten

$$J = \int_C (L_x dx + L_y dy + L_z dz), \tag{8}$$

wo C die Berandung der Fläche S_2 ist. In der Grenze, wenn die Fläche S_2 sich zu einem Flächenelement zusammenzieht, erhalten wir daraus wieder unsere Formeln (5).

Die unter dem Integralzeichen auftretende lineare Differentialform

$$\delta \Phi = L_x dx + L_y dy + L_z dz \tag{9}$$

ist, ihrer physikalischen Bedeutung nach, invariant gegenüber willkürlichen Koordinatentransformationen; diese Bemerkung erleichtert die Berechnung der Komponenten von L in krummlinigen Koordinaten.

Aus dem Gesagten ist es klar, daß man das Problem der Berechnung der Beleuchtungsstärke als gelöst ansehen kann, wenn die lineare Differentialform $\delta \Phi$ gefunden ist; es genügt übrigens, die letztere bis auf ein vollständiges Differential zu bestimmen.

5. Indem wir in die Formel (8) die Ausdrücke (4) für das Vektorpotential der Beleuchtung einsetzen, erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \int_C \lg r \, (dx\, dx' + dy\, dy' + dz\, dz') \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \int_C \lg r \cos (ds, ds')\, ds\, ds', \end{aligned} \tag{10}$$

die in übersichtlicher Weise den bekannten Reziprozitätssatz wiedergeben, welcher besagt, daß, wenn zwei Flächen mit gleicher Helligkeit leuchten, die Lichtmenge, die auf jede dieser Flächen von der anderen fällt, die gleiche ist.

Unsere Formeln bieten eine große Ähnlichkeit mit den bekannten Formeln der Elektrodynamik; nur ist hier die Funktion $1/r$ durch $\lg 1/r$ ersetzt.

6. Wir wollen nun die Formeln (3) einer Transformation unterwerfen, welche gestattet, ihnen eine geometrische Deutung zu geben. Wir führen nämlich in den Kurvenintegralen (3) neue Veränderliche ein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \cos (r, x) = \frac{x' - x}{r}, \\ \eta &= \cos (r, y) = \frac{y' - y}{r}, \\ \zeta &= \cos (r, z) = \frac{z' - z}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

die durch die Relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

verbunden sind.

Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \eta\, d\xi - \xi\, d\eta, \\ E_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta, \\ E_z &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \xi\, d\eta - \eta\, d\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

wo, wie aus (11) folgt, die Kurvenintegrale längs der (konischen) Projektion der Kurve C' auf die um P beschriebene Einheitskugel zu nehmen sind.

Somit erhalten wir die folgende geometrische Interpretation der Formeln (12). Man konstruiere (Fig. 2) einen Kegel mit P als Spitze, dessen Erzeugende die Kurve C' ist; man konstruiere ferner eine Einheitskugel mit P als Zentrum. Der Kegel schneidet aus der Einheitskugel ein krummliniges Flächenstück aus. Die senkrechten Projektionen dieses Flächenstückes auf die Koordinatenebenen sind dann den mit π multiplizierten entsprechenden Komponenten des Vektors E numerisch gleich. Mit anderen Worten: die Beleuchtungsstärke des Flächenelements in P ist gleich der Projektion S des obigen Flächenstückes auf der Einheitskugel, dividiert durch π.

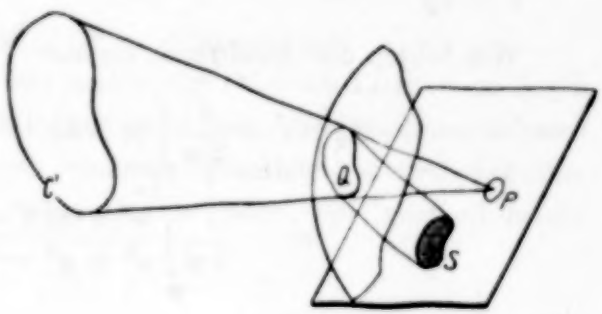


Fig. 2.

In folgendem wollen wir als Beispiel die Beleuchtungsstärke von einer kreisförmigen und einer elliptischen Scheibe betrachten. Die erstere ist offenbar ein Spezialfall der letzteren; dennoch werden wir den Fall einer kreisförmigen Scheibe gesondert betrachten, denn erstens zeichnet sich dieser Fall durch seine große Einfachheit aus, was ihn zur Veranschaulichung unserer Methode besonders geeignet macht, und zweitens kann er auch ein selbständiges Interesse bieten [1]).

[1]) Bis jetzt ist, wie es scheint, nur der Fall bekannt, wo das Flächenelement P der Scheibe parallel ist. In der zitierten russischen Arbeit von S. Maysel wird auch der allgemeine Fall betrachtet; jedoch sind die von dem genannten Autor abgeleiteten Formeln [l. c. § 3, Formeln (13) bis (16)] wegen eines Rechenfehlers unrichtig. — Die Beleuchtungsstärke von einer elliptischen Scheibe ist nur für Punkte auf der Normale zum Zentrum der Scheibe berechnet worden.

7. Als erstes Beispiel betrachten wir die von einer Scheibe mit dem Radius a erzeugte Beleuchtungsstärke.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in das Zentrum der Scheibe und richten die Achse längs der Normale. Die parametrischen Gleichungen der Kurve lauten dann:

$$x' = a\cos(t-t_0), \quad y' = a\sin(t-t_0), \quad z' = 0. \tag{13}$$

Der Abstand R (unser früheres r) ist gleich

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2a[x\cos(t-t_0) + y\sin(t-t_0)] + a^2.$$

Wir wählen t_0 so, daß das Glied mit $\sin t$ verschwindet, und bezeichnen $\sqrt{x^2+y^2}$ mit ϱ.

Dann ist

$$\sin t_0 = -\frac{y}{\varrho}, \qquad \cos t_0 = \frac{x}{\varrho},$$

$$R^2 = z^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos t + a^2, \qquad R\,dR = a\varrho\sin t\,dt,$$

$$x' = \frac{a}{\varrho}(x\cos t - y\sin t), \qquad y' = \frac{a}{\varrho}(x\sin t + y\cos t).$$

Wir bilden die Ausdrücke für das Vektorpotential der Beleuchtung

$$L_x = -\frac{1}{2\pi}\int \lg R\,dx' = \frac{1}{2\pi}\int \frac{x'\,R\,dR}{R^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2(x\cos t - y\sin t)\sin t\,dt}{z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos t + a^2}$$

oder

$$L_x = -\frac{a^2 y}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos t + a^2}.$$

Auf analoge Weise erhält man:

$$L_y = +\frac{a^2 x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos t + a^2}.$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos t + a^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2\varrho^2}\{z^2+\varrho^2+a^2 - \sqrt{(z^2+\varrho^2+a^2)^2 - 4a^2\varrho^2}\},$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Zeichen zu nehmen ist. Man erhält also für das Vektorpotential die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -\frac{y}{4(x^2+y^2)}\{x^2+y^2+z^2+a^2 \\ &\qquad -\sqrt{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}\}, \\ L_y &= +\frac{x}{4(x^2+y^2)}\{x^2+y^2+z^2+a^2 \\ &\qquad -\sqrt{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}\}, \\ L_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und durch Differentiation erhält man den Beleuchtungsvektor

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial L_z}{\partial y}-\frac{\partial L_y}{\partial z} = -\frac{xz}{2(x^2+y^2)}\left\{1-\frac{r^2+a^2}{\sqrt{(r^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}}\right\}, \\ E_y &= \frac{\partial L_x}{\partial z}-\frac{\partial L_z}{\partial x} = -\frac{yz}{2(x^2+y^2)}\left\{1-\frac{r^2+a^2}{\sqrt{(r^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}}\right\}, \\ E_z &= \frac{\partial L_y}{\partial x}-\frac{\partial L_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left\{1-\frac{r^2-a^2}{\sqrt{(r^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo jetzt zur Abkürzung $r^2 = x^2+y^2+z^2$ gesetzt ist.

Wir wollen nun mit Hilfe der Ausdrücke (14) den Lichtstrom durch eine zweite Scheibe vom Radius b berechnen: zur Vereinfachung nehmen wir dabei an, daß beide Scheiben einander parallel sind und daß ihre Zentren auf ihrer gemeinsamen Achse sich befinden: der Abstand beider Scheiben sei z.

Wir haben dann

$$J = \int_C L_x dx + L_y dy + L_z dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\{a^2+x^2+y^2+z^2-\sqrt{(a^2+x^2+y^2+z^2)^2-4a^2(x^2+y^2)}\},$$

also

$$J = \frac{\pi}{2}\{a^2+b^2+z^2-\sqrt{(a^2+b^2+z^2)^2-4a^2b^2}\}. \tag{16}$$

Der erhaltene Ausdruck ist, wie es auch sein muß, in bezug auf a und b symmetrisch.

8. Als zweites Beispiel wollen wir die Beleuchtungsstärke einer Ellipse mit den Halbachsen a und b berechnen.

Der Koordinatenursprung falle mit dem Zentrum der Ellipse zusammen, die x-Achse sei längs der großen und die y-Achse längs der kleinen Achse der Ellipse gerichtet.

Die parametrischen Gleichungen für die Kurve C' sind in unserem Falle

$$x' = a\cos t, \qquad y' = b\sin t, \qquad z' = 0. \tag{17}$$

Der Abstand R des Punktes x, y, z vom laufenden Punkte auf der Kurve ist

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax\cos t + by\sin t) + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t \\ &= r^2 + a^2 - 2(ax\cos t + by\sin t) - c^2\sin^2 t, \end{aligned}$$

wo gesetzt ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad c^2 = a^2 - b^2,$$

so daß r den Abstand vom Zentrum der Ellipse und c ihre Exzentrizität bezeichnet.

Wir bilden die Ausdrücke für das Vektorpotential

$$L_x = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg R\sin t\,dt = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lg R}{dt}\cos t\,dt,$$

$$L_y = -\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg R\cos t\,dt = \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lg R}{dt}\sin t\,dt.$$

Die Auswertung dieser beiden Integrale reduziert sich auf die Auswertung eines komplexen Integrals

$$J = \frac{1}{a}L_x + \frac{1}{b}L_y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lg R}{dt}e^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ax\sin t - by\cos t - c^2\sin t\cos t}{r^2 + a^2 - 2(ax\cos t + by\sin t) - c^2\sin^2 t}e^{it}\,dt,$$

wo die Funktion unter dem Integralzeichen rational von e^{it} abhängt. Wir setzen in der Tat

$$e^{it} = \xi$$

und erhalten

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{ic^2\xi^4 - 2(axi + by)\xi^3 + 2(axi - by)\xi - ic^2}{c^2\xi^4 - 4(ax - byi)\xi^3 - 2(2r^2 + 2a^2 - c^2)\xi^2 - 4(ax + byi)\xi + c^2}\,d\xi. \quad (*)$$

Der Integrationsweg ist hier der um den Koordinatenursprung der komplexen ξ-Ebene beschriebene Einheitskreis. Das Integral ist gleich der Summe der Residuen, welche sich auf diejenigen Wurzeln des Nenners beziehen, die innerhalb des Einheitskreises liegen. Wir müssen also die komplexen Wurzeln des Nenners ermitteln.

Zu diesem Zweck führen wir mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} + \frac{z^2}{\lambda - a^2} = 1 \tag{18}$$

elliptische Koordinaten[1]) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein, wobei

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq c^2 \leqq \lambda_2 \leqq a^2 \leqq \lambda_3 < \infty$$

ist.

Um Irrationalitäten in den Ausdrücken für x und y zu vermeiden, führen wir weitere drei Variable $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein:

$$\lambda_1 = c^2 \cos^2 \sigma_1, \qquad \lambda_2 = c^2 ch^2 \sigma_2, \qquad \lambda_3 = c^2 ch^2 \sigma_3, \tag{19}$$

wo

$$\sigma_3 \geqq \frac{1}{2} \lg \frac{a+b}{a-b} \geqq \sigma_2 \geqq 0$$

ist. Dann ist

$$\frac{ax}{c^2} = \cos \sigma_1 ch \sigma_2 ch \sigma_3,$$

$$\frac{by}{c^2} = \sin \sigma_1 sh \sigma_2 sh \sigma_3.$$

Bezeichnen wir den Nenner im Integral (*) mit $c^2 f(\xi)$ und führen wir die Größen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein, so erhalten wir für $f(\xi)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} f(\xi) = {} & \xi^4 - 4(\cos \sigma_1 ch \sigma_2 ch \sigma_3 - i \sin \sigma_1 sh \sigma_2 sh \sigma_3) \xi^3 \\ & + 2(2 \cos^2 \sigma_1 + 2 ch^2 \sigma_2 + 2 ch^2 \sigma_3 - 3) \xi^2 \\ & - 4(\cos \sigma_1 ch \sigma_2 ch \sigma_3 + i \sin \sigma_1 sh \sigma_2 sh \sigma_3) \xi + 1. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich aber ohne Mühe, daß

$$f(\xi) = (\xi - e^{-i\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3})(\xi - e^{i\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3})(\xi - e^{i\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3})(\xi - e^{-i\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3})$$

ist. Wir haben also alle Wurzeln von $f(\xi)$ gefunden.

Jetzt bietet die Auswertung des Integrals (*) keine Schwierigkeiten mehr und man erhält

$$J = e^{-\sigma_3}(-\sin \sigma_1 sh \sigma_2 + i \cos \sigma_1 ch \sigma_2),$$

woraus

$$L_x = -ae^{-\sigma_3} \sin \sigma_1 sh \sigma_2,$$

$$L_y = \quad be^{-\sigma_3} \cos \sigma_1 ch \sigma_2$$

folgt.

---

[1]) C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 198. Berlin 1884.

Um die Komponenten L_1, L_2, L_3 des Vektorpotentials in den Koordinaten σ_1, σ_2, σ_3 zu ermitteln, transformieren wir unsere lineare Differentialform $\delta\Phi$ und erhalten

$$\delta\Phi = \frac{c^2}{4}(sh\,2\sigma_2\,d\sigma_1 + \sin 2\sigma_1\,d\sigma_2) + d\left(-\frac{c^2}{8}\sin 2\sigma_1\,sh\,2\sigma_2 e^{-2\sigma_3}\right).$$

Indem wir von dem vollständigen Differential absehen, können wir auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \delta\Phi &= \frac{c^2}{4}\int sh\,2\sigma_2 d\sigma_1 + \sin 2\sigma_1 d\sigma_2, \\ L_1 &= \frac{c^2}{4} sh\,2\sigma_2, \qquad L_2 = \frac{c^2}{4}\sin 2\sigma_1, \qquad L_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Diese Formeln bilden die vollständige Lösung unseres Problems.

Der Lichtstrom durch eine endliche Fläche ist also:

$$\frac{c^2}{4}\int (sh\,2\sigma_2 d\sigma_1 + \sin 2\sigma_1 d\sigma_2).$$

Ist z. B. die betreffende Fläche ein (sonst willkürlicher) Querschnitt der vom einschaligen Hyperboloid $\sigma_2 = \text{const}$ gebildeten Röhre, so ist der totale Lichtstrom durch diese Fläche gleich

$$\frac{\pi}{2} c^2 sh\,2\sigma_2 = \pi\sqrt{\lambda_2(\lambda_2 - c^2)}. \tag{21}$$

Zur Bestimmung der Beleuchtungsstärke berechnen wir zunächst den verallgemeinerten Vektor E. Wir haben

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial L_3}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial L_2}{\partial \sigma_3} = 0, \\ E_2 &= \frac{\partial L_1}{\partial \sigma_3} - \frac{\partial L_3}{\partial \sigma_1} = 0, \\ E_3 &= \frac{\partial L_2}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial L_1}{\partial \sigma_2} = \frac{c^2}{2}(\cos 2\sigma_1 - ch\,2\sigma_2). \end{aligned}$$

Daraus können wir nach den bekannten Formeln den physikalischen Vektor E berechnen und erhalten somit das Ergebnis:

Der Beleuchtungsvektor steht überall senkrecht zu dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\lambda_3} + \frac{y^2}{\lambda_3 - c^2} + \frac{z^2}{\lambda_3 - a^2} = 1, \qquad \lambda_3 > a^2$$

und ist der absoluten Größe nach gleich

$$E = \sqrt{\frac{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}}. \tag{22}$$

Zum Schluß mögen noch einige Spezialfälle erwähnt werden, wo die kubische Gleichung für λ sich auf eine quadratische reduziert:

$$\text{I. } x = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2+y^2+z^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+y^2+z^2)^2 - 4b^2y^2}, \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(a^2+c^2+y^2+z^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+y^2+z^2)^2 - 4b^2y^2}. \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{II. } y = 0 \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(a^2+x^2+z^2) \quad - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+x^2+z^2)^2 - 4a^2x^2}, \\ \lambda_2 = c^2, \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(a^2+x^2+z^2) \quad + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+x^2+z^2)^2 - 4a^2x^2}. \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{III. } c = 0 \begin{cases} \lim\limits_{c \to 0} \dfrac{\lambda_1}{c^2} = \lim \cos^2 \sigma_1 = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(a^2+r^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+r^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2)}, \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(a^2+r^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+r^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2)}. \end{cases} \quad (25)$$

Im letzten Falle fallen unsere Formeln mit denjenigen des vorhergehenden Beispiels zusammen.

St. Petersburg, Optisches Institut, April 1924.

Die Verallgemeinerung des „Hyperbelsatzes der geometrischen Optik".

Von **Stephan Bodócs** in Györ (Ungarn).

Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1924.)

Der Hyperbelsatz der geometrischen Optik behält seine Gültigkeit auch dann, wenn der Gegenstand eine mit dem optischen System proportionale, translatorische Bewegung längs der optischen Achse ausführt. Zwischen den dioptrischen und katoptrischen Systemen ist kein wesentlicher Unterschied vorhanden, denn beide Hyperbelformen können bei jedem optischen System vorkommen.

Es ist uns gelungen, allgemein zu beweisen, daß der geometrische Ort der optischen Bilder irgend eines Punktes von fester räumlicher

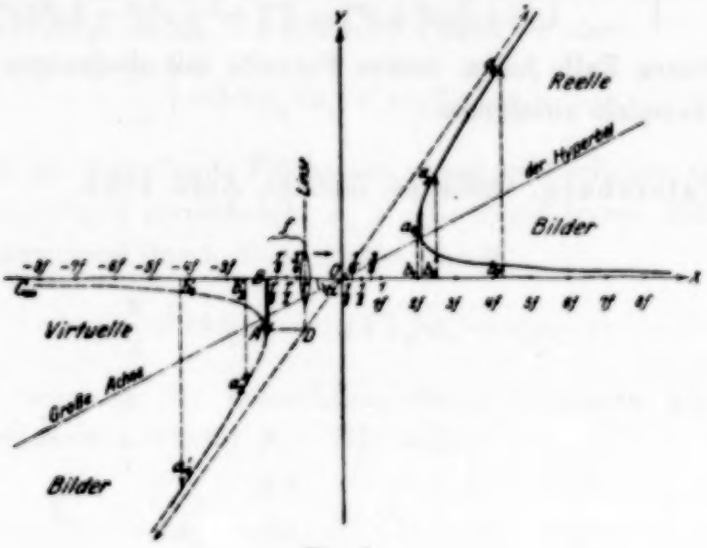


Fig. 1.

Lage eine Hyperbel ist, wenn das optische System längs seiner optischen Achse translatorisch bewegt wird [1]). Wir haben auch gesehen, daß die räumliche Lage der Hyperbel im Falle von Linsen eine ganz andere ist (Fig. 1), als im Falle von Spiegeln (Fig. 2), und dieser zwischen Linsen und Spiegeln auftretende Unterschied war scheinbar tiefgehend, denn es gehörte zu einem und demselben Schirmabstande bei den Spiegeln nur ein einziges scharfes Bild, bei den Linsen dagegen gehören hierzu zwei Bilder von verschiedener Vergrößerung, ferner zeigt die Bildbewegungsrichtung bei den Linsen einen Wendepunkt, bei den Spiegeln aber keinen.

In folgendem werden wir nachweisen, daß dieser Unterschied zwischen den Kugelspiegeln und Linsen nicht als grundsätzlich be-

[1]) ZS. f. Phys. **23**, 69—76, 1924.

trachtet werden kann, denn beide Hyperbelformen können bei jedem optischen System vorkommen, wenn wir die Bedingung der festen Gegenstandslage fallen lassen.

Wir werden also beweisen, daß der Hyperbelsatz der geometrischen Optik seine Gültigkeit auch dann behält, wenn der Gegenstand eine mit

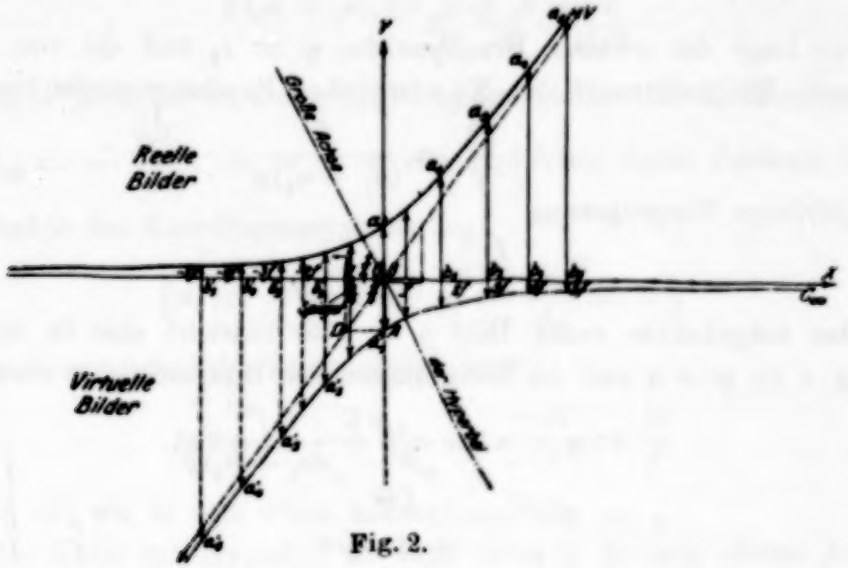


Fig. 2.

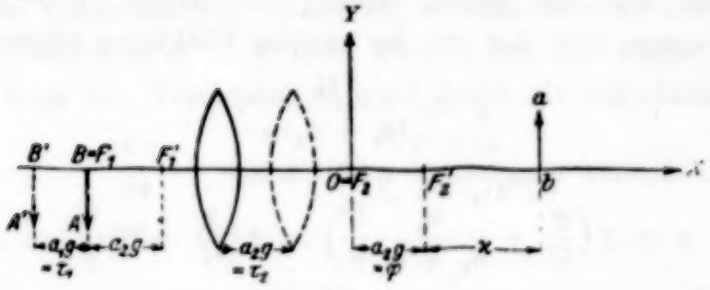


Fig. 3.

dem optischen System proportionale, translatorische Bewegung längs der optischen Achse ausführt. Die Bezeichnungen und das gebrauchte Koordinatensystem bleiben dieselben, wie in meinem ersten Aufsatze.

Besserer Übersicht halber teilen wir unsere Untersuchung auch jetzt in zwei Teile.

A. Dünne Linsen.

I. Gegenstand und Linse bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Der Anfangspunkt O unseres rechtwinkligen Koordinatensystems XY sei die Lage des zweiten Brennpunktes F_2 in dem Moment, wenn der erste Brennpunkt F_1 den Gegenstand $AF_1 = G$ passiert (Fig. 3). Der Gegenstand befindet sich also beim Beginn der Bewegung in dem ersten Brennpunkte! Verschiebt sich der Gegenstand

mit dem veränderlichen Werte $\tau_1 = a_1 g(t)$ nach links, die Linse mit $\tau_2 = a_2 g(t)$ nach rechts, wo a_1 und a_2 Konstanten sind, $g(t) = g$ aber eine beliebige Funktion der Zeit t ist, in der Richtung der Abszissenachse, so wird die von der jeweiligen Lage F_1' des ersten Brennpunktes gerechnete Gegenstandsweite

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = (a_1 + a_2) g$$

die neue Lage des zweiten Brennpunktes $\varphi = \tau_2$ und die von diesem gerechnete Bildweite nach der Newtonschen Fundamentalgleichung

$$\varkappa = \frac{f^2}{\tau} = \frac{f}{(a_1 + a_2) g}$$

die zugehörige Vergrößerung

$$V = \frac{f}{\tau} = \frac{f}{(a_1 + a_2) g}.$$

Das umgekehrte reelle Bild $y = VG$ entsteht also in der Entfernung $x = \varphi + \varkappa$ und die Koordinaten des Bildpunktes a werden

$$x = \varphi + \varkappa = a_2 g + \frac{f^2}{(a_1 + a_2) g},$$

$$y = VG = \frac{fG}{(a_1 + a_2) g}.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die veränderliche Funktion g, indem man den aus der zweiten Gleichung folgenden Wert

$$g = \frac{fG}{(a_1 + a_2) y}$$

in die erste Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$x = f\left(\frac{y}{G} + \frac{a_2}{a_1 + a_2}\frac{G}{y}\right) = f\left(\frac{y}{G} + K\frac{G}{y}\right),$$

wo der Faktor

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_2}}$$

die Rolle eines Parameters spielt.

Auf Null reduziert, ergibt sich

$$y^2 - \frac{G}{f} xy + KG^2 = 0. \tag{1}$$

Die Determinante dieser quadratischen Gleichung ist

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{G}{2f} & 0 \\ -\frac{G}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & KG^2 \end{vmatrix}$$

Aufgelöst nach den Unterdeterminanten der letzten Zeile,

$$A = 0\underset{A_{31}}{|0|} - 0\underset{A_{32}}{|0|} + K G^2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{G}{2f} \\ -\frac{G}{2f} & 1 \end{vmatrix} = -K\frac{G^4}{4f^2}$$

$$A_{33} = -\frac{G^2}{4f^2}$$

Da $A \neq 0$, so ist der gesuchte geometrische Ort ein Kegelschnitt; weil $A_{33} = -\frac{G^2}{4} < 0$, so ist er eine Hyperbel, deren Zentrum im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegt

$$\left(x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = 0, \quad y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} = 0\right)$$

und deren asymptotische Richtungstangente

$$tg\,2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-G}{-f} = \frac{G}{f}$$

dieselbe ist, wie in dem schon bekannten Falle.

Die Form der Hyperbel ist auch dem in meinem ersten Aufsatze behandelten Grenzfalle (Fig. 1) ähnlich, welchen man aus der Gleichung (1) mit der Substitution $a_1 = 0$ bzw. $K = 1$ erhalten kann.

Die Lage des Wendepunktes wird durch die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = a_2 g'(t) - \frac{f^2 g'(t)}{(a_1 + a_2) g^2(t)} = 0$$

bestimmt, aus welcher folgt

$$g(t) = \frac{f}{\sqrt{a_2(a_1 + a_2)}}$$

und die zugehörige Abszisse

$$x = 2f\sqrt{K}.$$

Für unsere Hyperbel ist charakteristisch, daß ihre Form und Lage auch bei sehr verschiedenen Bewegungen dieselbe bleiben kann! In der Gleichung (1) ist nämlich der als Parameter vorkommende Faktor

$$K = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_2}} \tag{2}$$

ganz unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der Bewegungsfunktion $g(t)$, sein Betrag hängt also nicht von dem absoluten Wert der Verschiebungen ab, sondern nur von Quotienten derselben. Demzufolge ist

die Form und räumliche Lage der Hyperbel als Funktion dieses Quotienten zu betrachten und deshalb wollen wir den Ausdruck K Formfaktor nennen.

Die zu einer beliebigen

$$x = nf$$

räumlichen Lage gehörenden Ordinatenwerte sind durch die Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - n G y + K G^3 = 0$$

bestimmt, und die entsprechenden Vergrößerungen gewinnen wir durch Substitution

$$\frac{y}{G} = V$$

aus der Gleichung

$$V^3 - n V + K = 0, \tag{3}$$

deren Wurzeln

$$V_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}$$

sind. Das Produkt der Wurzeln ist

$$V_1 V_2 = K$$

und die zu der Lage des Wendepunktes

$$x = 2f\sqrt{K} \tag{4}$$

gehörende Vergrößerung ist

$$V = \sqrt{K}.$$

Bei der praktischen Konstruktion der Hyperbel ist es zweckmäßiger, die zu den gegebenen ν-maligen Vergrößerungen gehörenden Abszissen bzw. n-Werte auszurechnen. In diesem Falle muß sich die Bedingung

$$\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K} = \nu$$

erfüllen, aus welcher

$$n = \nu + \frac{K}{\nu}$$

folgt.

Demgemäß können wir voraussagen, daß die $(1, 2, 3 \ldots \nu)$-maligen Vergrößerungen zu den räumlichen Lagen

$$x = \left(1 + \frac{K}{1},\quad 2 + \frac{K}{2},\quad 3 + \frac{K}{3},\quad \ldots,\quad \nu + \frac{K}{\nu}\right) f$$

gehören und so kann unsere Hyperbel spielend leicht konstruiert werden.

Im vorliegenden Falle ist der Formfaktor

$$K = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_2}}$$

immer positiv und dem absoluten Werte nach $|K| < 1$.

Demzufolge ist der Wendepunkt im Sinne des Zusammenhanges

$$x = 2f\sqrt{K}$$

näher dem Hyperbelzentrum, als in dem Grenzfalle $a_1 = 0$, und auch die Vergrößerungen, die zu derselben räumlichen Lage gehören, sind andere. Die Abweichung ist derartig, daß die vergrößerten Bilder größer, die verkleinerten hingegen kleiner sind, als in dem auf der Fig. 1 ersichtlichen Grenzfalle, die Lage der Asymptote bleibt aber unverändert dieselbe.

In jenem Spezialfalle, wenn der Gegenstand und die Linse sich in entgegengesetzter Richtung, sonst aber ganz gleicherweise bewegen, ist $a_1 = a_2$ und der Formfaktor $K = \frac{1}{2}$, wie immer auch der zeitliche Verlauf der Bewegungen beschaffen sei.

II. Gegenstand und Linse bewegen sich in derselben Richtung. Wenn Gegenstand und Linse sich in derselben Richtung bewegen, muß man je nach den relativen Größen der Faktoren a_1 und a_2 drei Fälle berücksichtigen, weil die Form und die Lage der Hyperbel in den einzelnen Fällen sehr verschieden sind.

1. $a_1 < a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich langsamer, als die Linse.

In diesem Falle sei die Linsenverschiebung nach t Sekunden in positiver Richtung $\tau_2 = a_2 \cdot g(t)$, die Verschiebung des Gegenstandes in derselben Richtung $\tau_1 = a_1 g(t)$, dann wird die von dem ersten Brennpunkt aus gerechnete Gegenstandsweite

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = (a_2 - a_1) g(t).$$

Da die räumliche Lage des zweiten Brennpunktes jetzt

$$\varphi = \tau_2$$

ist, so wird der Ausdruck des Formfaktors

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = \frac{a_2}{a_2 - a_1} = \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a_2}} > 1$$

sein.

Die Hyperbel ist also noch immer dem Grenzfall $a_1 = 0$ bzw. $K = 1$ ähnlich, aber die zu einem und demselben Schirmabstande ge-

hörigen Vergrößerungen sind andere und auch der Wendepunkt liegt von dem Zentrum der Hyperbel weiter entfernt, als im vorigen Falle, die Lage und Richtung der Asymptote bleibt aber in allen möglichen Fällen absolut invariant.

2. $a_1 > a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich schneller als die Linse.

Daß der schneller fortschreitende Gegenstand die Bewegung der Linse schließlich nicht stören könne, wollen wir in unserem Koordinatensystem die Bewegungsrichtung negativ wählen.

Es sei die Verschiebung des Gegenstandes nach der Zeit t in negativer Richtung $\tau_1 = a_1 g(t)$, die Linsenverschiebung in derselben Richtung $\tau_2 = a_2 g(t)$, dann wird die entsprechende Gegenstandsweite

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = (a_1 - a_2) g(t)$$

und die Lage des zweiten Brennpunktes $\varphi = -\tau_2$. Infolgedessen ist der Ausdruck des Formfaktors jetzt

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = -\frac{a_2}{a_1 + a_2} = -\frac{1}{\frac{a_1}{a_2} - 1}.$$

Da hier $a_1 > a_2$ ist, so wird der Formfaktor im vorliegenden Falle negativ sein und dieser Umstand verändert die Form und Lage der Hyperbel wesentlich! Da $\sqrt{K}$ jetzt eine imaginäre Größe ist, so hat die Hyperbel keinen Wendepunkt, sondern die Bilder von immer mehr abnehmenden Vergrößerungen nähern sich kontinuierlich der optischen Achse und die Bildbewegungsrichtung stimmt mit der Richtung der Linsenverschiebung immer überein. Zu jedem Schirmabstande gehören also nur ein einziges scharfes Bild und eine einzige Vergrößerung

$$V = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + |K|}.$$

Einen physikalischen Sinn haben daher die positiven Werte von V nur bei reellen, die negativen nur bei virtuellen Bildern.

Der Wert des Formfaktors kann je nach dem Verhältnis der Gegenstands- und Linsenverschiebung a_1/a_2 sehr verschieden sein und im speziellen Falle von

$$a_1 = 2\, a_2$$

beträgt

$$K = -1.$$

Wir sind also zu jenem sehr interessanten und unerwarteten Resultat gelangt, daß die in Fig. 2 abgebildete und in meinem ersten

Aufsatz ausführlich behandelte Hyperbel der Hohlspiegel (welche scheinbar dem Spezialfalle der fixen Gegenstandslage angehört) sich mit Sammellinsen auch darstellen läßt, wenn wir die beschränkende Bedingung der festen Gegenstandslage fallen lassen und den Gegenstand mit zweimal so großer Geschwindigkeit bewegen, wie die Linse.

3. $a_1 = a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich gleicherweise, wie die Linse.

In diesem Falle ist die relative Lage des Gegenstandes und der Linse während des ganzen Verlaufs der Bewegung unverändert, demzufolge bleiben die Gegenstandsweite und mit dieser auch die Vergrößerung immer dieselben. Geschieht also der Ausgang von irgend einer relativen Lage, so wird der geometrische Ort der optischen Bilder durch eine mit der optischen Achse parallele Gerade vorgestellt werden.

Aus den bisherigen Auseinandersetzungen ist offenbar ersichtlich, daß der Hyperbelsatz der geometrischen Optik im Falle von miteinander proportionalen Bewegungen eine allgemeine Gültigkeit besitzt und die sämtlichen denkbaren Hyperbeln sich in der Formel

$$x = f\left(\frac{y}{T} + K\frac{T}{y}\right)$$

zusammenfassen lassen. Die Form und Lage der Hyperbeln hängt ausschließlich von dem Werte des Formfaktors K bzw. von dem konstanten Quotienten a_1/a_2 der Verschiebungen ab.

Solange K positiv ist, zeigen die Hyperbeln einen Wendepunkt [1]) und die einfachste Form wird im speziellen Falle $K = 1$ bzw. $a_1 = 0$ erhalten. Ist dagegen der Formfaktor negativ, so haben die Hyperbeln keinen Wendepunkt mehr und die am leichtesten konstruierbare Form ergibt sich jetzt im besonderen Falle $K = -1$ bzw. $a_1 = 2a_2$.

Der Übergang zwischen den beiden Hyperbelformen wird durch den längst bekannten Fall $K = 0$ bzw. $a_2 = 0$ (Linse mit fester Lage!) repräsentiert, weil dann die Hyperbel zu einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden degeneriert. Diese Gerade stellt samt der optischen Achse die beiden gemeinsamen Asymptoten der zweierlei Hyperbelscharen vor.

---

[1]) Es ist leicht nachzuweisen, daß die Wendepunkte der sämtlichen Hyperbeln auf einer und derselben Geraden liegen!

B. Dünne sphärische Spiegel mit kleiner Öffnung.

Da der Gegenstand und sein reelles Bild (im Gegensatz zu den Linsen!) immer auf eine und dieselbe Seite des Hohlspiegels fallen, so wird es zweckmäßig sein, die Bewegungsrichtung des Spiegels im allgemeinen negativ zu wählen, wenn die vergrößerten reellen Bilder in das positive Viertel des Koordinatensystems gelangen sollen.

Die einzelnen Bewegungsfälle sollen in derselben Reihenfolge auseinandergesetzt werden, wie bei den Linsen; um aber unnötige Wiederholungen möglichst vermeiden zu können, wollen wir uns nur auf die wichtigsten Momente beschränken.

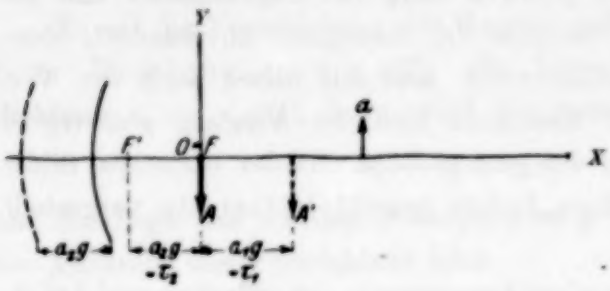


Fig. 4.

I. Gegenstand und Spiegel bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Es sei in Fig. 4 der Anfangspunkt O des Koordinatensystems die Lage des Brennpunktes F in dem Moment, wo der Gegenstand $AO = G$ eben diese passiert. Erfolgt die Verschiebung des Gegenstandes nach t Sekunden in positiver Richtung $\tau_1 = a_1 \cdot g(t)$, die des Spiegels in negativer Richtung $\tau_2 = a_2 g(t)$, so wird die Gegenstandsweite (von der jeweiligen Lage F' des Brennpunktes aus gerechnet!)

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = (a_1 + a_2)\, g,$$

die neue Lage des Brennpunktes $\varphi = -\tau_2 = -a_2 g$, die Bildweite $x = \frac{f^2}{\tau}$, die Vergrößerung $V = \frac{f}{\tau}$. Die Koordinaten des Bildpunktes a werden also

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi + x = -a_2 g + \frac{f^2}{(a_1 + a_2)\, g}, \\ y &= V G = \frac{f}{(a_1 + a_2)\, g}\, G. \end{aligned}\right\}$$

Nach Elimination der veränderlichen Zeitfunktion g erhält man wieder

$$x = f\left(\frac{y}{G} - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\,\frac{G}{y}\right) = f\left(\frac{y}{G} + K\,\frac{G}{y}\right),$$

wo der Ausdruck des Formfaktors

$$K = -\frac{a_2}{a_1 + a_2} = -\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_2}} = \frac{\varphi}{\tau}$$

jetzt negativ[1]) und der absoluten Größe nach $|K| < 1$ ist. Der geometrische Ort der Spiegelbilder ist also auch jetzt eine Hyperbel und sie gehört zu der Gruppe A. II. 2. ohne Wendepunkt.

II. Gegenstand und Spiegel bewegen sich in derselben Richtung.

1. $a_1 < a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich langsamer als der Spiegel.

In diesem Falle hat die Gegenstandsverschiebung ein entgegengesetztes Vorzeichen als vorher, und es ist leicht einzusehen, daß jetzt die folgenden Beziehungen

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = (a_2 - a_1)\, g$$

und

$$\varphi = -\tau_2 = -a_2 g$$

gelten.

Der Formfaktor ist also in diesem Falle

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = -\frac{a_2}{a_2 - a_1} = -\frac{1}{1 - \frac{a_1}{a_2}}$$

noch immer negativ[1]), aber dem absoluten Betrage nach schon $|K| > 1$. Unsere Hyperbel gehört also noch immer zu der Gruppe A. II. 2. ohne Wendepunkt.

2. $a_1 > a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich schneller als der Spiegel.

Um die früher oder später, aber schließlich sicher eintretende gegenseitige Störung der beiden Bewegungen vermeiden zu können, wählen wir jetzt in unserem Koordinatensystem die Bewegungsrichtung positiv. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = (a_1 - a_2)\, g,$$
$$\varphi = \tau_2 = a_2 g,$$

und so ist

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = \frac{a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} - 1}.$$

Der Formfaktor ist also jetzt schon positiv[2]) und kann zwischen 0 und $+\infty$ jeden endlichen Wert annehmen. Unsere Hyperbel gehört also zu der Gruppe A. 1. mit Wendepunkte und nimmt im speziellen Falle von

$$a_1 = 2\, a_2$$

den Wert

$$K = 1$$

[1]) Bei den Linsen war er positiv!
[2]) Bei den Linsen war er negativ!

an. Wir sind also zu jenem sehr interessanten Resultat gelangt, daß die in Fig. 1 abgebildete und in meinem ersten Aufsatze ausführlich behandelte Hyperbel der Linsen (welche scheinbar dem Spezialfalle der fixen Gegenstandslage angehört!) sich mit sphärischem Spiegel auch darstellen läßt, wenn der Gegenstand mit zweimal so großer Geschwindigkeit bewegt wird, wie der Spiegel.

Dieses Resultat ist hinsichtlich des Hyperbelsatzes von besonderer Wichtigkeit und bedeutet eine sehr wertvolle Erweiterung seines Gültigkeitsbereiches, denn auf den ersten Blick sollte man meinen, daß die fragliche Hyperbel ausschließlich zu dem Spezialfalle der bewegten Linse und des unbewegten Gegenstandes gehört.

3. $a_1 = a_2$, d. h. der Gegenstand bewegt sich gleicherweise wie der Spiegel.

In diesem Falle behalten beide Körper bei ihrer Bewegung immer denselben Abstand voneinander, es findet also keine relative Verschiebung zwischen dem Gegenstande und dem Spiegel statt, daher bleibt die Gegenstandsweite samt der Vergrößerung konstant. Geschieht also der Ausgang von irgend einer relativen Lage, so beschreiben die Bildpunkte mit der optischen Achse parallele Gerade in dem Raume.

Zusammenfassung der Resultate. Wir sind auf Grund der bisherigen Untersuchungen zu dem Resultat gelangt, daß der „Hyperbelsatz der geometrischen Optik“ seine Gültigkeit für den Fall von miteinander proportionalen Bewegungen auch bei den sphärischen Spiegeln behält. Zwischen den beiden optischen Systemen ergibt sich daher im ganzen der einzige Unterschied, daß im Falle von Spiegeln das Vorzeichen des Formfaktors bei einer und derselben relativen Bewegung (wegen der verschiedenen Lage des Objekt- und Bildraumes!) jenem bei den Linsen immer entgegengesetzt ist.

Als Endergebnis können wir also festsetzen, daß zwischen den dioptrischen und katoptrischen Systemen kein wesentlicher Unterschied aus dem Gesichtspunkte des Hyperbelsatzes vorhanden ist, denn beide Hyperbelformen können bei jedem optischen System vorkommen, wenn die translatorischen Verschiebungen des Gegenstandes und des optischen Systems parallel und miteinander proportional sind.

Nachdem wir so einen Überblick über die unendliche Menge der Hyperbeln von verschiedener Form und räumlicher Lage gegeben und durch die Einführung des Begriffes des „Formfaktors“ in den äußerst

kompliziert erscheinenden Möglichkeiten eine Ordnung geschaffen haben, wollen wir die den Werten

$$K = \pm\tfrac{1}{4}, \pm\tfrac{1}{3}, \pm 1, \pm 4, \pm 9$$

entsprechenden Hyperbeln in Fig. 5 auch graphisch darstellen.

In dieser Zeichnung repräsentieren die stark ausgezogenen Kurven den geometrischen Ort der reellen, die übrigen dagegen den der virtuellen Bilder im Falle von Gegenstandsgröße $AB = G$. Für dispansive optische Systeme [1]) kommt nur jener Teil der Hyperbeln in Frage, wo $V < 1$ ist, denn die virtuellen Bilder können bei diesen selbstverständlich nur verkleinert sein.

Im Moment des Ausganges ist die Lage des Gegenstandes im Falle von Linsen AB, im Falle von Spiegeln $A'O$. Das optische Instrument befindet sich zur selben Zeit in der Lage $x = -f$ und beginnt seine Bewegung gleichzeitig mit dem Gegenstande.

Die Schar der beiden Hyperbelformen [2]) ist durch die mit Pfeil bezeichneten Asymptoten OS und OX voneinander getrennt. Erstere als geometrischer Ort

$$y = \frac{G}{f}\,x$$

entspricht dem Spezialfalle des bewegten Gegenstandes und unbewegten optischen Systems und kann als eine degenerierte Hyperbel angesehen werden, deren Formfaktor $K = 0$ ist. Vor dem Erscheinen unseres ersten Aufsatzes war nur dieser einzige geometrische Ort der optischen Bilder bekannt, daher bedeutet mein Hyperbelsatz eine sehr interessante Erweiterung des Forschungsbereiches, denn, wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, gehört (im Falle von gegebenem Gegenstand und optischem System!) zu jedem Wert des Formfaktors eine, und zwar nur eine einzige Hyperbel und jede von diesen entspricht einer bestimmten, durch den Formfaktor charakterisierten Relativbewegung [3]). Alle diese Hyperbeln bilden also eine unendliche Kurvenschar, die sich in der leicht bemerkbaren Gleichung

$$x = f\left(\frac{y}{T} + K\,\frac{T}{y}\right)$$

zusammenfassen läßt.

An dieser Stelle mag noch darauf hingewiesen werden, daß die in meinem ersten Aufsatze ausführlich behandelten einfachen Hyperbel-

[1]) Konkavlinsen und Konvexspiegel.

[2]) Ihr Formfaktor ist positiv oder negativ.

[3]) Es geht also durch einen beliebig angenommenen Punkt der Zeichnungsebene immer eine Hyperbel durch!

konstruktionen, welche die zur fixen Gegenstandslage gehörigen Spezialfälle des allgemeinen Gesetzes darstellen, in gewisser Hinsicht noch interessanter sind, als der allgemeine Satz selbst. Im allgemeinen hängt

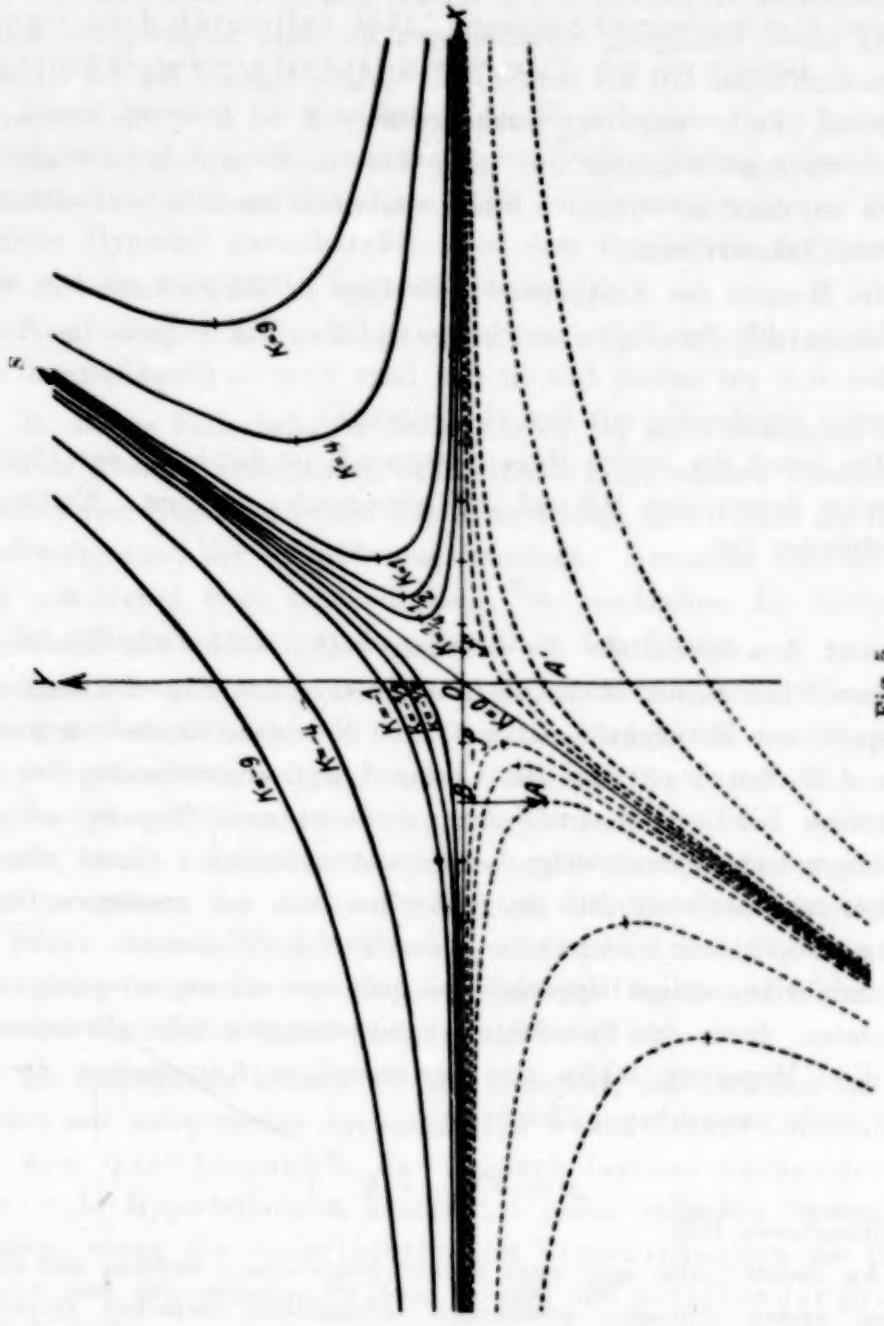


Fig. 5.

nämlich die Form des geometrischen Ortes der Bilder auch von der Natur der Relativbewegungen ab, und nur bei miteinander proportionalen Parallelverschiebungen wird sie eine Hyperbel sein; im Spezialfalle von fester Gegenstandslage $a_1 = 0$ dagegen ist die Form

des geometrischen Ortes ganz unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der Linsen- bzw. Spiegelbewegung und sie ist immer, ohne jede Ausnahme eine Hyperbel.

Die Grundursache hiervon liegt darin, daß die Verschiebung des Brennpunktes in dem erwähnten Grenzfalle von $a_1 = 0$ eben der Gegenstandsweite gleich ist; also wenn die Bewegung des Brennpunktes durch irgend eine beliebige Funktion $g(t)$ der Zeit charakterisiert ist, gelten immer die Beziehungen

$$\tau = g(t) \quad \text{und} \quad K = \frac{f^2}{\tau} = \frac{f^2}{g(t)}.$$

In diesem Falle nehmen daher die Koordinaten des Bildpunktes folgende Werte an:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{g(t)}{f^2} \mp g(t), \\ y &= \frac{G}{g(t)}. \end{aligned}\right\}$$

Die beliebige Bewegungsfunktion $g(t)$ fällt aber bei der Elimination heraus und die Gleichung der Hyperbel wird

$$x = f\left(\frac{y}{T} \mp \frac{T}{y}\right)$$

ganz unabhängig von der Beschaffenheit der Linsen- bzw. Spiegelbewegung.

Endlich wollen wir noch die Bedingungen untersuchen, unter welchen der geometrische Ort der optischen Bilder zu einer Geraden degenerieren kann. Diese Frage entscheidet die Determinante der allgemeinen Gleichung (1)

$$A = K \frac{G^4}{4 f^2},$$

welche, abgesehen von dem selbstverständlichen Falle $f = \infty$ [1]), auf zweierlei Art Null werden kann, je nachdem K oder $G = 0$ ist. Der Formfaktor

$$K = \mp \frac{a_2}{a_2 \pm a_1}$$

verschwindet im Falle von $a_2 = 0$ (unbewegliches optisches System!), G aber nur dann, wenn der als Gegenstand angenommene Punkt auf die optische Achse selbst fällt. Da aber dieser Fall, als etwas Selbstverständliches, außer Betracht bleiben kann, so können wir als endgültiges

[1]) Planparallele Platte oder ebener Spiegel!

Resultat feststellen, daß die Hyperbel nur in jenem Falle zu einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden degenerieren kann, wenn das bilderzeugende optische Instrument im Raume eine feste Lage hat, der Gegenstand aber eine der optischen Achse parallele translatorische Bewegung ausführt. Vermöge seiner Unbedeutenheit erweckte dieser seit Jahrhunderten bekannte einfache Fall unserer Meinung nach den Schein, als wenn der umgekehrte auch ohne besonderes Interesse wäre. Ohne diese Voraussetzung können wir nicht begreifen, warum dieser umgekehrte Fall von $a_1 = 0$ nicht untersucht wurde und wie der Hyperbelsatz der Aufmerksamkeit der Physiker auf einem so abgeschlossen erscheinenden Forschungsgebiete, wie dem der geometrischen Optik entgehen konnte.

Zum Schluß wollen wir, um den Fortschritt deutlich zu sehen, die Hauptergebnisse meines ersten und zweiten Aufsatzes einander gegenüberstellen.

Nach dem ersten Aufsatze [1]).	Nach der Verallgemeinerung.
1. Der Hyperbelsatz ist nur im Falle von unbewegtem Gegenstand gültig.	1. Der Hyperbelsatz behält seine Gültigkeit auch im Falle von sich bewegendem Gegenstande.
2. Es gibt bei den optischen Linsen nur eine einzige Hyperbel.	2. Bei jedem optischen Instrument sind unendlich viele verschiedene Hyperbeln vorhanden.
3. Auch bei den sphärischen Spiegeln ist nur eine einzige Hyperbel vorhanden.	3.
4. Der Hyperbeltypus mit Wendepunkt kommt nur bei den Linsen vor.	4. Beide Hyperbeltypen können bei jedem optischen System vorkommen.
5. Der Hyperbeltypus ohne Wendepunkt kommt nur bei den sphärischen Spiegeln vor.	5.
6. Die zweierlei Hyperbelformen sind voneinander ganz unabhängig.	6. Die beiden Hyperbeltypen gehen kontinuierlich ineinander über.

[1]) Zur Ausführung der ersten Untersuchung gab eine unangenehme Reflexbildung am Projektionssystem des Photoheliographen der Sternwarte von Ógyalla (Ungarn) Veranlassung. Diesen Übelstand suchte Verfasser (damaliger Adjunktastronom der Sternwarte) im Jahre 1917 durch Veränderung der optischen Intervalle des Projektionssystems und die der Gegenstandsweite zu beseitigen, und bei diesen Versuchen wurde wahrgenommen, daß wegen der räumlichen Verschiebung des Brennpunktes der geometrische Ort der optischen Bildpunkte eine krumme Linie sein muß. Später wurde das Problem analytisch untersucht und im Jahre 1919 ist der einfache Hyperbelsatz, im Jahre 1921 dagegen seine Verallgemeinerung gefunden worden. Letztere erschien in ungarischer Sprache in der ZS. d. ungar. math.-phys. Ges. u. Mathematikai és Physikai Lapok **29**, 64—76.

Kathodenfall, Stromstärke und Fallraumdicke der Glimmentladung in Gemischen von Gasen, die chemisch nicht miteinander reagieren.

Von **A. Günther-Schulze** in Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 27. August 1924.)

Es werden die normale Stromdichte und die normale Fallraumdicke bei 1 mm Druck sowie der normale Kathodenfall in den Gasgemischen

He — H,	Ar — H,	Ne — Ar,
He — Ne,	Ne — H,	N — H
Ar — He,		

zahlenmäßig und graphisch gegeben.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich Messungen über den normalen Kathodenfall in Gasgemischen veröffentlicht. Ferner habe ich versucht [2]), die gemessenen Werte auch durch Rechnung aus dem Kathodenfall, den Ionisierungsspannungen, den freien Weglängen, der Ionisierungsausbeute und dem Mischungsverhältnis der Komponenten zu ermitteln. Dabei ergab sich in einigen Fällen befriedigende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, wenn die Gase chemisch nicht miteinander reagierten, während bei chemischen Reaktionen sich die gemessene Kurve des Kathodenfalles mit einem charakteristischen Buckel über die berechnete Kurve erhob. Die Höhe dieses Buckels ließ sich zu der Intensität der chemischen Reaktion zwischen den Gasen in zahlenmäßige Beziehung setzen [3]). Die Versuche bezogen sich vorwiegend auf Gase, die chemisch miteinander reagierten.

In der vorliegenden Arbeit sind die Untersuchungen auf eine Anzahl Kombinationen chemisch nicht miteinander reagierender Gase, vor allem der Edelgase ausgedehnt, die mir von der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung [4]) in hinreichender Menge zur Verfügung gestellt wurden. Bei den Versuchen wurde stets das Verhältnis der drei Parameter: Fallraumdicke, Kathodenfall und Stromdichte untersucht, die

---

[1]) ZS. f. Elektrochem. **29**, 370, 1923.

[2]) ZS. f. Phys. **21**, 50, 1924.

[3]) ZS. f. Elektrochem. **30**, 386, 1924.

[4]) Durch Herrn Direktor Dr. Skaupy und Herrn Dr. Ewest, denen ich auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

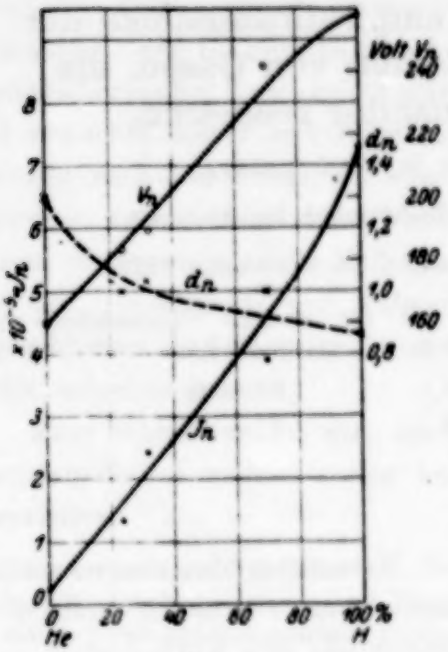


Fig. 1.

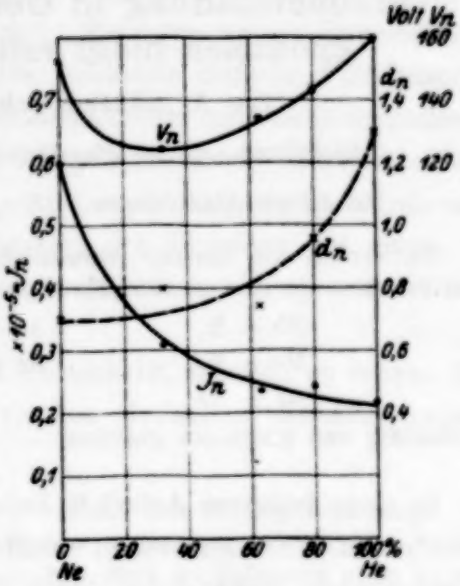


Fig. 2.

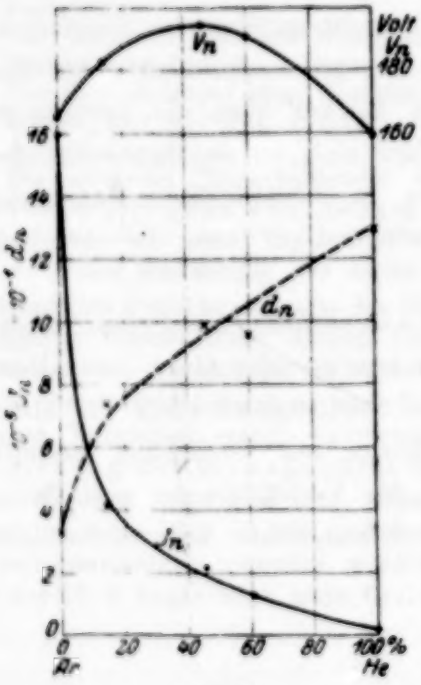


Fig. 3.

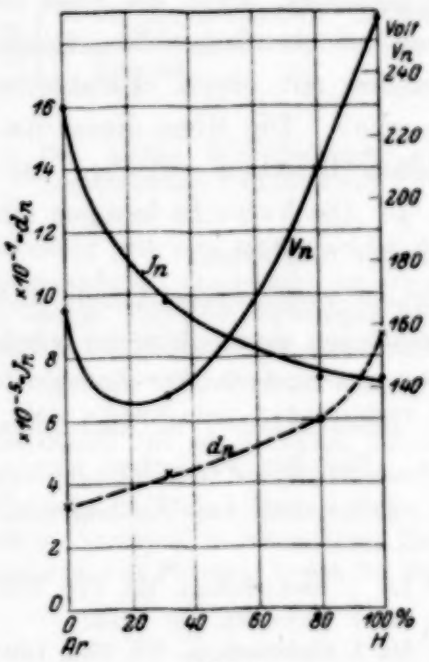


Fig. 4.

durch die Raumladungsgleichung miteinander verknüpft sind. Die theoretische Deutung der Erscheinungen erfolgt in einer besonderen Untersuchung über die Theorie der Glimmentladung.

Die Versuche wurden in einem früher beschriebenen [1]), großen Rezipienten ausgeführt. Die Kathode war ein flacher zylindrischer Eisenklotz von etwa 50 cm² Stirnfläche, 3 cm Höhe und 1,2 kg Gewicht. Im Gefäß befand sich stets frisches Phosphorpentoxyd, so daß die Gasgemische trocken waren, doch wurde die von Schaufelberger [2]) durch langes Behandeln der Gase und Gefäße erreichte vollständige Wasserdampffreiheit nicht angestrebt. Die Messungen wurden in der Regel bei

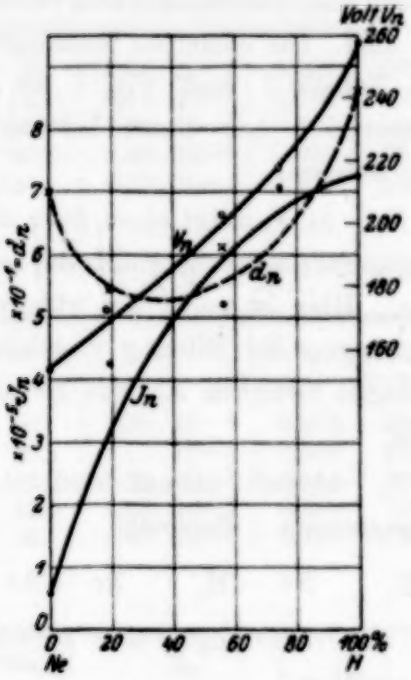


Fig. 5.

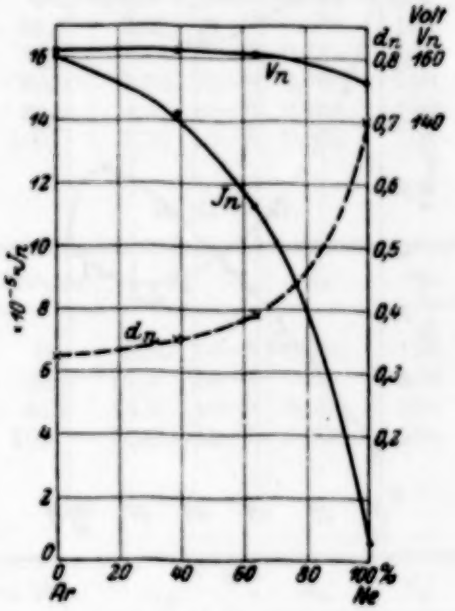


Fig. 6.

mehreren verschiedenen Gasdrucken in der Nähe von 1 mm Druck ausgeführt und nach den bekannten Formeln

$$j_n = C_1 \cdot p^2, \qquad d_n = \frac{C_2}{p}$$

auf den Druck 1 mm umgerechnet. j_n ergab sich als Quotient aus derjenigen Stromstärke, bei der die Stirnfläche der Eisenkathode gerade vollständig vom Glimmlicht bedeckt war, und der Oberfläche und ist in A/cm² angegeben. d_n wurde mit dem Kathetometer durch Einstellen auf

[1]) ZS. f. Elektrochem. **30**, 386, 1924.
[2]) A. Schaufelberger, Ann. d. Phys. **73**, 21, 1924.

die Glimmlichtkante gemessen. Da das Glimmlicht in der horizontalen Durchsicht etwa 8 cm Tiefe hatte, war es verhältnismäßig sehr hell. Das erklärt vielleicht, weshalb sich in einigen Fällen d_n etwas geringer ergab als bei früheren Messungen.

V_n wurde dadurch gemessen, daß die Anode langsam der Kathode bis zur Berührung genähert wurde. Die dabei abgelesene kleinste Elektrodenspannung wurde als V_n angesehen. Die Messungen beanspruchen nicht, Präzisionsmessungen zu sein, weil sowohl die Ermittlung der Stromstärke, bei der das Glimmlicht gerade die Kathode bedeckt, als auch die Einstellung auf die Glimmlichtkante etwas unsicher sind. Die einzelnen Messungen sind in Tabelle 1 und Fig. 1 bis 7 wiedergegeben. Aus ihnen läßt sich folgendes ablesen.

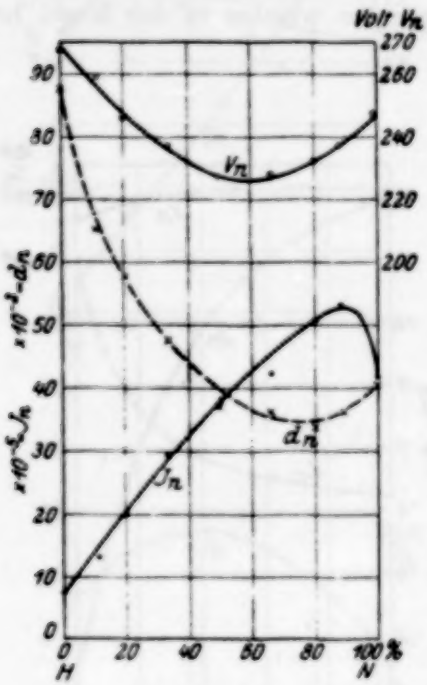


Fig. 7.

1. V_n. a) V_n zeigt einen über die Mischungsgerade sich erhebenden Buckel: Ar — He. Hier ist nach den früheren Untersuchungen die Bildung instabiler Verbindungen zwischen Ar und He anzunehmen.

b) V_n verläuft nahezu nach der Mischungsgeraden. Beispiel:

He — H, Ne — H, Ne — Ar.

Hier ist die früher angegebene Berechnung anwendbar.

c) V_n liegt unterhalb der Mischungsgeraden, ja sogar niedriger als das niedrigste V_n der beiden Komponenten. Beispiel:

Ar — H, Ne — He, H — N.

Diese Erscheinung ist für die Technik von Interesse. Mit ihrer Hilfe kann der niedrige, jedoch für die drei Edelgase He, Ne, Ar annähernd gleich große Kathodenfall noch weiter herabgesetzt werden, wenn ein He-Ne-Gemisch von etwa 30 Proz. He benutzt wird. Diese Erscheinung läßt sich aus der bisherigen Theorie nicht ableiten.

2. d_n. a) d_n verläuft annähernd nach der Mischungsregel. Beispiel:

Ar — H, He — H.

Tabelle 1.

1. He — H.

Proz. H	j_n	d_n	V_n
0	0,22 . 10−5	1,30	160
23,3	1,34 . 10−5	1,00	183
31,6	2,42 . 10−5	1,03	189
70,0	3,89 . 10−5	1,03	242
100	7,30 . 10−5	0,862	258

2. He — Ne.

Proz. He	j_n	d_n	V_n
0	0,60 . 10−5	0,70	153
32,0	0,309 . 10−5	0,80	124
62,7	0,235 . 10−5	0,74	134
80,0	0,244 . 10−5	0,96	143
100	0,22 . 10−5	1,30	160

3. Ar — He.

Proz. He	j_n	d_n	V_n
0	16,0 . 10−5	0,332	165
14,1	4,16 . 10−5	0,738	182
45,6	2,20 . 10−5	0,987	194
60,7	1,25 . 10−5	0,960	190
100	0,22 . 10−5	1,30	159

4. Ar — H.

Proz. H	j_n	d	V_n
0	16,0 . 10−5	0,332	165
31,4	9,81 . 10−5	0,435	138
70,0	6,13 . 10−5	0,425	190
80,0	7,34 . 10−5	0,605	210
89,0	8,54 . 10−5	0,704	230
100	7,30 . 10−5	0,862	258

5. Ne — H.

Proz. Ne	j_n	d_n	V_n
0	7,30 . 10−5	0,862	250
26,3	7,10 . 10−5	0,560	218
43,9	5,73 . 10−5	0,614	203
81,6	4,26 . 10−5	0,539	172
100	0,60 . 10−5	0,700	153

6. Ne — Ar.

Proz. Ar	j_n	d_n	V_n
0	0,60 . 10−5	0,700	153
36,5	11,3 . 10−5	0,390	163
61,3	14,2 . 10−5	0,352	164
100	16,0 . 10−5	0,332	164

7. N — H.

Proz. H	j_n	d_n	V_n	Proz. H	j_n	d_n	V_n
0	7,30 . 10−5	0,880	267	66,7	41,8 . 10−5	0,364	227
11,1	13,0 . 10−5	0,653	259	80,0	50,6 . 10−5	0,338	232
20,0	20,1 . 10−5	0,579	246	88,9	53,5 . 10−5	0,361	237
33,3	29,1 . 10−5	0,478	237	100	41,5 . 10−5	0,405	247
50,0	38,0 . 10−5	0,371	227				

j_n in A/cm², d_n in Zentimeter bei 1 mm Druck, V_n in Volt.

b) d_n wird überwiegend durch eine der beiden Gaskomponenten bedingt. Beispiel:

Ne — He überwiegend bedingt durch Ne,
Ar — He „ „ „ Ar,
Ar — Ne „ „ „ Ar.

c) d_n sinkt unter das geringste d_n der beiden reinen Komponenten. Beispiel:

$$\text{Ne} - \text{H}, \qquad \text{H} - \text{N}.$$

3. j_n. j_n folgt aus der Gleichung

$$j_n = C \cdot \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{V_n^{3/2}}{d_n^2},$$

wo e die Ladung, M die Masse des Kations ist.

Bei Mischung zweier Gase ist zunächst zweifelhaft, wieviel Kationen M_1 des einen und wieviel Kationen M_2 des anderen Gases bei gegebenem Mischungsverhältnis entstehen. Wird nun nach der vorstehenden Gleichung aus V_n, d_n, j_n rückwärts M ausgerechnet, so ergibt sich, daß den Erwartungen entsprechend überwiegend die Kationen desjenigen Gases entstehen, das zugleich die kleinere freie Weglänge und die größere Ionisierungsausbeute (beides ist in der Regel miteinander verbunden) besitzt.

Intensitäten der Komponenten im Zeemaneffekt.

Von **L. S. Ornstein** und **H. C. Burger** in Utrecht.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht.)

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 20. August 1924.)

Es wird eine Verallgemeinerung der Regeln zur Berechnung von Intensitäten in Multipletts gegeben, welche es ermöglicht, die Intensitäten von Komponenten im Zeemaneffekt vorauszusagen. Eine vorläufige experimentelle Bestätigung dieser Regeln wird angedeutet.

Es sind zwei gänzlich verschiedene Methoden denkbar für die Vorhersage der Intensitäten der Komponenten einer magnetisch gespaltenen Spektrallinie. Erstens könnte man versuchen, mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Intensitäten aus den Amplituden der harmonischen Analyse der Bewegung des Leuchtelektrons zu berechnen. Zweitens aber, und diese Methode wollen wir im folgenden verwenden, kann man versuchen, durch Verallgemeinerung der Regeln, welche die Messung der Intensitäten von Spektrallinien bis jetzt aufgeliefert haben [1]), eine Anzahl von Gleichungen zu bekommen zur Bestimmung der gesuchten Größen.

Der einfachste Fall eines Zeemaneffekts ist das normale Triplett, wie es alle Singulettlinien zeigen. Wir betrachten nur den transversalen Effekt, weil die Intensität in jeder anderen Richtung sofort aus der Intensität des transversalen Effekts zu berechnen ist. Im transversalen Effekt sind aus Symmetriegründen die beiden senkrecht polarisierten Linien von gleicher Intensität, und man braucht also nur eine zweite Gleichung zwischen den unbekannten Größen, um diese bestimmen zu können. Diese zweite Gleichung wird gegeben durch die Bedingung, daß die drei Komponenten des Tripletts zusammen eine unpolarisierte Linie geben müssen. Für starke Magnetfelder ist das zwar nicht genau der Fall, aber wir heben ausdrücklich hervor, daß wir annehmen, daß das Magnetfeld so schwach ist, daß es die Linien nur trennt, ohne deren Intensität zu beeinflussen. Eigentlich gelten also unsere Betrachtungen nur für verschwindende Feldstärke.

Da also bei transversaler Beobachtung die Komponenten zusammen natürliches Licht geben müssen, muß die Intensität der parallelen Linie gleich der Summe der beiden senkrechten Linien sein, d. h. das Verhältnis der drei Zeemankomponenten ist 1 : 2 : 1.

---

[1]) H. C. Burger und H. B. Dorgelo, ZS. f. Phys. **23**, 253, 1924; L. S. Ornstein und H. C. Burger, ebenda **24**, 41, 1924.

Man kann diesen einfachen Gedankengang generalisieren für kompliziertere Fälle, und zwar erstens für die beiden Dublettlinien in der Hauptserie und in der scharfen Nebenserie der Alkalien. Tabelle 1 gibt eine schematische Darstellung der Komponenten dieser Linien in einem magnetischen Felde.

Tabelle 1.

		$p_1 s$		$p_2 s$	
		⊥	∥	⊥	∥
3/2	1/2	a_1			
1/2	1/2		b_1		y_1
1/2	−1/2	a_2		x_1	
−1/2	1/2	a_2		x_1	
−1/2	−1/2		b_1		y_1
−3/2	−1/2	a_1			

Die erste und zweite Reihe der Tabelle geben die magnetischen Quantenzahlen des Anfangs- bzw. des Endniveaus, die dritte und vierte Reihe die Intensitäten von senkrechten und parallelen Komponenten der Linie sp_1 oder $p_1 s$, die fünfte und sechste Reihe die Intensitäten der Komponenten der Linien sp_2 oder $p_2 s$. Der Symmetrie jeder magnetischen Spaltung ist in dieser Tabelle bereits Rechnung getragen.

Wie bei der Singulettlinie, fordern wir auch in diesem Falle, daß jede Spektrallinie im ganzen bei der Einwirkung des magnetischen Feldes unpolarisiert bleibt. Das gibt die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b_1, \\ x_1 &= y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Eine zweite Gleichung zwischen den unbekannten Größen $a_1 \ldots y_1$ ergibt sich aus dem bekannten Intensitätsverhältnis 2 : 1 der Linien sp_1 und sp_2 [1]). Da nach (1) die parallelen Komponenten jeder Linie zusammen die Hälfte der Intensität der ganzen Linie besitzen, lautet diese zweite Gleichung:

$$\frac{b_2}{2} = y_1. \qquad (2)$$

Die drei Gleichungen (1) und (2) genügen nicht zur Bestimmung der Verhältnisse der fünf Größen $a_1 \ldots y_1$. Man kann aber eine vierte Beziehung zwischen den Intensitäten finden, indem man eine früher für die Multipletts gefundene Regel generalisiert. Für ein Multiplett ohne Magnetfeld gilt die Regel:

[1]) H. B. Dorgelo, The intensities of the Components of multiple spectrallines. Diss. Utrecht 1924, siehe auch A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 570 f.

Die Summen der Intensitäten der Linien eines Multipletts, welche mit Sprüngen des Atoms in einen Endzustand (bzw. aus einem Anfangszustand) mit derselben inneren Quantenzahl korrespondieren, verhalten sich wie diese inneren Quantenzahlen der Endzustände [bzw. der Anfangszustände [1])].

Auch für die Zeemankomponenten eines Multipletts muß diese Regel gültig sein, wie für den hier besprochenen Fall durch (2) ausgedrückt wird. Man muß dann alle Komponenten zusammenzählen, für welche die innere Quantenzahl des Endzustandes (bzw. Anfangszustandes) dieselbe ist, die magnetischen Quantenzahlen aber verschieden sind. Es scheint uns nun sehr wahrscheinlich, daß man in dieser Regel innere und magnetische Quantenzahlen vertauschen darf, wenn man die Regel nur gesondert für die senkrechten und die parallelen Komponenten anwendet. Da die Intensität der senkrechten und der parallelen Komponenten in anderer Weise vom Winkel zwischen Feldrichtung und Beobachtungsrichtung abhängen, ist es sinnlos, diese Komponenten zusammen zu betrachten.

In der genannten Regel sind die Summen von Intensitäten proportional zu den inneren Quantenzahlen der End- (bzw. Anfangs-)Zustände. Man kann diese Proportionalität begreifen [2]), da die innere Quantenzahl das statische Gewicht des Zustandes angibt. Man muß dazu den verschiedenen möglichen Orientierungen eines Atoms in einem Magnetfelde dasselbe statische Gewicht geben, und daher kann man erwarten, daß in unserem jetzigen Falle die Proportionalität mit der inneren Quantenzahl durch eine Gleichheit ersetzt werden muß. Man bekommt also für die Komponenten eines Multipletts im Zeemaneffekt die folgende Regel:

Die Summen der Intensitäten der senkrechten (bzw. parallelen) Komponenten, bei denen der Anfangs- (bzw. End-)Zustand des Atoms dieselbe magnetische Quantenzahl hat, sind gleich.

Diese Regel gibt eine Anzahl Gleichungen, die aus Tabelle 1 leicht abzulesen sind, die aber wegen der Symmetrie von linken und rechten Linien zum Teil Identitäten sind. Nur für die senkrechten Komponenten, bei denen die magnetische Quantenzahl des Anfangszustandes dieselbe ist, bekommt man eine brauchbare Gleichung: vom Zustande 3/2 kommt a_1, und von den Zuständen 1/2 kommen a_2 und x_1. Das gibt die Gleichung:

$$a_1 = a_2 + x_1. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) genügen zur Bestimmung der Verhältnisse von $a_1 \ldots y_1$. Setzt man die kleinste Intensität gleich 1, so findet man:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 4, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 2. \tag{4}$$

[1]) H. C. Burger und H. B. Dorgelo, ZS. f. Phys. **23**, 258, 1924.
[2]) L. S. Ornstein und H. C. Burger, ebenda **24** 41, 1924.

Es ist sehr bemerkenswert, daß dieselben Intensitäten auch von Sommerfeld[1]) gefunden sind, der die alte klassische Theorie von Voigt in quantentheoretische Sprache übersetzt hat.

Leider gibt es noch keine Messungen der Intensität der Zeemankomponenten von sp- oder ps-Linien. Doch war es uns möglich, das theoretische Resultat (4) zu bestätigen aus Mikrophotometerkurven einer Platte der D-Linien, welche Zeeman uns vor einigen Jahren leihweise zur Verfügung gestellt hatte. Diese Platte enthielt keine Intensitätsskale, und deshalb war es nicht möglich, aus den gemessenen Schwärzungen der Linien ihre Intensitäten abzuleiten. Wenn man aber die gemessenen Schwärzungen als Funktion der berechneten Intensitäten (4) darstellt, bekommt man eine glatte Kurve. Da nur die Gleichung (3) zweifelhaft ist, kann man das als einen überzeugenden experimentellen Beweis dieser Gleichung betrachten. Wir hoffen aber, bald durch Messung der Intensitätsverhältnisse nach der in unserem Institut üblichen Methode den Beweis für die Richtigkeit der Zahlen (4) zu erbringen.

Die Messungen haben gezeigt, daß die Intensitäten der Linien eines Multipletts immer durch kleine ganze Zahlen darzustellen sind. Oben sahen wir, daß auch in den einfachsten Fällen des Zeemaneffekts die Komponenten der gespaltenen Linien Intensitätsverhältnisse zeigen, welche durch kleine ganze Zahlen beschrieben werden können. Verallgemeinernd sprechen wir die Vermutung aus, daß bei verschwindendem Felde auch in komplizierten Fällen des Zeemaneffekts die Intensitätsverhältnisse der Komponenten rational sind. Diese Annahme gibt eine neue Bedingung zur Berechnung dieser Intensitäten.

Tabelle 2.

		$p_1{}^s$		$p_2{}^s$		$p_3{}^s$	
		$\perp$		$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$
2	1	a_1					
1	1		b_1		y_1		
1	0	a_2		x_1			
0	1	a_3		x_2		a_1	
0	0		b_2				β_1
0	−1	a_3		x_2		a_1	
−1	0	a_2		x_1			
−1	−1		b_1		y_1		
−2	−1	a_1					

[1]) A. Sommerfeld, Quantentheoretische Umdeutung der Voigtschen Theorie des anomalen Zeemaneffekts vom D-Linientypus. ZS. f. Phys. 8, 257, 1922.

Man kann versuchen, für den mehr verwickelten Fall des ps- (bzw. sp)-Tripletts des Triplettsystems die Intensitäten vorherzusagen. Wir wollen dabei aber, soweit das ohne direkte Intensitätsmessungen möglich ist, von den Resultaten des Experimentes Gebrauch machen.

In Tabelle 2 sind die Komponenten der drei Linien $p_1 s$, $p_2 s$ und $p_3 s$ des Tripletts dargestellt. Die magnetischen Quantenzahlen des p- und des s-Zustandes sind ganzzahlig; man findet sie in den beiden ersten Reihen angegeben. Weil jede der drei Linien im ganzen unpolarisiert sein muß, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} 2\,(a_1 + a_2 + a_3) &= 2\,b_1 + b_2, \\ x_1 + x_2 &= y_2, \\ 2\,\alpha_1 &= \beta_1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Weiter bekommt man noch zwei unabhängige Gleichungen aus der Bedingung, daß die Intensitäten der Linien $p_1 s, p_2 s$ und $p_3 s$ sich verhalten wie $5:3:1$ [1]):

$$\frac{2\,b_1 + b_2}{5} = \frac{2\,y_1}{3} = \frac{\beta_1}{1}. \tag{6}$$

Die einfachsten ganzen Zahlen für α_1 und β_1 sind $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$. Wir wollen versuchen, ob wir mit dieser Annahme die anderen Intensitäten berechnen können.

Aus (6) folgt:

$$y_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_1 = 3,$$

und daher nach (5):

$$x_1 + x_2 = 3.$$

Diese Gleichung ist aber mit der Beobachtung unverträglich, wenn wir annehmen, daß x_1 und x_2 ganze Zahlen sind. Die Experimente haben ergeben, daß x_1 und x_2 angenähert gleich stark sind, während die Summe 3 sich nur in 1 und 2 zerlegen läßt. Die Annahme, daß $\alpha_1 = 1$ und $\beta_2 = 2$, ist also unrichtig und wir müssen diese Intensitäten durch größere ganze Zahlen darstellen.

Wir versuchen:

$$\alpha_1 = 2, \quad \beta_1 = 4.$$

Nach (6) ist dann

$$y_1 = 6$$

und nach (5):

$$x_1 + x_2 = 6,$$

welche Zahl wir in die zwei gleichen Zahlen 3 und 3 zerlegen. Also ist:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3.$$

Aus (5) und (6) folgt nun für die Komponenten von $p_1 s$:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 10, \\ 2\,b_1 + b_2 &= 20. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) H. B. Dorgelo, l. c. oder ZS. f. Phys. **22**, 170, 1924.

Es gibt eine ziemlich große Zahl von ganzzahligen Lösungen dieser beiden Gleichungen. Wir versuchen daher, wie bei den Dublettlinien, neue Gleichungen hinzuzubekommen, von der Art der Gleichung (3). Die parallel schwingenden Komponenten, welche von Zuständen mit der magnetischen Quantenzahl 1 bzw. 0 kommen, sind $b_1 + y_1$ und $b_2 + \beta_1$. Nach unserer Regel von S. 137 sind diese Summen gleich groß:

$$b_1 + y_1 = b_2 + \beta_1. \tag{8}$$

Man findet dieselbe Gleichung durch Betrachtung der Linie, bei denen die Endzustände die magnetische Quantenzahl 1 bzw. 0 haben.

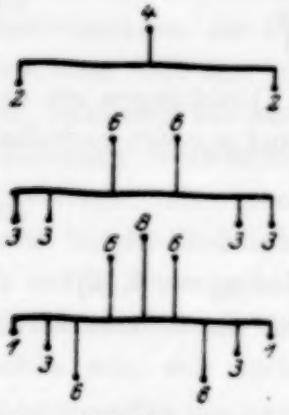


Fig. 1. Die Komponenten sind in der Wellenlängenskale aufgetragen; die parallelen Komponenten als Striche nach oben, die senkrechten Komponenten als Striche nach unten. Bei jedem Strich ist die zugehörige Intensität angegeben. Eine experimentelle Bestätigung dieser berechneten Zahlen ist sehr erwünscht, und wird zeigen, ob die Verallgemeinerung der alten Regel, wie wir sie vorgenommen haben, richtig ist.

Bei der Behandlung der senkrechten Komponenten muß man bedenken, daß diese beobachtet in der Richtung der magnetischen Kraftlinien teilweise rechts und teilweise links polarisiert sind.

Man muß deshalb die Summenregel von S. 137 gesondert für die rechts und links polarisierten Komponenten anwenden, d. h. für die Komponenten, für welche die magnetische Quantenzahl ab- bzw. zunimmt.

Für die Komponenten mit zunehmender magnetischer Quantenzahl, bei denen diese Zahl in den Endzuständen 2, 1 und 0 ist, bekommt man die Gleichungen:

$$a_1 = a_2 + x_1 = a_3 + x_2 + \alpha_1. \tag{9}$$

Für die Komponenten mit abnehmender magnetischer Quantenzahl bekommt man dieselben Gleichungen.

Die Übergänge mit magnetischer Quantenzahl 1 und 0 des Anfangszustandes ergeben bei zunehmender magnetischer Quantenzahl:

$$a_1 = a_2 + x_1. \tag{10}$$

Für abnehmende magnetische Quantenzahl bekommt man in diesem Falle:

$$a_3 + x_2 + \alpha_1 = a_2 + x_1. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) und (11) sind schon in (9) enthalten.

Aus den Gleichungen (5) bis (9) findet man für die Intensitäten:

$$b_1 = 6, \quad b_2 = 8$$

und

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1.$$

Es ist sehr erfreulich, daß die Folge der Intensitäten, welche wir berechnet haben, nämlich $a_3 < a_2 < a_1$,

auch vom Experiment gegeben wird. In Fig. 1 sind die berechneten Intensitäten zusammengestellt.

Es hat vorläufig keinen Zweck, noch verwickeltere Fälle, z. B. vollständige Dubletts und Tripletts, zu untersuchen. Nur bemerken wir, daß dann durch das Anwachsen der Zahl der unbekannten Größen die gegebenen Regeln nicht genügen, um das Problem zu bestimmen.

Anmerkung bei der Korrektur. Seite 139 ist auf Grund der Beobachtungen angenommen, daß x_1 und x_2 gleich stark sind. Diese Gleichheit ist ein besonderer Fall einer von Landé (Ergebnisse der exakten Wissenschaften, Bd. II, S. 154; ZS. f. Phys. **5**, 231, 1921) angegebenen qualitativen Regel für die Intensitäten im Zeemaneffekt. Es scheint uns, daß man diese Regel folgendermaßen für einen besonderen Fall präzisieren muß:

Für die Linien eines Multipletts, bei denen die innere Quantenzahl gleich bleibt, sind diejenigen Komponenten im Zeemaneffekt gleich, deren darstellende Pfeile im Landéschen Schema gleich weit von der Mitte des Schemas entfernt sind. Für die anderen Linien behaupten wir, daß derartige Komponenten ungleich sind.

Inzwischen haben Messungen, über die wir demnächst berichten werden, gezeigt, daß unsere Ansätze richtig sind.

Utrecht, Phys. Institut d. Universität, August 1924.

Zur Quantentheorie der radioaktiven Zerfallsvorgänge. II.

Von **Adolf Smekal** in Wien.

(Eingegangen am 20. August 1924.)

Es wird gezeigt, daß die von L. Meitner jüngst angenommene zeitliche Aufeinanderfolge der einzelnen radioaktiven Elementarprozesse sich mit den quantentheoretischen Lebensdauern strahlungsfähiger Quantenzustände in bester Übereinstimmung befindet.

Wie der Verfasser kürzlich zeigen konnte[1]), befindet sich der von ihm quantentheoretisch vertiefte[2]) Meitnersche Zerfallsmechanismus für β-Strahler[3]) in vollständiger Übereinstimmung mit dem gegenwärtigen Stande der experimentellen Forschung. Daran ist auch durch die Ergebnisse der jüngsten Untersuchung des β-Spektrums vom Radium durch Hahn und Meitner[4]) keine Änderung eingetreten, indem die dort sichergestellte γ-Frequenz innerhalb der Fehlergrenzen mit gleich gutem, ja vielleicht sogar noch etwas größerem numerischen Erfolge auf Grund der Ra-Ablösungsarbeiten, anstatt jener der RaEm berechnet und daher in der erwarteten Weise dem Ra zugeordnet werden kann. Die von den Messungen zugelassene und von Hahn und Meitner bevorzugte letztere Möglichkeit hingegen würde alle bisherigen Deutungsversuche vor eine neue Tatsache stellen, falls es einmal doch noch gelingen sollte, auf experimentellem Wege eindeutig zu ihren Gunsten zu entscheiden. Denn zweifellos müßte dann hinsichtlich einer derartigen γ-Frequenz gefolgert werden, daß sie nach[5]) der Emission des Ra-α-Strahls als Kern-

---

[1]) Zur Quantentheorie der radioaktiven Zerfallsvorgänge. ZS. f. Phys. **25**, 265, 1924 („Zweite Arbeit").

[2]) Zur quantentheoretischen Deutung der β- und γ-Strahlemission. ZS. f. Phys. **10**, 275, 1922 („Erste Arbeit").

[3]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **9**, 145, 1922.

[4]) O. Hahn und L. Meitner, ZS. f. Phys. **26**, 161, 1924.

[5]) Daß eine mit der α-Emission gleichzeitige Aussendung einer scharfen γ-Linie aus quantentheoretischen Gründen abzulehnen ist, ergibt sich auf dem gleichen Wege, wie bei b) in § 3 der zweiten Arbeit für β-Strahler gefolgert worden ist.

γ-Strahlung der RaEm ausgesendet wird[1]), im Gegensatz zu den bisherigen Auffassungen, nach welchen sie als eine vor der α-Emission ausgesendete Kern-γ-Strahlung des Ra selbst angesehen werden müßte.

Die neuerkannte Möglichkeit einer der α-Strahlung zeitlich unmittelbar nachfolgenden γ-Emission hat Meitner veranlaßt, für sämtliche α- und β-Strahler anzunehmen, daß die gesamte an ihnen festgestellte γ- und „Sekundär"-β-Strahlung erst nach dem eigentlichen „primären" α- oder β-Zerfall zur Aussendung gelangt, also prinzipiell den Folgeproduktatomen zuzuordnen sei[2]). Ob dieser radikale Schritt in seiner vollen Allgemeinheit notwendig ist, dürfte wohl nur auf Grund wesentlich verfeinerter Messungen entschieden werden können, wobei den von Ellis und Skinner am RaB und RaC gefundenen Energieniveaubeziehungen eine wichtige Rolle zufallen dürfte. Hier möge nur noch auf ein quantentheoretisches Argument hingewiesen werden, das der neuen Meitnerschen Vorstellung eine vielleicht insofern nicht unwesentliche Stütze verleiht, als sie sich bisher ja noch auf keinerlei entscheidende positive Messungsergebnisse zu stützen vermag[3]).

Der neue Deutungsversuch nähert sich zunächst insofern dem bisherigen Standpunkt der englischen Forscher, als er nun auf einen direkten Zusammenhang zwischen der Energie der primären Strahlen und jener der ausgesandten γ-Frequenzen bewußt Verzicht leistet[4]). Dadurch wird es Meitner ermöglicht, die Primärvorgänge jetzt in gewissem Sinne als „Ursache" einer darauffolgenden γ- bzw. Sekundär-β-Emission aufzufassen. Eine derartige Kausalverknüpfung ist nach dem gegenwärtigen Stande der Quantentheorie nun zwar nicht möglich und sehr wahrscheinlich sogar

---

[1]) Die vom Verfasser in Betracht gezogenen „Zerfall-γ-Strahlen" [erste Arbeit, § 2, zweite Arbeit § 3, c) und d)] kommen der Natur der Sache nach wohl nur bei β-Strahlern zur Erklärung von γ-Frequenzen in Frage, welche mittels der Ablösungsarbeiten des Folgeproduktatoms berechnet werden müssen (vgl. § 5, Ende, der ersten Arbeit).

[2]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **26**, 169, 1924.

[3]) Man vergleiche hierzu etwa die gänzlich verschiedene Bewertung, welche die Berechnung der γ-Frequenzen der C- und E-Gruppe des RaB mittels der Bi-Ablösungsarbeiten in der zitierten Arbeit von L. Meitner, S. 172 bis 174, und in der zweiten Arbeit des Verfassers, S. 270, gefunden hat.

[4]) Daß einer „primären" β-Linienstrahlung bereits nach der quantentheoretischen Deutung der älteren Meitnerschen Auffassung, wenn überhaupt, so nur eine ganz bescheidene Rolle zukommen könnte, ist besonders nachdrücklich in der zweiten Arbeit, Anm. 2 auf S. 275, hervorgehoben worden. Ihre Rolle in der jetzt vorgeschlagenen Auffassung entspricht dem Falle a) in § 3 der zweiten Arbeit, welcher von Rosseland näher geprüft worden ist (vgl. dazu ebenda, § 5).

prinzipiell unzulässig; andererseits kann aber die Einseitigkeit der beobachtbaren radioaktiven Vorgänge ohne Schwierigkeit in Analogie zu jener der Röntgenstrahlemissionsvorgänge gedeutet werden[1]). Der Unterschied zwischen den beiden Erscheinungen liegt dabei weniger in dem Fehlen einer beobachtbaren Anregung für den radioaktiven Zerfall, als vor allem darin, daß jetzt nach Meitner für alle radioaktiven Elemente an deren Stelle prinzipiell die Existenz eines stationären Quantenzustandes von Atom + Elektronenhülle zu treten hätte, welcher mit bestimmten Übergangswahrscheinlichkeiten für einen oder mehrere (?) bloß strahlungslos ausführbare Quantenübergänge ausgestattet ist. Ein gewisses Analogon hierzu existiert im Gebiete der optischen und Röntgenspektren anscheinend nur bei den „metastabilen" Quantenzuständen, z. B. des He, da alle übrigen bekannten strahlungslosen Atomvorgänge sich auf Quantenübergänge beziehen, welche sonst auch unter Strahlungsemission vor sich gehen können[2]). Die frühere Vorstellung mußte nun eine beliebige Aufeinanderfolge von strahlungslosen oder von Strahlungsemission begleiteten radioaktiven Quantenübergängen für zulässig erklären, wobei hinsichtlich der Lebensdauer der beteiligten Quantenzustände auf das empirische Material verwiesen werden mußte[3]). Die neue Vorstellung gestattet demgegenüber, für die strahlungsfähigen Quantenzustände jene minimale Lebensdauergrößenordnung beizubehalten, welche für die optischen und Röntgenquantenzustände aus quantentheoretischen Gründen für maßgebend angesehen werden muß. In diesem Sinne erscheint also die neue Meitnersche Vorstellung als unmittelbare Konsequenz der Annahme von zu Ausstrahlung nicht befähigten Quantenzuständen mit gegebenenfalls makroskopischen Lebensdauern: Indem das Atomgebilde die jeweils daranschließenden, strahlungsfähigen und daher äußerst kurzlebigen Quantenzustände bis zu einem nächsten, wiederum langlebigen

---

[1]) Erste Arbeit, § 6.

[2]) Die genannte Parallele würde demnach die Folgerung nahelegen, daß auch den metastabilen Quantenzuständen der Elektronenhülle gewisse Zerfallswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden müssen. Der Übergang eines metastabilen Atoms in seinen Normalzustand kann nun freilich aus energetischen und Impulsgründen nur vermittelst wechselseitiger Zusammenstöße bewerkstelligt werden, doch wäre sein Eintreten dann weniger der mit jenen Stößen verbundenen molekularen Feldwirkung („Durchbrechung" des Korrespondenzprinzips) als eben jener Zerfallswahrscheinlichkeit zuzuschreiben. Nach der oben geäußerten Auffassung wären die Atomkerne daher als metastabile Gebilde im Sinne des Bohrschen Korrespondenzprinzips anzusprechen.

[3]) Erste Arbeit, Ende von § 6.

„metastabilen" Quantenzustande durchmißt, erscheint die Aussendung der γ- und Sekundär-β-Strahlung ganz ungezwungen als an den Primärvorgang zeitlich anschließende, äußerst kurzdauernde und experimentell von ihm nicht zu trennende Folgeerscheinung des eigentlichen radioaktiven Zerfalls.

Die in den früheren Arbeiten zur Deutung der sekundären β-Strahlung angegebenen strahlungslosen Quantenübergänge und die im Zusammenhang damit besprochenen prinzipiellen Grundlagen einer quantentheoretischen Deutung der radioaktiven Zerfallsvorgänge sind im Gegensatz zu dem Vorstehenden völlig unabhängig von der Wahl eines bestimmten Bildes für den Zerfallsmechanismus.

Wien, II. Phys. Inst. d. Universität, 17. August 1924.

Über die Abhängigkeit der Röntgenstrahlenausbeute von der Entladungsform [1]).

Von **Max Müller** in Frankfurt a. M.

Aus dem Universitätsinstitut für physikalische Grundlagen der Medizin, Frankfurt a. M.

Mit 18 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Juli 1924.)

Mit Hilfe der Behnkenschen Formel wird die Energieverschiebung im Röntgenspektrum untersucht, und zwar einerseits für konstante Gleichspannung und sinusförmige Wechselspannung, andererseits für oszillographisch aufgenommene Wechsel- und Gleichspannungskurven, wie sie meist an Röntgenapparaten auftreten. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden miteinander verglichen.

I.

In seiner Arbeit „Über das kontinuierliche Röntgenspektrum" hat Hermann Behnken in Anlehnung an die Messungen von Ulrey [2]) auf Grund theoretischer Überlegungen für die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum beim Betrieb der Coolidgeröhre mit konstanter Gleichspannung und konstantem Gleichstrom folgende Formel aufgestellt:

$$\frac{E_\lambda \nu^3}{c} = Q \cdot \nu^{2,8} \cdot \left[1 - e^{-\frac{q}{\nu^{2,8}}(\nu_0 - \nu)}\right]. \qquad (1)$$

Hierin bedeutet $\nu \cdot 10^{18}$ die Frequenz der Röntgenstrahlen, E_λ und $\frac{E_\lambda \nu^2}{c}$ die Energie bei der Frequenz $\nu \cdot 10^{18}$, c die Lichtgeschwindigkeit, $\nu_0 \cdot 10^{18}$ die höchste im Spektrum auftretende Frequenz, q ist für Wolfram $= 3{,}6$. Q hängt ganz von der Wahl der Maßeinheit der Ordinatenachsen ab, die für den Vergleich willkürlich ist und kann hier $= 1$ gesetzt werden.

Die obige Formel ergab unter Berücksichtigung der erforderlichen Korrektionen eine gute Annäherung an die Messungen von Ulrey [3]), welche so ausgeführt wurden, daß eine Coolidgeröhre mit einer Akkumulatorenbatterie von 50000 Volt Spannung erregt und die spektrale Energieverteilung mittels des Braggschen Spektrometers ermittelt wurde. Auf Grund von Absorptionsmessungen [4]) an einem Thüringer Glasscherben konnte Behnken ferner die von ihm gemachte Annahme

[1]) Auszug aus der Frankfurter Dissertation.
[2]) ZS. f. Phys. **4**, 241—253, 1921.
[3]) Phys. Rev. **11**, 401, 1918.
[4]) ZS. f. Phys. **8**, 48—59, 1920.

bestätigen, daß für eine bestimmte Röhre das Produkt $\mu_1 . d . \nu^{2,5}$ einen konstanten Wert besitzt.

In einer späteren Arbeit[1]) berechnet Behnken die Energieverteilung des Strahlengemisches unter Annahme eines rein sinusförmigen Spannungsverlaufs, indem er den zeitlichen Mittelwert der monochromatischen Intensitäten errechnet. Diese Berechnungen sind von Behnken durch frühere Messungen mit dem Braggschen Spektrometer bei gut sinusförmigem Spannungsverlauf scharf geprüft und führten zu einer neuen Bestätigung der Behnkenschen Formel[2]).

Weil von allen Formeln zur Berechnung der relativen Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum die Behnkensche der Wirklichkeit am nächsten zu kommen schien und so Vertrauenswürdigkeit besitzt, so verlohnt es sich, die spektrale Energieverteilung auch für solche Entladungsformen zu berechnen, wie sie im praktischen Betrieb vorkommen. Daher soll im nachstehenden, gestützt auf diese Erkenntnisse der Behnkenschen Arbeiten, der Einfluß von deformierten Wechselspannungen, d. h. von solchen, welche von der Sinusform abweichen, auf die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum untersucht und einige verschiedene Entladungsformen hinsichtlich des damit zu erzielenden Wirkungsgrades für Coolidgeröhren verglichen werden.

Zu diesem Zweck ist es erforderlich, die Entladungsformen bei verschiedenen Betriebsbedingungen experimentell zu ermitteln und daraus dann die Energieverteilung zu berechnen. Bei der Untersuchung wurde eine Coolidgeröhre einmal mit Wechselstrom betrieben, ein anderes Mal wurde sie mit Gleichspannung erregt, welche dadurch erzeugt wurde, daß zwei Hochspannungskondensatoren über zwei Ventilröhren gemäß der Delonschaltung aufgeladen und über die Coolidgeröhre entladen wurden.

II.

Zunächst soll mit Hilfe der Behnkenschen Formel die relative Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum berechnet werden:

1. für den Fall des Betriebes der Coolidgeröhre mit konstanter Gleichspannung und einem konstanten Elektronenstrom von 5 mA;
2. für den Fall einer sinusförmigen Spannungserregung mit einer Scheitelspannung, welche gleich der Gleichspannung ist. Der Elektronenstrom sei dabei ebenfalls konstant und $= 5$ mA.

---

[1]) ZS. f. techn. Phys. **2**, 153—160, 1921.
[2]) ZS. f. Phys. 1920 und 1921.

Für die Energieverteilung der Strahlen unmittelbar nach Austritt aus der Röhre ergibt sich, wenn die Glaswand 0,6 mm dick ist, nach Behnken der Ausdruck:

$$E_\lambda = \frac{E_\nu \nu^3}{c} = \nu^{3,8} \cdot \left[1 - e^{-\frac{q}{\nu^{3,8}}(\nu_0 - \nu)}\right].$$

Die ausgezogenen Kurven der Fig. 1 stellen diese Energieverteilung dar. Eine Diskussion derselben findet sich schon bei Behnken.

Erregt man nun eine Röntgenröhre mit rein sinusförmiger Wechselspannung, so durchlaufen bekanntlich die Momentspannungen alle Werte von 0 bis zur Maximalspannung. Ist der Elektronenstrom konstant, so wird in jedem Zeitpunkt während einer Periode ein Strahlengemisch von solcher Zusammensetzung erzeugt, als ob eine konstante Gleichspannung von der Höhe der betreffenden Momentanspannung an der Röhre liege. Die relative Intensität einer bestimmten Wellenlänge in einem bestimmten Zeitpunkt während einer Periode errechnet sich dann als

$$E_\lambda = f(\nu_{\text{mom.}}, \lambda)$$

nach der Behnkenschen Formel. Da bei sinusförmig sich ändernder Spannung

$$\nu_0 = \frac{e}{h} A \sin(\omega t)$$

wird, wobei A die Maximalspannung, e die elektrostatische Ladung des Elektrons und h das Wirkungsquantum bedeuten, so errechnet sich der praktisch zur Wirkung kommende zeitliche Mittelwert der homogenen Strahlenintensität E_λ als:

$$E'_\lambda = \frac{1}{T/4} \int_{t=0}^{t=T/4} \nu^{3,8} \left[1 - e^{-\frac{q}{\nu^{3,8}}\left(\frac{e}{h} A \sin \omega t - \nu\right)}\right] e^{-\mu_\nu \cdot d} \cdot dt. \qquad (2)$$

Bei der Integration fällt ω heraus. Das bedeutet, daß der zeitliche Mittelwert von E_λ unabhängig wird von der Kreisfrequenz ω des zum Betrieb verwandten Wechselstroms. Dieses Ergebnis gilt nur unter der Voraussetzung, daß bei Glühkathodenröhren bei den röntgentechnisch verwandten Frequenzen kein Skineffekt auftritt. Das Resultat ist aber bestätigt durch die Versuche von Dauvillier, welcher eine Glühkathoden-Röntgenröhre das eine Mal mit Wechselstrom von 60, das andere Mal mit 600 Perioden betrieb und keinen Unterschied in der Strahlenausbeute gefunden hat. Endlich fand auch Behnken bei seinen sorgfältigen Messungen und seinen Lochkammeraufnahmen eine Unabhängigkeit der Strahlenausbeute von der Frequenz.

Setzt man zur Vereinfachung $-\frac{q}{\nu^{2,8}} \cdot \frac{e}{h} \cdot A = k_\nu$, so kann man schreiben:

$$E'_\lambda = \frac{e^{-\mu_\nu \cdot d} \cdot \nu^{2,8}}{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{\frac{q}{\nu^{1,8}}}\right) \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} e^{k_\nu \cdot \sin\alpha} \cdot d\alpha.$$

Der Ausdruck $\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} e^{k_\nu \cdot \sin\alpha} \cdot d\alpha$ läßt sich durch Reihen integrieren und es wird

$$E'_\lambda = \frac{e^{-\mu_\nu \cdot d} \cdot \nu^{2,8}}{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{\frac{q}{\nu^{1,8}}}\right) \left[\frac{\pi}{2} + k_\nu + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k_\nu^2}{2^2} + \frac{k_\nu^3}{3^2 \cdot 1^2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k_\nu^4}{4^2 \cdot 2^2}\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{k_\nu^n}{n^2(n-2)^2(n-4)^2 \ldots 5^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{\pi}{2} \frac{k_\nu^m}{m^2(m-2)^2 \ldots 4^2 \cdot 2^2} + \cdots\right],$$

wobei m eine gerade und n eine ungerade Zahl bedeuten.

Aber auch die mittlere relative Gesamtintensität E', welche definiert ist als zeitlicher Mittelwert der in den einzelnen Zeitpunkten einer Periode vorhandenen Gesamtintensitäten E, wird unabhängig von der Frequenz. Es ist nämlich

$$E' = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} E\,dt = \frac{1}{T} \int_{\lambda_0}^{\infty} \int_{t=0}^{t=T} \nu^{2,8} \left[1 - e^{-\frac{q}{\nu^{2,8}} \left(\frac{e}{h} A \sin\omega t - \nu\right)}\right] e^{-\mu_\nu d}\, d\nu\, dt.$$

Auch hier fällt bei der Integration ω heraus.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf konstanten Elektronenstrom. Da bei beliebigen Entladungsformen der Elektronenstrom aber nicht konstant zu sein braucht, sondern ebenfalls einen periodisch veränderlichen Verlauf nehmen kann, und da Behnken zwischen E_λ und dem Elektronenstrom bei seinen Messungen Proportionalität gefunden hat, so bewirkt auch der Stromverlauf eine Änderung der Werte E_λ. Namentlich durch die Ergebnisse von Dauvilliers Messungen [1]) an stehender Gleichspannung ist die Gültigkeit dieser Proportionalitätsbeziehung festgelegt. Der letztere hat auch gefunden, daß von dem durch das Milliamperemeter gemessenen Strom in dem Bereich der hier angewandten Spannungen nur $^7/_9$ der Elektronen auf die Antikathode auftreffen, welch letzteres Ergebnis Dauvillier auf die Rückdiffusion der Kathodenstrahlen zurückführt.

---

[1]) Dauvillier, Recherches spectrométriques sur les rayons X. (Dissertation 1920.)

Man hat also bei der Berechnung des zeitlichen Mittelwertes der Strahlungsintensität einer bestimmten Wellenlänge E'' dafür zu sorgen, daß die relativen Intensitäten E_λ in den einzelnen Zeitpunkten proportional den entsprechenden momentanen Elektronenströmen werden. Setzen wir zunächst der Einfachheit halber einen sinusförmig verlaufenden Elektronenstrom voraus und nehmen an, daß die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung bei der Coolidgeröhre gleich Null gesetzt werden kann, so errechnet sich die Intensitätsverteilung des praktisch zur Wirkung gelangenden Strahlengemisches als:

$$E''_\lambda = \frac{e^{-a_\nu \cdot d} \cdot i_{max} \cdot \nu^{2,8}}{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - e^{\frac{q}{\nu^{1,8}}} \left[1 + \frac{k_\nu \pi}{2 \cdot 2} + \frac{k_\nu^2}{3} + \frac{k_\nu^3 \cdot \pi}{4 \cdot 2^2 \cdot 2} + \frac{k_\nu^5 \cdot \pi}{6 \cdot 4^2 \cdot 2^2 \cdot 2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \frac{k_\nu^{n-1}}{n(n-2)^2(n-4)^2 \ldots 4^2 \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \cdots + \frac{k_\nu^{(m-1)}}{m(m-2)^2(m-4)^2 \ldots 5^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Hierin bedeutet i_{max} den maximalen Elektronenstrom. Der zeitliche Mittelwert der Gesamtintensität E errechnet sich dann als:

$$E'' = \frac{1}{T} \int_{\lambda_0}^{\infty} \int_{t=0}^{t=T} \nu^{2,7} \left[1 - e^{-\frac{q}{\nu^{2,8}} \left(\frac{e}{h} A \sin \omega t - \nu \right)} \right] e^{-a_\nu \cdot d} \cdot i_{max} \cdot \sin \omega t \cdot d\nu \cdot dt.$$

Im praktischen Betrieb hat man es aber mit beliebig periodisch verlaufenden Spannungen und Strömen zu tun. Man kann dann Strom- und Spannungsverlauf durch Fouriersche Reihen darstellen und mit dieser die Rechnung in ähnlicher Weise durchführen. Dies führt indes zu sehr komplizierten und unübersichtlichen Ausdrücken, so daß man besser den Weg der graphischen Behandlung beschreitet.

Den zeitlichen Mittelwert, welchen die Intensität E_λ einer bestimmten Wellenlänge bei sinusförmigem Spannungsverlauf annimmt, findet man dadurch, daß man den Verlauf von E_λ als Funktion der Zeit berechnet, indem man für jeden Zeitpunkt die Energie E_λ für diejenige Momentanspannung zugrunde legt, welche in dem entsprechenden Augenblick an der Röhre besteht. Am einfachsten ermittelt man die dabei entstehenden (E_λ, t)-Kurven dadurch, daß man die Sinuskurve der Wechselspannung aufzeichnet und für jede Momentanspannung die entsprechenden E_λ einzeichnet. Der Inhalt der von den (E_λ, t)-Kurven und der Abszissenachse eingeschlossenen Flächen stellt uns somit die monochromatische Gesamtintensität für die Wellenlänge λ dar. E''_λ selbst, also die zeitlichen Mittelwerte erhält man einfach dadurch, daß man die polarplanimetrisch zu ermittelnden Flächeninhalte durch die Zeitdauer dividiert, über welche

die Berechnung durchgeführt wurde. Wenn man auf diesem Wege E_λ' errechnet, so erhält man die Energieverteilung so, wie sie praktisch zur Wirkung kommt. Auf diese Weise wurde auch der zeitliche Verlauf von E_λ im folgenden für die Annahme eines sinusförmigen Spannungsverlaufs bei Gleichrichterbetrieb ermittelt. Wird der umgekehrte Impuls des Wechselstroms bei gleichen sekundären Momentanstromstärken nicht gleichgerichtet, sondern durch die Coolidgeröhre abgedrosselt, so kommt für die Strahlenerzeugung nur eine halbe Spannungswelle in Frage. Die Zeitdauer, durch welche man die monochromatischen Gesamtintensitäten

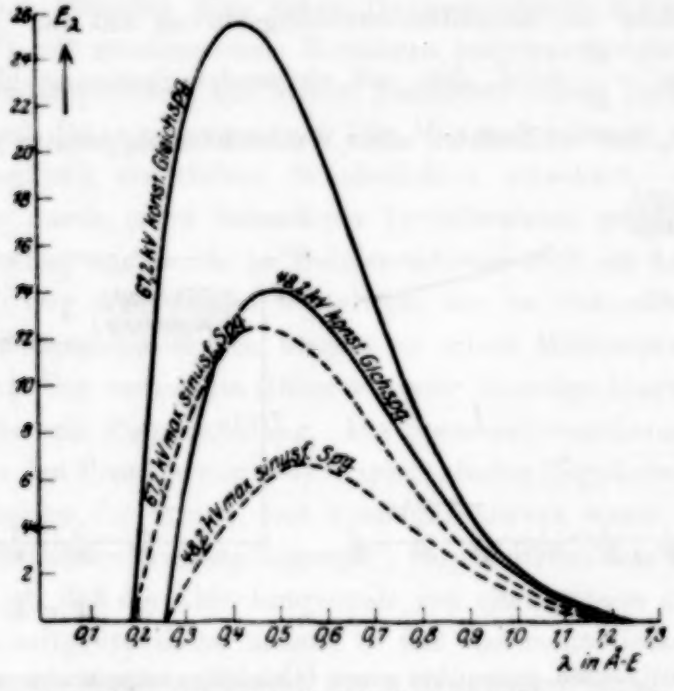

E_λ
67,2 kV konst. Gleichspg.
48,3 kV konst. Gleichspg.
67,2 kV max. Sinusf. Spg.
48,3 kV max. Sinusf. Spg.
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3
λ in Å-E

Fig. 1. Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum.

dividieren muß, um die zeitlichen Mittelwerte von E_λ zu bekommen, ist jedoch dieselbe wie bei konvertiertem Wechselstrom. Infolgedessen ist für alle E_λ jeweils nur der halbe Betrag zu setzen.

In Fig. 1 sind für verschiedene Maximalspannungen die spektralen Intensitätsverteilungen bei sinusförmiger Spannungskurve eingezeichnet (gestrichelte Kurven). Wie man sieht, tritt mit steigender Spannung eine Verschiebung des Maximums nach der Richtung der kürzeren Wellenlängen ein. Jedoch ist diese Maximumsverschiebung bei diesen Spektren von sinusförmiger Spannungserregung größer als bei der spektralen Energieverteilung bei reiner Gleichspannung, wie auch die entsprechenden Kurven zeigen, in denen zum Vergleich die entsprechenden Gleichspannungswerte

eingezeichnet sind. Aus Fig. 1 lassen sich aber noch folgende Gesetzmäßigkeiten erkennen:

1. Das Verhältnis der Gesamtstrahlungen bei konstanter und sinusförmiger Spannung und bei demselben Elektronenstrom nimmt mit steigender Spannung ab nach der in Fig. 2 angegebenen Kurve, in der als Abszissen die Scheitelspannungen aufgetragen sind und als Ordinaten das Verhältnis der Intensitäten bei konstanter Gleichspannung zum zeitlichen Mittelwert der Gesamtintensitäten bei sinusförmiger Erregung mit einer Maximalspannung, welche gleich der Gleichspannung ist. Die Gesamtintensitäten wurden dabei durch Planimetrieren der Flächen gefunden, welche die Intensitätsverteilungskurven mit der Abszissenachse einschließen. $\frac{E}{E'}$ wird also mit steigender Spannung kleiner, woraus weiter folgt, daß der Nachteil einer Wechselstromapparatur zur Erzeugung

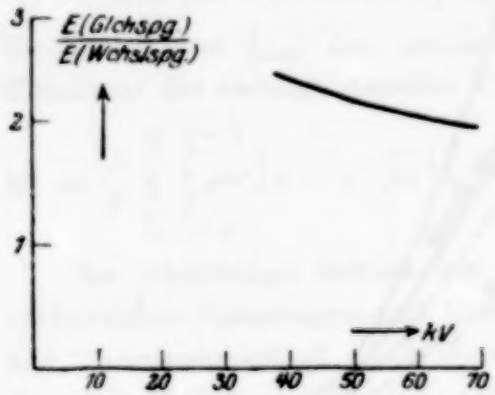


Fig. 2.

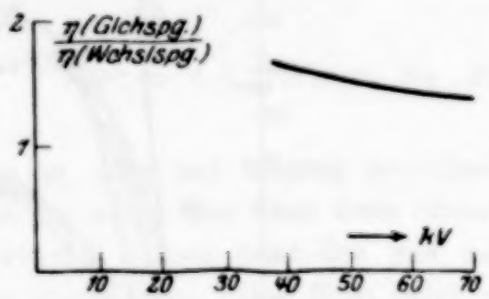


Fig. 3.

von Röntgenstrahlen gegenüber einer Gleichstromapparatur mit steigender Spannung immer mehr in den Hintergrund tritt, eine Tatsache, auf die Coolidge in seinen Untersuchungen aufmerksam gemacht hat [1]).

2. Daß der Unterschied in der spektralen Intensitätsverteilung bei Gleich- und Wechselstrombetrieb im Gebiet der kurzen Wellenlängen am größten ist.

Nun bleibt aber noch die Aufgabe, die beiden Spannungsformen hinsichtlich der damit zu erzielenden Wirkungsgrade zu vergleichen.

Dabei muß man berücksichtigen:

a) daß bei sinusförmiger Wechselspannung die der Röhre zugeführte Leistung 1,414 mal kleiner ist, da die bei Wechselstrombetrieb der Röhre zugeführte Leistung gleich Effektivspannung mal Strom ist und

[1]) The Amer. Journ. of Roentgenology.

b) daß das Verhältnis der Gesamtstrahlungen bei den beiden Entladungsformen nach der in Fig. 2 angegebenen Kurve verläuft.

Das Verhältnis der Wirkungsgrade bei den beiden Erregungsformen (Fig. 3) nimmt dann annähernd linear mit der Spannung ab, woraus ebenfalls folgt, daß der Nachteil einer Wechselstromapparatur bei hohen Spannungen gegenüber einem Gleichstrombetrieb immer weniger in Frage kommt.

III. a) Bei Wechselstrombetrieb.

Zum Betrieb der Coolidgeröhre wurde der Wechselstrom des Stadtnetzes von 45,3 Perioden über einen Dessauerschen Hochspannungstransformator [1]) mit geschlossenem Eisenkern hochtransformiert und die effektive Sekundärspannung mit einem elektrostatischen Voltmeter von Hartmann und Braun gemessen. Die Maximalspannung wurde aus dem oszillographisch ermittelten Scheitelfaktor errechnet. Die Glühkathode wurde durch einen besonderen Transformator geheizt und zum Schutze vor Überlastung wurde im Heizstromkreise noch ein Amperemeter eingeschaltet. Der algebraische Mittelwert der im Sekundärkreis vorhandenen Momentanstromstärken konnte an einem Milliamperemeter abgelesen werden. Die verwandte Röhre war eine Coolidge-Diagnostikröhre der Veifa-Werke mit Rippenkühlung. Die Spannungsregulierung geschah mittels eines in den Primärstromkreis eingeschalteten Regulierwiderstands.

Zur Aufnahme der Strom- und Spannungskurven wurde ein Brenzingerscher Kathodenstrahloszillograph [2]) verwandt, bei dem bekanntlich dafür gesorgt ist, daß die Ablenkungsspule von einem Strom durchflossen wird, der sich zeitproportional ändert, so daß das magnetische Hilfsfeld, dessen ablenkende Kraft senkrecht zur Ablenkungsrichtung des aufzunehmenden Vorganges steht, dem durch die Kathodenstrahlen erzeugten Leuchtfleck eine zeitproportionale Ablenkung erteilt. Legt man an den Kondensator C die zu untersuchende Spannung, so erhält man die gewünschte Kurve als stehendes Bild auf dem Leuchtschirm des Oszillographen.

Wie die in Abschnitt IV abgebildeten Oszillogramme zeigen, ist die Länge der ersten Halbwelle des Spannungsbildes größer als die der zweiten und dritten. Diese Verzerrung im Oszillogramm ist darauf zurückzuführen, daß ein vollkommen geradliniger Stromanstieg im Hilfskreis nicht realisierbar ist. In einem Stromkreis mit Induktivität und

[1]) F. Dessauer, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 1917.
[2]) M. Brenzinger, Phys. ZS. **23**, 491—495, 1922.

Widerstand steigt der Strom bekanntlich nach der Helmholtzschen Gleichung an:

$$i_1 = \frac{E}{R}\left(1 - e^{+\frac{R}{L}t}\right). \qquad (1)$$

Für den Grenzfall, daß nur Induktivität und kein Widerstand vorhanden ist, gilt die Gleichung:

$$i_2 = \frac{E}{L}t.$$

Die wegen des im Hilfsstromkreis immer noch vorhandenen Widerstandes auftretende Verkürzung der Phasenlänge läßt sich darstellen durch den Ausdruck:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{t}{\frac{L}{R}\left(1 - e^{\frac{R}{L}t}\right)}.$$

Setzt man die Zeitkonstante $\frac{L}{R} = T$, so wird:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{t}{T\left(1 - e^{\frac{t}{T}}\right)}.$$

T beträgt für den vorliegenden Fall $\frac{1}{8}$.

Im folgenden sollen nun die möglichen Fehler in den vorliegenden Berechnungen diskutiert werden, welche durch die Verzerrung des Oszillogramms hervorgerufen sind. Für die vorliegende Arbeit kommen durch die Verzerrung des Oszillogramms hauptsächlich zwei Fehler in Frage:

a) der Fehler in der Ermittlung des Scheitelfaktors;

b) der Fehler in der Ermittlung der (E_i, t)-Kurven und des zeitlichen Mittelwertes von E_i.

1. Es wurde zuerst der Einfluß der Verzerrung auf den Effektivwert ermittelt. Zu diesem Zweck wurde der Verlauf von $K V^2_{mom}$ als Funktion der Zeit sowohl für eine normale Sinuskurve aufgezeichnet als auch für eine verzerrte Sinuskurve für den Fall, daß die Zeitkonstante gleich $\frac{1}{8}$ ist. Die Quadratwurzel aus dem algebraischen Mittelwert von $K V^2_{mom}$ gibt dann bekanntlich den Effektivwert. Eine genaue Rechnung ergibt, daß der Effektivwert der verzerrten Sinuskurve um 0,8 Proz. zu klein wird.

2. Nun wurde auch noch der Fehler der Verzerrung in der Berechnung des zeitlichen Mittelwertes von E_i ermittelt. Zu diesem Zweck wurden einmal die (E_i, t)-Kurven für die normale, ein anderes Mal für die verzerrte Sinuskurve aufgezeichnet. Der zeitliche Mittelwert von E_i wird bei der verzerrten Sinuskurve um 0,75 Proz. zu groß. Dieser ge-

ringe Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß sich durch die Verzerrung auch die Zeitdauer verkleinert, durch welche man die monochromatische Gesamtintensität dividieren muß, um den zeitlichen Mittelwert von E zu bekommen.

Es bliebe nun natürlich die Möglichkeit, die Oszillogramme mittels der angegebenen Formel zu korrigieren. Dies ist jedoch nicht zweckmäßig, da sich durch die erforderliche Vergrößerung des Oszillogramms ebenso große oder größere Fehler einstellen würden, wie sie durch die Verzerrung des Oszillogramms bedingt sind. Außerdem hat die Rechnung gezeigt, daß die prozentualen Fehler in der Berechnung von E' für den ganzen Bereich des Spektrums sehr wenig voneinander abweichen. Die durch die Verzerrung des Oszillogramms bedingten Fehler liegen also innerhalb der Auswertungsgenauigkeit. Man kann aber die Ordination der resultierenden spektralen Energieverteilungskurven nachträglich korrigieren, da ja nunmehr bekannt ist, wie groß die prozentuale Ordinatenvergrößerung ist.

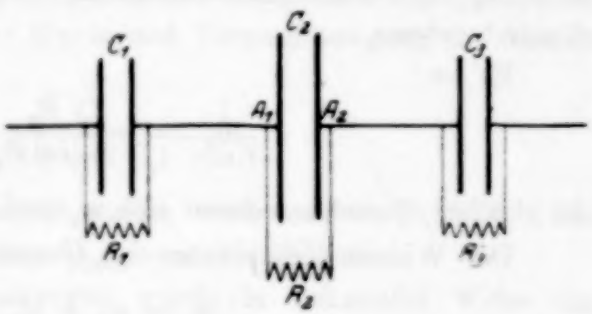


Fig. 4.

Für die Aufnahme der Sekundärspannungskurven ist es erforderlich, die Größenordnung der an der Röhre liegenden Spannung auf 200 bis 300 Volt zu reduzieren. Wehnelt und Behnken[1]) benutzten dazu das Prinzip der kapazitiven Unterteilung.

Bei der Behnkenschaltung war die eine Hochspannungsklemme des Transformators geerdet, die andere führte an die eine Platte des Luftkondensators, mit dem sich ein Plattenkondensator in Reihe befand, dessen zweite Belegung geerdet war. Von der anderen Belegung des Kondensators wurden die störenden Ladungen über einen hochohmigen Flüssigkeitswiderstand zur Erde abgeleitet.

Da die beiden Hochspannungsklemmen des Dessauerschen Hochspannungstransformators beide beim Betrieb der Röntgenröhre auf hohe Potentiallage gebracht sind (und die Mitte der Sekundärwicklung geerdet ist), so wurde die Behnkenschaltung, wie Fig. 4 zeigt, in symmetrischer Anordnung angewandt. Wie das Schaltbild zeigt, wurde an jede der

[1]) Behnken, Arch. f. Elektrotechn. 11, 1922.

beiden Hochspannungsklemmen ein Luftkondensator C_1 und C_3 angeschlossen, der aus zwei gut ausgerichteten Blechplatten von 20 cm Durchmesser bestand, deren Abstand beliebig verändert werden konnte. In Serie zu diesen Luftkondensatoren lag ein Plattenkondensator C_2, der mit dem Ablenkungskondensator parallel geschaltet war. Die Hochspannung lag also an einem System vom Schema der Fig. 4, in welcher R_1, R_2 und R_3 die hochohmigen Isolationswiderstände zwischen den Belägen der Kondensatoren bedeuten. Die Bewegung des Leuchtflecks hängt von der Spannungsdifferenz zwischen A_1 und A_2 ab. Im folgenden soll nun durch komplexe Größen das Verhältnis der Potentialdifferenz A_1 und A_2 zur Gesamtspannung errechnet werden.

Die Spannungsdifferenz $\mathfrak{E}_2$ zwischen A_1 und A_2 verhält sich zur Gesamtspannung $\mathfrak{E}$ wie der Widerstandsoperator $\mathfrak{w}_2$ der Elemente C_2 und R_2 in Nebeneinanderschaltung zum Widerstandsoperator $\mathfrak{w}$ des Gesamtsystems.

Es ist:

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}. \tag{2}$$

In gleicher Weise berechnen sich $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_3$.

Der Widerstandsoperator des Gesamtsystems ist:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3, \tag{3}$$

da $R_3 = R_1$ und $C_3 = C_1$, so wird $\mathfrak{w}_3 = \mathfrak{w}_1$ und

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_2 + 2\,\mathfrak{w}_1 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} + \frac{2R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}. \tag{3a}$$

Nun ist

$$\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}}.$$

Durch Einsetzen der komplexen Ausdrücke für $\mathfrak{w}_2$ und $\mathfrak{w}$ und Vernachlässigung derjenigen Glieder, die gegenüber den übrigen klein sind, erhält man schließlich für die Phasenverschiebung zwischen $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}$:

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\omega R_2 C_1}{2} + \omega R_2 C_2.$$

Es sollen nun für den vorliegenden Fall Art und Größe der möglichen Verzerrungen errechnet werden:

Es wurden gemessen: $C_2 = 600\,\text{cm} = 0{,}667 \cdot 10^{-9}\,\text{F}$; $R_2 = 75 \cdot 10^6\,\text{Ohm}$; $\omega = 284{,}5$; $C_3 = C_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-10}\,\text{F}$ und $R_1 = 2 \cdot 10^{10}\,\text{Ohm}$.

Es wird dann:

$$\operatorname{ctg}\delta = 14{,}54.$$

$\delta = 3^0\,56'$ ist also von den Größen C_1 und C_3 nahezu unabhängig und im wesentlichen durch die Größen C_2 und R_2 bestimmt. Im vorliegenden Falle wird also annähernd:

$$\operatorname{ctg}\delta = R_2\,\omega\,C_2.$$

Für den Fall der Grundschwingung von 45,3 Perioden eilt $\mathfrak{E}$ der Spannung $\mathfrak{E}_2$ am Ablenkungskondensator um $3^0\,56'$ nach. Für die deutlich vertretene dritte Harmonische wird $\delta = 1^0\,19'$. Die Nacheilung beträgt hier nur etwa $^1/_3$ von der der Grundfrequenz. Die Phasenverschiebung gegenüber der Grundschwingung beträgt $2^0\,57'$.

Das Verhältnis der Amplituden wird:

$$\frac{E_2}{E} = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta} = \frac{a}{\cos\delta}, \qquad (5)$$

worin a der reelle, b der imaginäre Teil des komplexen Ausdruckes für $\mathfrak{E}_2/\mathfrak{E}$ ist. Durch Einsetzen der Werte und Vernachlässigung der kleinen Glieder erhält man:

$$\frac{E_2}{E} = \frac{C_1}{(C_1 + 2\,C_2)} \cdot \frac{1}{\cos\delta}.$$

Da oben δ zu $3^0\,56'$ ermittelt wurde, wird $\cos\delta = 0{,}9976$. Das Verhältnis E_2/E weicht also etwa $^3/_{1000}$ vom Idealfall ab.

Zur Aufnahme der Stromkurven wurde in bekannter Weise das negative Glimmlicht einer Gehreckeschen Glimmlichtröhre, welche direkt vor die Coolidgeröhre geschaltet war, auf einen synchron rotierenden Film projiziert. Der Film wurde dabei vor der Schwärzung durch Röntgenstrahlen mittels eines zylinderförmigen Bleigehäuses geschützt. Da die Länge des Glimmlichtes der Momentanstromstärke proportional ist, stellt die Umgrenzungskurve des Bildes (Fig. 8) die Stromkurve dar. Wie das Bild zeigt, ist der Verlauf des Röhrenstromes im wesentlichen konstant. Der umgekehrte Impuls ist durch die Ventilwirkung der Coolidgeröhre abgedrosselt. Die geringen Abweichungen vom konstanten Verlauf des Stromes am Anfang und Ende der belasteten Halbperiode treten hinsichtlich der Strahlenausbeute ganz in den Hintergrund, da sie, wie aus den photographischen Aufnahmen der Spannungskurven hervorgeht, zeitlich mit den niederen Momentanspannungen am Anfang und Ende des Spannungsimpulses zusammenfallen.

III. b) Bei Betrieb mit Gleichstrom.

Die Untersuchung der Entladungsformen wurde an der in Fig. 5 schematisch dargestellten Apparatur (Delonschaltung) durchgeführt. Der

Wechselstrom des städtischen Netzes von 240 Volt wurde über zwei kleine eisengeschlossene Transformatoren in Dessauerschaltung hochtransformiert und die Primärspannung durch einen Stufentransformator reguliert. Die eine Klemme der Sekundärspule war geerdet, an der anderen Klemme S schwankt das Potential zwischen $+$ und $-V_{max}$. Ist nun die Hochspannung an der Verzweigungsstelle S positiv, so wird über die Ventilröhre V_1 der Kondensator C_1 positiv auf das Potential $+V_{max}$ aufgeladen; ist die Hochspannung in S aber negativ, so fließt der Strom durch die Ventilröhre V_2 auf den Kondensator C_2. Da die positive Elektrizität durch das Ventil V_1 nicht zurückfließen kann, so behält der Kondensator C_1 seine negative Ladung. Wir erhalten also zwischen den Elektroden A und K der in Fig. 5 eingezeichneten Röntgenröhre eine Potentialdifferenz, welche gleich der doppelten vom Transformator gelieferten Spannung ist. Die Antikathode der Röntgenröhre ist mit C_1, die Kathode mit C_2 verbunden. Wenn bei dieser Schaltung kein hoher Strom durch die Röhre fließt, so ist der Spannungsverlauf annähernd konstant, anderenfalls schwankt er um einen algebraischen Mittelwert, der nur um wenige Prozent von der Maximalspannung abweicht. Zur Messung des algebraischen Mittelwertes der Spannung im halben Arbeitskreis wurde die Hochspannungsseite über einen hochohmigen Widerstand R und das Galvanometer G mit der Erde verbunden. Die Spannung ist dann gleich dem Produkt aus dem Widerstand R und dem vom Galvanometer angezeigten Strom. Die Maximalspannung wurde aus dem algebraischen Mittelwert der Spannung und dem oszillographisch ermittelten Scheitelfaktor errechnet. Zur Messung von R wurde der Kondensator C_2 über R entladen. Auf Grund der bekannten Relation

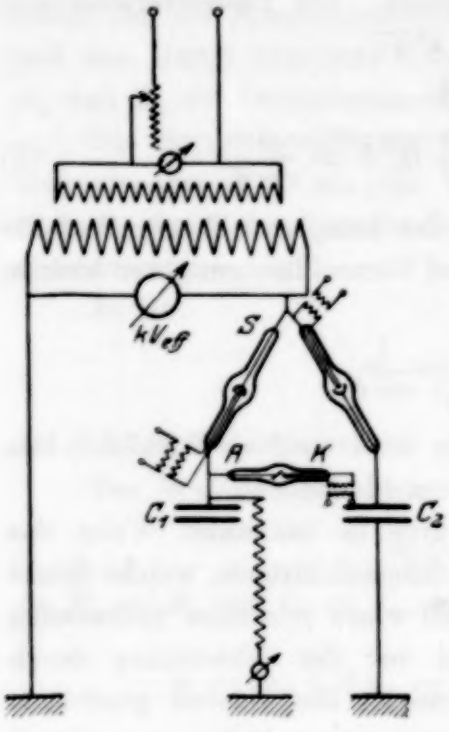


Fig. 5.

$$R = \frac{t}{C \log \text{nat} \cdot \frac{V_1}{V_2}}$$

wurde der unbekannte Widerstand R aus der bekannten Kapazität C und der Abfallszeit t der Spannungen V_1 zu V_2 ermittelt. Bei der Messung von R mußte natürlich das Isolationsvermögen des Kondensators C_2 besonders gemessen und bei der Berechnung berücksichtigt werden. Der hochohmige Widerstand bestand aus einem feuchten Ahornstab, welcher zur Vermeidung einer größeren Inkonstanz in eine Isoliermasse aus Paraffin und Wachs eingegossen wurde. Die Größe des Widerstandes war im allgemeinen $9 \cdot 10^8$ Ohm. Um die Fehler in der Hochspannungsmessung, welche durch die Änderung des Widerstandes eintreten, ausgleichen zu können, wurde direkt an jede Hochspannungsmessung eine Widerstandsmessung angeschlossen.

Zur Aufnahme des periodischen Verlaufs der Spannung im halben Arbeitskreis wurde hinter den Widerstand R noch ein Widerstand r eingeschaltet, der so groß gewählt war, daß der Spannungsabfall an r 100 bis 200 Volt betrug. Parallel zu r lag der Ablenkungskondensator des Braunschen Rohres. Zur Aufnahme der Stromkurve wurde der hochgespannte Strom direkt durch eine Ablenkungsspule des Braunschen Rohres geleitet und die möglichen Verzerrungen durch etwaige statische Aufladungen durch einen geerdeten statischen Schutz vermieden.

IV. a) Auswertung der Wechselspannungs- und Strom-Oszillogramme.

Im folgenden Abschnitt sollen nun die Wechselspannungs- und Stromkurven hinsichtlich der von ihnen erzeugten Strahlung diskutiert werden. Dieselben sind hier photographisch wiedergegeben. Allgemein läßt sich folgendes über die Oszillogramme sagen:

1. Bei Belastung mit 5 mA zeigt das Spannungsoszillogramm deutlich eine ausgeprägte dritte Harmonische.

2. Die Momentanspannungen des belasteten Impulses sind kleiner als die des abgedrosselten.

3. Die Spannungskurve nähert sich um so mehr der Sinusform, je höher die Scheitelspannung ist, je geringer also der Widerstand im Primärkreis ist.

4. Der Röhrenstrom bleibt im ganzen Bereich der belasteten Halbperiode praktisch konstant.

Fig. 6 zeigt den Spannungsverlauf bei Betrieb der Coolidgeröhre mit einer Maximalspannung von 67,2 kV und einem Röhrenstrom von 5 mA. Zur Auswertung wurde der graphische Weg eingeschlagen.

Zu diesem Zweck betrachtet man E_i wiederum als Funktion der Zeit, indem man für jeden Zeitpunkt die Intensität E_i für diejenige Spannung zugrunde legt, welche in dem betreffenden Zeitpunkt an der Röhre vorhanden ist. Bei dieser graphischen Methode wurde auf die genaue Wiedergabe der Spannungskurve besonders geachtet. Es wurden zunächst die obere und untere Umrandung des Oszillogramms auf der gegen das durchscheinende Licht gehaltenen photographischen Platte auf Pauspapier scharf nachgezeichnet. Dann wurde die Mittellinie der beiden Randkurven in möglichst dünnem Strich auf Millimeterkoordinatenpapier so durchgepaust, daß der nunmehr schärfer gekennzeichnete Anfangspunkt der belasteten Halbperiode zusammenfiel mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems, und daß die Nullinie des Oszillogramms sich mit der Abszissenachse deckte. Die Ordinaten der Spannungskurve stellen dann ein relatives Maß für die Momentanspannungswerte dar. Die höchste in Millimetern gemessene Momentanspannung wurde dann gleich der tatsächlichen Maximalspannung gesetzt und die übrigen Momentanspannungen aus den Ordinatenverhältnissen errechnet. Die Schnittpunkte der Kurve mit den Ordinaten des Millimeterpapiers konnten dabei auf ein $^1/_{10}$ mm genau abgelesen werden. Auf diese Weise wurden die Momentanspannungswerte in Zeitabständen von 1 mm auf der Abszissenachse ermittelt.

Fig. 6.

Diese Methode hat sich als die relativ genaueste erwiesen, da sich bei der Vergrößerung der Oszillogramme größere Fehlerquellen einstellen würden; sie hat aber den Nachteil, daß sie bei genauer Durchführung sehr langwierig ist. Die zu den einzelnen Zeitpunkten gehörenden Momentanspannungen nehmen nämlich wegen der beliebig periodischen Veränderlichkeit der Spannung in den verschiedenen Zeitintervallen nicht um denselben additiven Betrag zu. Deshalb ist es erforderlich, für jeden einzelnen Zeitpunkt jedes Oszillogramms die E_i-Werte zuerst besonders zu ermitteln.

In Fig. 7 sind als Abszissen die zu den einzelnen Spannungen gehörenden Zeiten, als Ordinaten die zu den entsprechenden Wellenlängen und Spannungen gehörenden E_i gezeichnet. Die Zeitintervalle wurden dabei im Koordinatenpapier der Fig. 7 fünfmal so groß als im Oszillogramm gewählt.

Da der Verlauf der Spannung in bezug auf die Scheitelspannung nicht ganz symmetrisch ist, so zeigt sich auch im zeitlichen Verlauf der monochromatischen Intensitäten eine kleine Unsymmetrie in bezug auf den Maximalwert. In der zweiten Hälfte des belasteten Impulses fallen die Intensitäten der einzelnen Wellenlängen rascher ab. Dieses raschere Abfallen der Momentanspannungen und der Intensitäten E_λ in der zweiten Hälfte des belasteten Impulses ist zum Teil auf die oben diskutierte Verzerrung im Oszillogramm zurückzuführen.

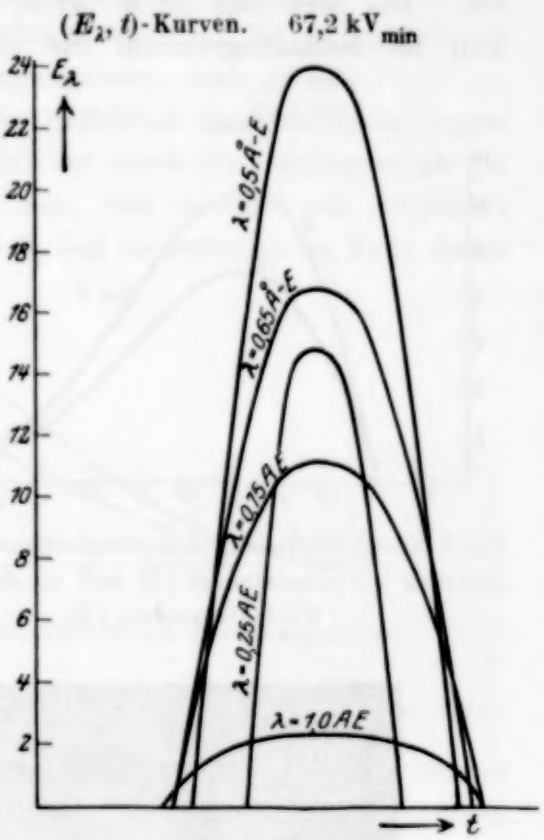


Fig. 7.

Endlich liegen die Scheitelspannung und infolgedessen auch die Maxima der (E_λ, t)-Kurven nicht genau in der Mitte des belasteten Impulses. Aus diesem Grunde mußten die E_λ-Werte für den ganzen Bereich des belasteten Impulses eingezeichnet werden. Ermittelt man aus Fig. 7 die zeitlichen Mittelwerte, welche die E_λ für die einzelnen Wellenlängen annehmen, so erhält man die in Fig. 9 (Kurve *A*) dargestellte resultierende spektrale Energieverteilung. Wegen der Abdrosselung der verkehrten Stromimpulse durch die Coolidgeröhre ist, wenn das Milliamperemeter den zeitlichen Mittelwert des Stromes von 5 mA anzeigt, tatsächlich im belasteten Impuls eine Momentanstromstärke von 10 mA vorhanden. Zum Vergleich wurde in Fig. 9 die spektrale Intensitätsverteilung für eine konvertierte sinusförmige Wechselspannung bei derselben Maximalspannung und 5 mA Momentanstromstärke eingezeichnet. Diese Berechnungen wurden unter der Annahme einer konstanten Elektronenemission durchgeführt. Dies ist durchaus berechtigt, da, wie Fig. 8 zeigt und wie ich schon erwähnt, der Röhrenstrom über den ganzen Bereich der Halbperiode praktisch konstant bleibt. Diese Tatsache steht in gutem Einklang mit dem von

Fig. 8.

H. Behnken[1]) gefundenen Resultat, daß auch bei Betrieb der Coolidgeröhre mit sinusförmiger Wechselspannung die E_λ für die einzelnen Wellenlängen direkt proportional dem Röhrenstrom sind. In der Fig. 9 zeigt sich deutlich eine kleine Verschiebung des Energiemaximums der Kurve B gegenüber der Kurve A nach der Seite der langen Wellenlängen hin. Die Strahlung ist in ihrem Gesamtcharakter weicher geworden, weil im Entladungsverlauf die niederen Spannungskomponenten der deformierten Wechselspannungskurve eine größere Rolle spielen als bei sinusförmiger Erregung. Die Gesamtintensität ist schwächer geworden als bei Kurve B.

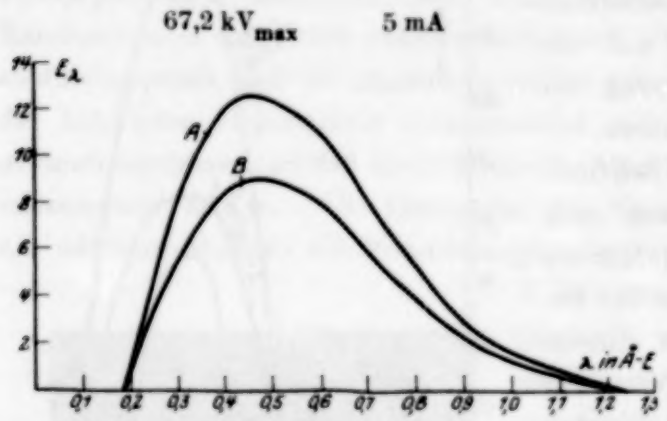


Fig. 9. Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum bei sinusförmiger (A) und bei deformierter Wechselspannung (B).

Fig. 10.

Fig. 10 stellt den Spannungsverlauf bei 48,2 kV_{max} und 5 mA Röhrenstrom dar. Die entsprechenden (E_λ, t)-Kurven beschränken sich dann auf einen kürzeren Zeitbereich innerhalb der Periode als bei 67,2 kV_{max}, und die relativen Intensitäten E_λ lassen den niederen Spannungen entsprechend nach. Die Intensitätsverteilung für diesen Fall ist in Fig. 11 dargestellt und zum Vergleich die Intensitätsverteilung bei konvertierter sinusförmiger Spannung mit derselben Scheitelspannung und 5 mA Röhrenstrom eingezeichnet (Kurve A). Gegenüber dem Energiemaximum bei sinusförmiger Erregung hat sich das Maximum der Kurve B ebenfalls nach der Seite der langen Wellen hin verlagert. Auch die Gesamtintensität in Kurve A hat sich noch mehr verschlechtert. Dies erklärt sich daraus, daß die Spannungskurve bei 48,2 kV_{max} einen höheren Scheitelfaktor hat als bei 67,2 kV_{max}. Der Scheitelfaktor wurde dabei aus den Oszillogrammen in folgender Weise ermittelt: Es wurden

[1]) H. Behnken, ZS. f. Phys. **3**, 1920.

für die ganze Periode die Quadrate der Momentanspannungen als Funktion der Zeit aufgezeichnet und ihre Summe durch die Zeitdauer einer Periode dividiert. Die Quadratwurzel aus dem erhaltenen Mittelwert ist dann gleich der Effektivspannung. Der Scheitelfaktor ist dann gleich Maximalspannung dividiert durch Effektivspannung.

Bei 38 kV_{max} wird die bisherige Diskrepanz zwischen den Gesamtintensitäten bei sinusförmigem Wechselstrom und bei der gegebenen oszillographisch aufgenommenen Spannungskurve noch größer.

Betrachtet man endlich wieder das Verhältnis der Gesamtstrahlungen bei stehender Gleichspannung und bei der durch die Oszillogramme gegebenen Entladungsform, so findet man, daß dasselbe mit steigender Spannung kleiner wird. Es ergibt sich, daß im betrachteten Falle dieses

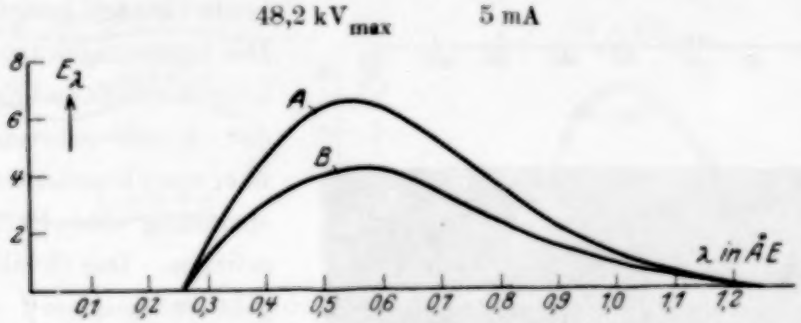


Fig. 11. Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum.

Verhältnis $\frac{E\ (\text{Gleichstrom})}{E\ (\text{Wechselstrom})}$ im Bereich der verwandten Spannungen stärker abfällt als bei sinusförmiger Wechselspannung. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit steigender Maximalspannung die Scheitelfaktoren der Spannungskurven, die im allgemeinen größer sind als 1,414, sich allmählich dem Scheitelfaktor der Sinuskurve nähern.

Schließlich möge noch das Verhältnis der Wirkungsgrade bei stehender Gleichspannung und bei den in den Oszillogrammen angegebenen Entladungsformen diskutiert werden. Die der Röhre zugeführten Leistungen ermittelt man dabei am einfachsten als algebraische Mittelwerte der Momentanleistungen.

Es ergibt sich dann, daß das Verhältnis $\frac{\eta\ \text{Gleichspannung}}{\eta\ \text{deform. Wechselspannung}}$ sich nur sehr wenig von $\frac{\eta\ \text{Gleichspannung}}{\eta\ \text{sinusf. Spannung}}$ unterscheidet.

Dies erklärt sich aus dem Umstand, daß bei deformierter Wechselspannung auch die der Röhre zugeführte elektrische Leistung geringer ist als bei Erregung mit sinusförmiger Wechselspannung.

IV. b) Auswertung der Gleichstrom- und Spannungs-Oszillogramme.

Im folgenden Abschnitt sollen nun die bei stehender Gleichspannung an der Delonschaltung aufgenommenen Oszillogramme ausgewertet werden.

Fig. 13 zeigt den Spannungs- und Stromverlauf bei einem algebraischen Mittelwert der Spannung von 50,7 kV. Der Stromverlauf ist hier annähernd konstant geworden, und die geringen Abweichungen vom geradlinigen Verlauf können hinsichtlich der Strahlenausbeute vernachlässigt werden. Die Spannungskurve hat infolge der Auf- und Entladung der Kondensatoren gegenüber einer konstanten Gleichspannung eine Deformation erlitten. Das Oszillogramm gibt entsprechend der verwandten Schaltung natürlich nur den Verlauf der Spannung im halben Arbeitskreis wieder. Um den Verlauf der Gesamtspannung an der Röhre zu bekommen, hat man eine weitere um 180° in der Phase verschobene Spannungskurve zu zeichnen (Fig. 14) und deren Momentanwerte zu den entsprechenden Momentanspannungen der anderen Schaltungshälfte zu addieren. Die Spannung pulsiert dabei also mit der doppelten Frequenz um einen algebraischen Mittelwert.

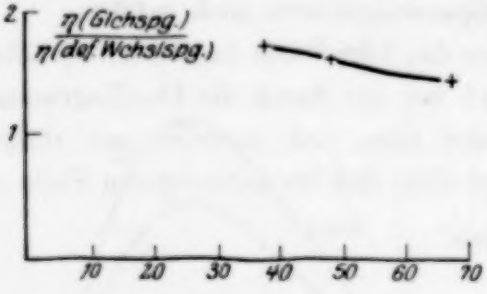


Fig. 12.

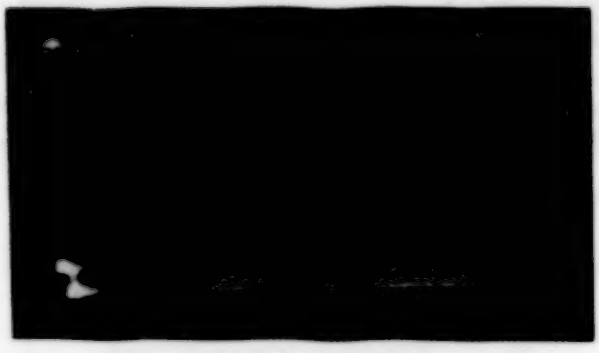


Fig. 13.

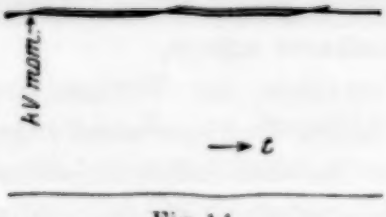


Fig. 14.

Zur Ermittlung der Energieverteilung betrachtet man wiederum die Energie einer bestimmten Wellenlänge als Funktion der Zeit, indem man für jeden Zeitpunkt die Energie E_λ für diejenige Momentanspannung zugrunde legt, welche in dem betreffenden Zeitpunkt an der Röhre herrscht. Dabei schwankt die Energie E_λ um einen algebraischen Mittelwert, den

man dadurch erhält, daß man durch mechanische Quadratur die monochromatische Gesamtintensität (Fig. 15) ermittelt und durch die Zeitdauer dividiert, über welche die Berechnung durchgeführt wurde. Daraus ergibt sich dann die Energieverteilung der Fig. 16, zu deren Vergleich die mit Hilfe der Behnkenschen Formel berechnete Intensitätsverteilung bei vollkommen konstanter Gleichspannung eingezeichnet ist. Die Gleichspannung wurde dabei so hoch gewählt wie die Scheitelspannung der deformierten Gleichspannung. Die Gesamtstrahlungen unterscheiden sich nur um wenige Prozent. Diese Abweichung fällt zum großen Teil

(E_λ, t)-Kurven.

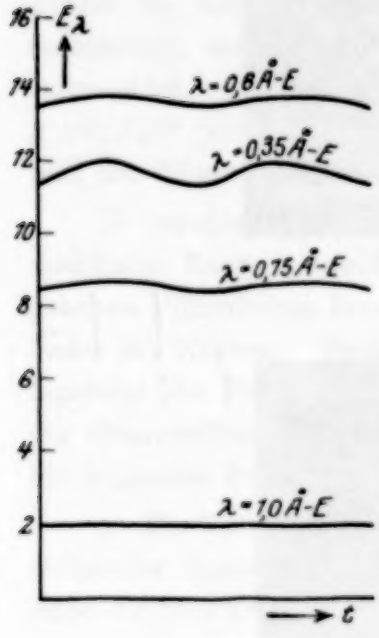


Fig. 15.

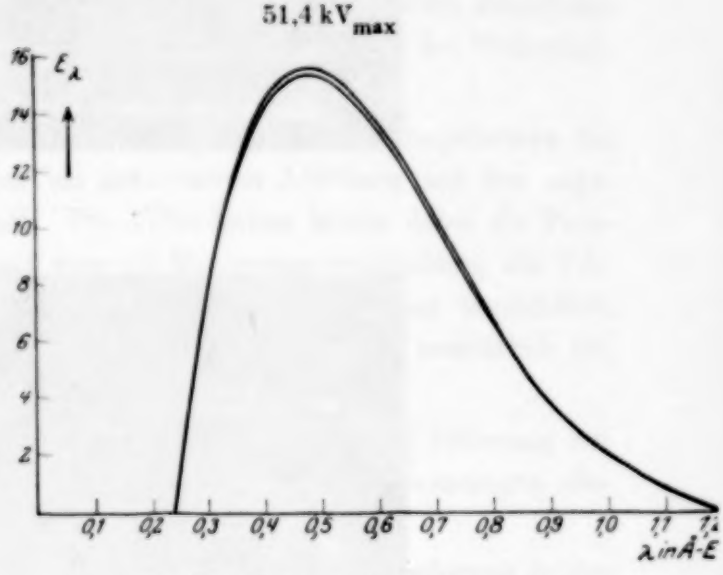


Fig. 16. Deformierte Gleichspannung.

in das Gebiet der kurzen Wellenlängen, was sich aus dem Verlauf der Spannungskurven erklärt.

Fig. 17 stellt den Strom- und Spannungsverlauf bei 46,6 kV Maximalspannung und 10 mA dar. Im Spannungsoszillogramm ist ein größerer Spannungsabfall wegen der größeren sekundären Stromstärke vorhanden.

Fig. 18 stellt den Strom- und Spannungsverlauf bei 41,9 kV Maximalspannung und 20 mA dar. Im Spannungsverlauf ist ein weiterhin größerer Spannungsabfall wegen der noch größeren sekundären Stromstärke vorhanden, als es bei den früheren Beispielen der Fall war. Es läßt sich somit im großen und ganzen sagen, daß der Spannungsverlauf bei gegebener Kondensatorgröße und verschiedenen Maximalspannungen

durch die Strombelastung beeinflußt ist. Bei der Betrachtung der verschiedenen Energieverteilungen bei verschiedener Strombelastung der Röhre läßt sich entnehmen, daß diese, abgesehen für einen sehr engen Bereich der kürzesten Wellenlänge, dieselben sind, wie wenn eine konstante Gleichspannung an der Röhre liegen würde, deren Größe durch den algebraischen Mittelwert der Spannung gegeben wäre.

Hält man an der Röhre eine bestimmte Spannung fest und steigert man die Strombelastung von niederen Stromwerten zu höheren Milli-

Fig. 17.

Fig. 18.

amperezahlen, so zeigt die Spannungskurve, wie schon erwähnt, einen immer größeren Spannungsabfall. Deshalb wird mit der Steigerung der Stromstärke bei derselben Scheitelspannung die Energieverteilung immer ungünstiger. Das Verhältnis der Wirkungsgrade bei vollkommen konstanter Spannung und bei der durch die Oszillogramme angegebenen deformierten Gleichspannung findet man wiederum dann, wenn man das Verhältnis der austretenden Gesamtstrahlungen durch das Verhältnis der zugeführten Leistungen dividiert. Die der Röhre zugeführte Leistung ist annähernd gleich dem Produkt aus dem algebraischen Mittelwert der Spannung.

Das Verhältnis der Wirkungsgrade ist dabei gleich dem Verhältnisse der Gesamtstrahlungen dividiert durch den Scheitelfaktor der Spannungskurve, eine Beziehung, die allgemein für derartige Vergleiche bei konstantem Elektronenstrome gültig ist. Der Scheitelfaktor wurde dabei so wie im Abschnitt IVa ermittelt.

V. Gefilterte Strahlung.

Bei der Filterung mit Metallen, die keine charakteristische Strahlung ergeben, werden die monochromatischen Intensitäten E_λ auf $E_\lambda \cdot e^{-\mu \cdot d}$ abgeschwächt, wenn d die Dicke, μ den Absorptionskoeffizienten des Filters bei der Wellenlänge λ bedeuten. Wenn man die Streuung vernachlässigt, was bei niederen Spannungen und mittelschweren Filtern zulässig ist, so kann man μ nach der experimentell geprüften Beziehung $\mu = A\lambda^{2,8}$ berechnen, wobei A sich aus der Dichte und der Ordnungszahl des Filtermaterials berechnen läßt.

Es wurden für verschiedene Spannungen und Entladungsformen die spektralen Energieverteilungen bei sukzessivem Abfiltern mit den angegebenen Filterdicken berechnet. Die Filterdicken bilden dabei die Parameter der Kurven. Bezeichnet man als Maximumsverschiebung die Verlagerung des Energiemaximums bei verschiedener Filterung hinsichtlich der Grenzwellenlänge, so ergeben sich, wie ohne weiteres ersichtlich ist, die folgenden Zusammenhänge:

1. Die Verschiebung des Energiemaximums nimmt bei Filterung mit steigender Spannung ab, wenn bei den verschiedenen Spannungen dieselbe Filterdicke festgehalten wird.

2. Bei festgehaltener Scheitelspannung nimmt die Änderung in der Lage des Energiemaximums λ_{max}, bezogen auf λ_{max} bei der Filterdicke 0, mit steigender Filterung zu.

3. Die Maximumsverschiebung wird um so größer, je höher der Scheitelfaktor der Spannungskurve ist. Dies erklärt sich aus dem Umstand, daß bei gleicher Maximalspannung der Gesamtcharakter des Strahlengemisches um so weicher ist, je mehr in der Spannungskurve die niederen Momentanspannungen gegenüber den hohen an Bedeutung hervortreten, und ferner aus der Tatsache, daß die weichen Strahlen stärker absorbiert werden als die harten.

4. Die aus den polarplanimetrisch gefundenen Absorptionskurven sich ergebenden kritischen Filterdicken sind um so größer, je höher die Spannung und der Scheitelfaktor der Spannungskurve sind.

5. Die von den kritischen Filtern hindurchgelassene nutzbare Strahlung E_n, gegeben durch das Verhältnis der Reststrahlung zur Strahlung vor dem Eintritt in das Filter, gestaltet sich um so günstiger, je höher die Spannung ist und je konstanter der Spannungsverlauf ist.

Zusammenfassung. Auf Grund der Behnkenschen Formel wird die Energieverteilung im Röntgenspektrum bei verschiedener Erregung der Röntgenröhre berechnet. Die Deformationen des Strom- und Spannungsverlaufes in der Röhre werden experimentell geprüft, ihr Einfluß und der Einfluß der Filter auf die Energieverteilung ermittelt.

Die Arbeit wurde ausgeführt im Institut für physikalische Grundlagen der Medizin in Frankfurt a. M. vom Mai 1922 bis November 1923.

Herrn Professor Dr. Dessauer gestatte ich mir meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für die liebenswürdige Anleitung und Unterstützung, welche ich von seiner Seite zu meiner Arbeit erfahren durfte. Auch danke ich Herrn Dipl.-Ing. Brenzinger für seine freundlichen Anregungen.

Zur Reißverfestigung von Zink durch Kaltrecken[1]).

Von **G. Masing** in Berlin-Siemensstadt und **M. Polanyi** in Berlin-Dahlem.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 30. Juli 1924.)

Die Zerreißfestigkeit von Zink wird bei der Temperatur der flüssigen Luft bestimmt. Durch das Walzen wird sie stark erhöht und ist bei feinkörnigem Material größer als bei grobkörnigem. Sie ist stets größer, als beim Einkristall.

Erhöhung der Bruchlast durch Kaltbearbeitung ist eine alltägliche technische Erfahrung. Doch ist diese technische „Reißfestigkeit" eine sehr undurchsichtige Materialeigenschaft. Ihre Bedeutung ist bei spröden bzw. zähen Körpern eine ganz verschiedene. Bei ersteren gibt sie tatsächlich die Spannung an, bei der die Trennung des Materials in Bruchstücke erfolgt, also die physikalisch richtige Reißfestigkeit. Bei letzteren bezieht sie sich überhaupt nicht auf die physikalische Reißfestigkeit, sondern auf die Spannung, bei der die Einschnürung einsetzt, und auch diese gibt sie nur angenähert an, weil die technische Zerreißfestigkeit auf den Anfangsquerschnitt bezogen wird, und weil bei Beginn der Einschnürung der Querschnitt bereits im Betrage der gleichmäßigen Dehnung vermindert ist.

Wenn also bei Metallen eine Erhöhung der technischen Reißfestigkeit durch Bearbeitung erzielt wird, so sagt dies, da sie zähe Körper sind, über die Änderung der physikalischen Reißfestigkeit noch nichts Sicheres aus.

Man könnte wohl versuchen, diese Schwierigkeiten dadurch zu umgehen, daß man die Reißfestigkeit auf den Endquerschnitt bezieht, an dem das Reißen schließlich eintritt. Aber dies wäre schon deswegen abzulehnen, weil der Zustand des Materials an einer solchen Bruchfläche durch den vorangegangenen Einschnürungsvorgang in einem unkontrollierbaren und variablen Betrage durch Kaltreckung stark verändert wird.

Zur Behandlung der in der Überschrift genannten Frage sind wir daher so vorgegangen, daß wir die Untersuchung der Probestücke auf

---

[1]) Eine kurze Mitteilung über den Inhalt dieser Arbeit ist bereits in unserem Bericht: Über Kaltreckung und Verfestigung, Ergebnisse der Exakt. Naturw. 1923, gegeben worden.

die Temperatur der flüssigen Luft verlegt haben, nachdem wir uns überzeugt hatten, daß die verwendeten Zinkbleche hier keine oder nur sehr geringe Einschnürung aufwiesen.

Ganz ohne Einschnürung rissen — nach dem Ergebnis der mikroskopischen Untersuchung der Reißstellen — die unbearbeiteten Stücke. Dagegen zeigten die gewalzten deutliche Ansätze zur Einschnürung, so daß hier die gemessenen Reißfestigkeiten, die wir auf die Ausgangsabmessungen beziehen, als untere Grenzen zu gelten haben. Die Eindeutigkeit der Ergebnisse wird hierdurch nicht beeinträchtigt.

Im Mikroskop ließ sich auch feststellen, daß der Bruch intrakristallin erfolgte und die Reißflächen der Kristalle überwiegend Basisflächen waren. Das entspricht durchaus dem Ergebnis der Untersuchungen am Einkristall, wonach bei der großen Mehrzahl der Kristallorientierungen (relativ zur Zugachse) der Bruch in der Basisfläche erfolgte. Die Reißflächen der bearbeiteten Bleche hatten keine erkennbare Struktur.

Unsere Untersuchung bezieht sich auf den Vergleich der Reißfestigkeit in folgenden Zuständen des Zinkblechs:

a) frisch gewalzt,
b) ausgeglüht, feinkörnig,
c) ausgeglüht, grobkörnig.

Als Material wurde Zink „Kahlbaum“ bzw. „Zink I“ von Kahlbaum verwendet[1]), ohne daß diese Verschiedenheit einen nennenswerten Einfluß auf die Reißfestigkeit ausgeübt hätte.

Die untersuchten Blechstreifen wurden durch Herunterwalzen der Zinkstangen auf 0,07 bis 0,1 mm erzeugt. Einige Bleche wurden dann in flüssige Luft gebracht und dort bis zum Versuch aufbewahrt. Diese dienten zur Kennzeichnung des frisch ausgewalzten Zustandes. Andere Streifen wurden während etwa 30 Minuten auf bestimmte Temperaturen, zwischen 100 und 400°, erhitzt und hierdurch zur Rekristallisation gebracht.

Je nach der Temperatur entsteht bei der Rekristallisation ein Korn von verschiedener Feinheit. In Fig. 1 sieht man auf der geätzten Oberfläche des Bleches das bei tieferer Rekristallisationstemperatur entstandene feine, in Fig. 2 das bei 400° erzeugte grobe Gefüge. Proben nach Art von Fig. 1 wurden zur Untersuchung des feinkörnigen, solche nach Art

[1]) Nach Angaben der Firma enthält Zink I etwa 0,2 Proz. Verunreinigungen, und zwar Pb und Cd. Das nach dem Verfahren von F. Mylius hergestellte „Zink Kahlbaum“ soll viel weniger Fremdstoffe enthalten.

von Fig. 2 zur Untersuchung des grobkörnigen Zustandes verwendet. Die Größe des Kornes wurde mikroskopisch kontrolliert und in einzelnen Fällen durch Auszählen in der Photographie auch zahlenmäßig festgelegt. (Nähere Angaben in der Tabelle.)

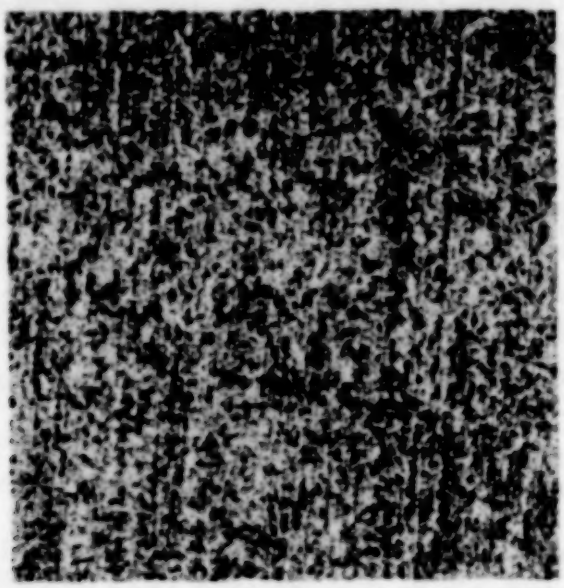


Fig. 1. Feinkörniges Zn. × 23

Fig. 2. Grobkörniges Zn. × 23

Aus den Blechen wurden Streifen herausgeschnitten, deren Größe und Form man aus Fig. 3 entnehmen kann. Sie wurden an beiden Enden in Fassungen geklemmt, von denen die untere fest aufgestellt war, die obere mittels einer Öse und Haken an einem Drahte hing, der zur Kraft-

übertragung diente. Dieser war über sehr leicht drehbare Rollen gelegt und trug an seinem vertikalen Ende die Belastungsschale, die durch Zufließen von Schrotkörnern beschwert wurde. Auf möglichst parallele Einspannung der Probenenden wurde geachtet.

Die in den Tabellen 1 bis 3 verzeichneten Ergebnisse zeigen durchweg dieselbe Grunderscheinung:

a) Die Reißfestigkeit der frischgewalzten Proben ist viel höher als die der ausgeglühten. Die Kaltbearbeitung bewirkt also eine Erhöhung der Reißfestigkeit (Reißverfestigung). Eine solche war bisher nur an Einzelkristallen mit Sicherheit beobachtet worden[1]).

Beim Vergleich der Proben aus Material von verschiedener Marke zeigt sich, daß das reine Zink „Kahlbaum" im gewalzten Zustande weniger fest ist. Es zeigt sich hier, daß geringe Verunreinigungen ebenso wie andere die Deformation erschwerenden Umstände, wie niedrige Temperatur, große Reckgeschwindigkeit, Feinkörnigkeit, eine Erhöhung der Verfestigbarkeit herbeiführen. Je stärker die Widerstände sind, gegen die die Deformation anzukämpfen hat, um so stärker verändert sie das Material.

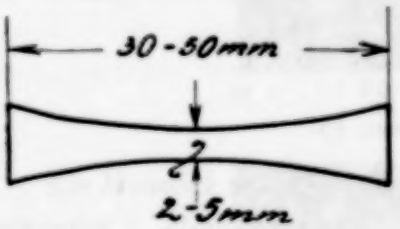


Fig. 3. Form der Zerreißstücke.

b) Die feinkörnigen Proben zeigen wesentlich höhere Reißfestigkeit als die grobkörnigen. Nach der Rekristallisation in mittleren Temperaturbereichen ist das Korn bei den einzelnen Proben nicht von gleicher Feinheit. Die Festigkeiten weichen im entsprechenden Sinne ab. Stets hat das gröber gefügte Material geringere Festigkeit.

c) Die Reißfestigkeit aller untersuchten Zinkproben ist viel höher als die des Zinkeinkristalles. Eine genaue Gegenüberstellung ist bei Zink „Kahlbaum" möglich, weil hier die Abhängigkeit der Reißfestigkeit von der kristallographischen Orientierung der Zugachse durch die Untersuchungen von Erich Schmid ausführlich bekannt ist[2]).

Nach Erich Schmid beträgt die Reißfestigkeit ein Minimum, wenn die hexagonale Achse in die Dehnungsrichtung fällt, und ein Maximum, wenn sie senkrecht auf dieser steht und gleichzeitig eine digonale Achse

[1]) M. Polanyi, ZS. f. Elektrochem. **28**, 16, 1922; Joffe, ZS. f. Phys. **22**, 286, 1924; E. Schmid, Verh. d. internat. Kongresses f. angew. Mechanik, Delft 1924.

[2]) Dieser Vergleich ist auf Grund vorläufiger Zahlen bereits vor längerer Zeit mit dem hier mitgeteilten Ergebnis angestellt worden (vgl. M. Polanyi, l. c.).

erster Art 30° mit ihr einschließt. Die Reißfestigkeit beträgt in diesen extremen Fällen 0,18 bzw. 2,5 kg.

Wenn aus Einzelkristallen ein Haufwerk gebildet wird, so sollte man erwarten, daß die Reißfestigkeit des ungünstigst orientierten, schwächsten Kristalles bestimmend sei, ähnlich wie die Festigkeit einer Kette gleich jener des schwächsten Gliedes ist. Aber selbst wenn man einen Mittelwert oder gar den Höchstwert aller Orientierungen ins Auge faßt, findet man stets noch, daß er deutlich unter der Festigkeit eines beliebigen Polykristalles zurückbleibt. Auch ein grobkörniges, völlig ungeglühtes Blech ist noch etwa doppelt so fest wie der Einzelkristall bei günstigster Orientierung.

Dieser Vergleich läßt sich auch auf Zink I übertragen, da die Reißfestigkeit dieses Materials nach den Versuchen von Mark, Polanyi und Schmid [1]) zwischen 1,5 und 3,1 kg liegt, also ebenfalls geringer ist als die der polykristallinen Proben desselben Materials. — Die Gesamtheit der unter a) bis c) angeführten Ergebnisse ist in untenstehender „Zusammenfassung“ nochmals gegeben.

Es fragt sich nun noch, wie man sich zu den hier mitgeteilten Erscheinungen vom theoretischen Standpunkte einstellen soll.

Tabelle 1. Zink I von Kahlbaum. Dicke 0,1 mm.

	Breite in mm	Querschnitt in mm²	Zerreißlast in kg	Zerreißfestigkeit in kg/mm²	Kristallgröße in μ²	Bemerkungen
Gewalzt	4,35	0,435	8,18	18,18		Zufällig gerissen.
	2,05	0,205	7,80	38,1		
	2,4	0,24	7,90	33,0		
	2,3	0,23	10,50	45,7		
30′ auf 200° erhitzt	5,2	0,52	(2,43)	(4,76)		Nicht in der Mitte gerissen.
	4,25	0,425	3,85	9,06		Dasselbe Stück noch einmal gerissen.
	3,9	0,39	5,24	13,4	etwa 80	
	4,12	0,412	5,90	14,3		
	3,6	0,36	5,70	15,8		
	3,6	0,36	4,85	13,2		
30′ auf 400° erhitzt	5,5	0,55	3,10	5,6	30 000 bis 50 000	Nicht in der Mitte gerissen.
	5,4	0,54	3,19	5,9		In der Nähe eines Randes gerissen.

[1]) ZS. f. Phys. **5**, 58, 1922.

Tabelle 2. Zink I von Kahlbaum. Dicke 0,1 mm.

	Breite in mm	Querschnitt in mm²	Zerreißlast in kg	Zerreißfestigkeit in kg/mm²	Kristallgröße in μ^2
30′ auf 200° erhitzt	2,6	0,26	4,1	15,8	etwa 80
	1,9	0,19	3,3	17,3	
	2,1	0,21	3,03	14,4	
	2,5	0,25	3,94	15,8	
				15,8	
30′ auf 300° erhitzt	2,9	0,29	3,41	11,8	
	2,2	0,22	2,525	11,5	
	2,0	0,20	2,170	10,8	
	2,5	0,25	2,650	10,6	
				11,2	
30′ auf 400° erhitzt	2,3	0,23	0,68	2,96	50000
	2,3	0,23	0,635	2,76	
	2,5	0,25	0,78	3,12	
	2,5	0,25	0,73	3,17	
				3,00	

Tabelle 3. Zu Marke „Kahlbaum“. Dicke 0,07 bis 0,08 mm.

	Breite in mm	Querschnitt in mm²	Zerreißlast in kg	Zerreißfestigkeit in kg/mm²	Kristallgröße in μ^2	Bemerkungen
Gewalzt	1,86	0,130	5,280	28,7		
	2,30	0,184	4,210	22,82		
	2,18	0,174	4,250	24,36		
	1,85	0,130	3,070	20,75		
	1,57	0,126	4,940	39,37		
				27,20		
30′ auf 100° erhitzt	2,50	0,200	3,090	15,450	etwa 80	
	2,29	0,183	2,420	13,42		
	2,77	0,222	3,820	17,25		
	2,68	0,214	3,300	15,41		
				15,400		
5′ auf 200° erhitzt	2,81	0,225	3,115	13,82	etwa 80	
30′ auf 200° erhitzt	2,58	0,206	3,300	15,98	etwa 80	
	2,20	0,154	0,890	5,78		gröberes sekundäres Korn in Entwicklung
	2,57	0,180	1,290	7,17		
	2,61	0,113	2,005	10,93		
				7,96		
30′ auf 300° erhitzt	2,70	0,216	1,450	6,72		
	2,93	0,254	1,010	5,03	40000	
	2,83	0,226	0,750	3,31		
	2,56	0,179	0,870	4,86		
				4,98		

Verschiedene Arbeiten der letzten Jahre, unter denen vor allem die Abhandlung von Griffith [1]) zu nennen ist, haben zur übereinstimmenden Ansicht geführt, daß das Reißen nicht durch Überwindung der Kohäsionskraft herbeigeführt wird, sondern daß im allgemeinen schon bei viel geringeren Spannungen der Bruch erfolgt. Sein Eintreten ist als ein Unfall aufzufassen, und es fragt sich, unter welchen Bedingungen dieser eintritt und worin er besteht.

Griffith hat nachgewiesen, daß bei Glas und Quarz sehr kleine Risse den Anlaß zum Bruch geben. Was wir als „normale" oder „technische" Festigkeit dieser Körper beobachten, ist in Wirklichkeit ein Wert, der durch mikroskopische Oberflächenrisse schon stark herabgedrückt ist. Die technische Festigkeit beträgt nach dieser Theorie

$$S_t = \sqrt{\frac{2\,E\,T}{\pi\,\sigma\,L}},$$

wo T die Oberflächenspannung des festen Körpers, E dessen Elastizitätsmodul, σ die Poissonsche Konstante und L die Länge des längsten in der Oberfläche vorhandenen Spaltes ist.

Wollte man versuchen, diese Gleichung auf einen Einkristall anzuwenden, so hätte man $T \sim 10^3$, $E \sim 10^{12}$, $\pi\sigma \sim 1$ für den Fall der Querlage der Basis, also bei $S_t = 0{,}180\ \mathrm{kg/mm^2} \sim 2{,}10^7$ CGS, die Länge des Risses $L \sim 5$ cm anzunehmen, was freilich sinnlos ist.

Übrigens ist es schon ohne Rechnung klar, daß die Annahme von Spalten und Rissen kaum zur Erklärung der Festigkeitsänderungen in Betracht kommt. Der Einkristall, der durch allmähliche Erstarrung eines aus der Schmelze gezogenen flüssigen Metallfadens entsteht, müßte nach dieser Auffassung die größten Spalten haben, das körnige Material wäre homogener, und jede Bearbeitung würde zur Schließung noch vorhandener Spalte führen [2]).

Eine plausible Erklärung für die mitgeteilten Erscheinungen können wir nicht angeben. Die von uns selbst a. a. O. diskutierte Deutung erscheint uns nicht ausreichend begründet, um hier nochmals erörtert zu werden.

---

[1]) A. A. Griffith, Phil. Trans. (A) **221**, 163, 1920; M. Polanyi, ZS. f. Phys. **7**, 323, 1921; A. Smekal, Die Naturw. **10**, 799, 1922; F. Zwicky, Phys. ZS. **24**, 131, 1923.

[2]) Bemerkt sei, daß Griffith keineswegs vorgeschlagen hat, die sehr geringe Reißfestigkeit von Einkristallen mit Hilfe seiner Spalttheorie zu erklären. Die Versuche von Joffe über die hohe Festigkeit von Steinsalz unter Wasser, die für eine ausschlaggebende Bedeutung der Oberflächenbeschaffenheit für die Reißfestigkeit zu sprechen schienen, sind in anderem Sinne aufgeklärt worden (W. Ewald und M. Polanyi, ZS. f. Phys. 1924).

Zusammenfassung.

1. Die (physikalische) Reißfestigkeit von frischgewalztem Zink bei $T = 85$ beträgt bis zu 45 kg/mm² und ist viel höher als die des geglühten.

2. Die Reißfestigkeit des feinkörnigen Materials mit einer Korngröße von etwa 80 μ^2 beträgt im Durchschnitt 15 kg/mm² und ist höher als die des grobkörnigen, welches bei einer Korngröße von etwa 50000 μ^2 eine Festigkeit von etwa 5 kg/mm² hat.

3. Die Reißfestigkeit polykristallinen Zinks ist stets höher als die des Einkristalls.

Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie u. Elektrochemie.

Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns.

Galvanische Leitfähigkeit und Halleffekt dünner Nickelschichten.

Von **Alfred Riede** in Karlsruhe.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 7. August 1924.)

Besprechung früherer Messungen. Herstellung der Schichten durch Kathodenzerstäubung in strömendem Wasserstoff. Dickenbestimmung mit der Wage. Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Dicke. Abhängigkeit der Hallspannung vom Magnetfeld, von der Stromdichte und von der Dicke.

I. Einleitung.

A. Leitfähigkeit. Die galvanische Leitfähigkeit dünner, d. h. weniger als 10^{-5} cm dicker Metallschichten ist oft der Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen gewesen. Für die vorliegende Arbeit sind wesentlich diejenigen von Belang, die sich mit der Abhängigkeit des Widerstandes von der Dicke befassen, die also die bekannte Gleichung für den Widerstand w eines Leiters von der Länge l und dem Querschnitt q aus einem Stoff vom spezifischen Widerstand w_s prüfen:

$$w = w_s \frac{l}{q} \quad \text{oder} \quad w_s = w \frac{q}{l}. \tag{1}$$

Der nächstliegende Gedanke, solche Messungen auszuwerten, ist der, daß man wie bei dicken Leitern den spezifischen Widerstand w_s berechnet. Wenn sich die dünnen Schichten wie Leiter üblicher Ausdehnung verhalten, so muß sich w_s als unabhängig von der Dicke ergeben. Tatsächlich zeigen aber die Beobachtungen, daß der so definierte spezifische Widerstand erheblich von der Dicke abhängt.

Diese Methode der Auswertung der Beobachtungen krankt an einem schwerwiegenden Nachteil infolge der besonderen Rolle, welche die Dicke bei den Messungen spielt. Diese Größe ist für sehr dünne Schichten schwer zu messen und daher nur ungenau bekannt. Man muß auch damit rechnen, daß sie gar nicht streng definiert ist, weil vielleicht die Oberfläche nicht hinreichend eben ist. Es ist auch nicht sicher, daß sich die Schicht, auch bei unveränderter chemischer Beschaffenheit, über den ganzen Querschnitt gleich verhält. Die Oberflächenteile könnten eine andere Leitfähigkeit besitzen als die tieferen Lagen, sei es, daß

okkludierte Gase sich in wechselnder Weise über den Querschnitt verteilen, sei es, daß auch in reinen Metallen die Moleküle der Oberfläche sich anders verhalten als diejenigen der Tiefe. In diesem Fall würde der spezifische Widerstand des genauen Sinnes entbehren; er würde nur einen formal errechneten Mittelwert darstellen, in welchem unter Umständen das physikalisch Wesentliche verwischt wäre.

Geeigneter zur Darstellung der Beobachtungen erscheint mir die spezifische Flächenleitfähigkeit, d. h. der Leitwert eines Quadrates der Schicht, wenn die Stromlinien parallel einem Seitenpaar verlaufen. Die Größe des Quadrates ist gleichgültig, da doppelte Länge auch doppelte Breite bedingt. Die spezifische Flächenleitfähigkeit λ_f ist also definiert durch die Gleichung:

$$\lambda_f = \frac{1}{w}\,\frac{l}{b}, \tag{2}$$

wo l die Länge und b die Breite der Schicht bedeuten. Die Dicke tritt in dieser Gleichung nicht auf, sie geht also hier nicht in den errechneten Wert ein. Bei Unterschieden in dem Verhalten der einzelnen Schichtlagen wird sich die Gesamtleitfähigkeit, also der gemessene Wert, additiv aus den Leitfähigkeiten der einzelnen Lagen zusammensetzen, und die Kurve für die Abhängigkeit der spezifischen Flächenleitfähigkeit von der Dicke wird die Besonderheiten in deutlicher Weise darstellen, weil die spezifische Leitfähigkeit derjenigen Lage Metall, durch welche sich zwei Schichten benachbarter Dicken unterscheiden, durch den Differentialquotienten der Kurve gegeben ist.

Im einfachsten Fall, d. h. wenn die Gleichung (1) bis zu den kleinsten Dicken gültig bleibt, ist λ_f proportional der Dicke d, also

$$\lambda_f = kd.$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit λ_f als Ordinate und d als Abszisse wird in diesem Fall die spezifische Flächenleitfähigkeit durch eine Gerade durch den Nullpunkt dargestellt.

Für den Fall, daß die gemessene Dicke größer ist als die für die Stromleitung maßgebende, etwa weil die Oberfläche der Schicht durch Einwirkung der Luft chemisch verändert oder durch okkludierte Gase in ihrer Leitfähigkeit beeinträchtigt ist, wird die Gerade nach größeren Werten von d verschoben erscheinen, also

$$\lambda_f = k(d - c).$$

c ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der Abszissenachse.

Berechnet man in einem solchen Fall den spezifischen Widerstand, so kommt man nicht auf eine Konstante, sondern auf eine hyperbolische Abhängigkeit von der Dicke

$$w_s = \frac{d}{\lambda_f} = \frac{d}{k(d-c)} = \frac{1}{k}\,\frac{1}{1-\frac{c}{d}}.$$

Für große d, d. h. für dicke Schichten, ergibt sich hier der spezifische Widerstand unabhängig von der Dicke zu $\frac{1}{k}$. Mit abnehmender Dicke nimmt er aber erst langsam, dann immer schneller zu und wird für $d = c$ unendlich. Es liegt dann nahe, zu schließen, daß der Dicke, bei welcher der Anstieg des spezifischen Widerstandes merklich wird, eine wesentliche Bedeutung zukommt, während die Betrachtung der Kurve für die spezifische Flächenleitfähigkeit zeigt, daß an dieser Stelle keinerlei Besonderheit auftritt.

Die spezifische Flächenleitfähigkeit bietet noch den weiteren Vorteil, daß bei ihrer graphischen Darstellung als Funktion der Dicke der Genauigkeit der Beobachtungen besser Rechnung getragen wird, insofern, als die Werte für die dünnsten Schichten, die mit den verhältnismäßig größten Fehlern behaftet sind, durch die kleinsten Strecken dargestellt werden, während bei der Benutzung des spezifischen Widerstandes die für kleine Dicken gefundenen großen Werte zu einem kleinen Maßstab zwingen, in welchem dann die Mängel der Beobachtungen an dickeren Schichten nur wenig in Erscheinung treten.

Der erste, der wohl genauere Messungen über die Abhängigkeit des Widerstandes dünner Schichten von der Dicke angestellt hat, ist G. Vincent[1]). Er untersuchte die Leitfähigkeit von Silberspiegeln, die nach einem der üblichen nassen Verfahren auf Glas niedergeschlagen waren. Seine Messungen ergaben für die spezifische Flächenleitfähigkeit eine lineare Abnahme mit der Dicke bis zu etwa 50 mμ hinab. Die dünneren Schichten leiteten schlechter, als diesem Gesetz entsprach, solche unter 20 mμ überhaupt nicht mehr. Auch für die dicksten Schichten war die Leitfähigkeit geringer als für Silber in der üblichen Draht- oder Blechform.

Zu einem ähnlichen Ergebnis kam G. Moreau[2]) bei dünnen Nickelschichten, die er durch galvanische Vernickelung von Silberspiegeln herstellte.

---

[1]) Ann. chim. phys. (7) **19**, 421, 1900.
[2]) Journ. de phys. (3) **10**, 478, 1901.

J. Patterson[1]) untersuchte dünne durch Kathodenzerstäubung auf Glasplatten niedergeschlagene Schichten von Wismut, Silber und besonders von Platin. Für dieses letzte Metall sind seine Ergebnisse als Hohlkreise in Fig. 1 eingetragen. Abszisse ist die Dicke in mμ, Ordinate der spezifische Flächenwiderstand. Im Anschluß an eine Überlegung von J. J. Thomson, nach welcher der spezifische Widerstand eines Leiters größer werden muß, wenn die Ausdehnung des Leiters vergleichbar mit der freien Weglänge der Elektronen wird, wenn diese also durch die unzureichende Ausdehnung des Leiters in ihrer Beweglichkeit beschränkt werden, folgerte Patterson aus seinen Messungen, daß die freie Weglänge der Elektronen im Platin etwa 5 mμ betrage.

Ich habe aus den Pattersonschen Angaben die spezifische Flächenleitfähigkeit berechnet und als Vollkreise in die Fig. 1 eingetragen. Man sieht, daß die so erhaltene Kurve keinerlei Besonderheit bei 5 mμ zeigt. Vielmehr fügen sich die Punkte ziemlich gut in eine Gerade ein. Da diese Gerade aber bereits bei positiven Dicken die Abszissenachse schneidet, ergibt sich für den spezifischen Widerstand eine Hyperbel.

In meiner Dissertation[2]) habe ich den Widerstand dünner Schichten von Silber, Kupfer, Nickel und Platin untersucht. Die Silberschichten waren nach einem der üblichen nassen Verfahren zur Herstellung von Spiegeln auf Glasplatten niedergeschlagen worden. Die Messungsergebnisse entsprachen den oben angeführten von Vincent. Die Kupfer-, Nickel- und Platinschichten wurden durch Kathodenzerstäubung hergestellt. Für alle drei Metalle ergab sich eine ähnliche Abhängigkeit der spezifischen Flächenleitfähigkeit von der Dicke. Für Nickel, das handelsübliche Reinnickel, war der Verlauf der Kurve am ausgeprägtesten. Für dicke Schichten nahm die spezifische Flächenleitfähigkeit linear mit der Dicke ab bis etwa 60 mμ, aber nicht proportional, sondern die Gerade schnitt die Abszissenachse bei etwa 50 mμ. Von 60 mμ an nahm die Flächenleitfähigkeit langsamer ab, so daß sie erst für Schichten dünner als 5 mμ Null wurde.

B. Pogány[3]) untersuchte den Widerstand dünner, durch Kathodenzerstäubung auf Glas niedergeschlagener Schichten von Platin, Palladium, Gold und Silber. Er fand eine ähnliche Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Dicke wie Patterson. In der Fig. 2 sind seine Ergebnisse für Silber als Hohlkreise eingetragen. Abszisse ist die Dicke

[1]) Phil. Mag. (6) **4**, 652, 1902.
[2]) Göttingen 1914. Auszug: Ann. d. Phys. (4) **45**, 881, 1914.
[3]) Ann. d. Phys. (4) **49**, 531, 1916.

in mμ, Ordinate der spezifische Widerstand. Ich habe die spezifischen Flächenleitfähigkeiten berechnet und als Vollkreise eingetragen. Die Figur zeigt deutlich, daß bei den zu den Punkten stärkster Krümmung der Kurve für den spezifischen Widerstand gehörigen Dicken keine Besonderheit in der Kurve für die spezifische Flächenleitfähigkeit eintritt.

Die aus den Messungen Pogánys für die Flächenleitfähigkeit der durch Kathodenzerstäubung gewonnenen Silberschichten berechneten Werte zeigen im Gegensatz zu denjenigen von Vincent (und auch den meinigen) einen einfachen Verlauf bis zu etwa 10 mμ hinab. Eine Andeutung eines Knickes in der Kurve bei 50 mμ, wie ihn Vincent bei seinen Schichten gefunden hat, ist nicht vorhanden. Ferner fand Pogány

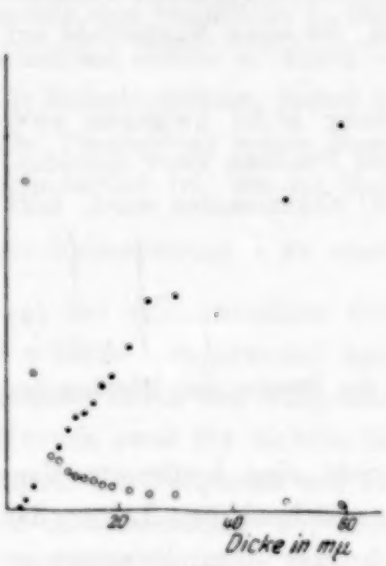


Fig. 1.

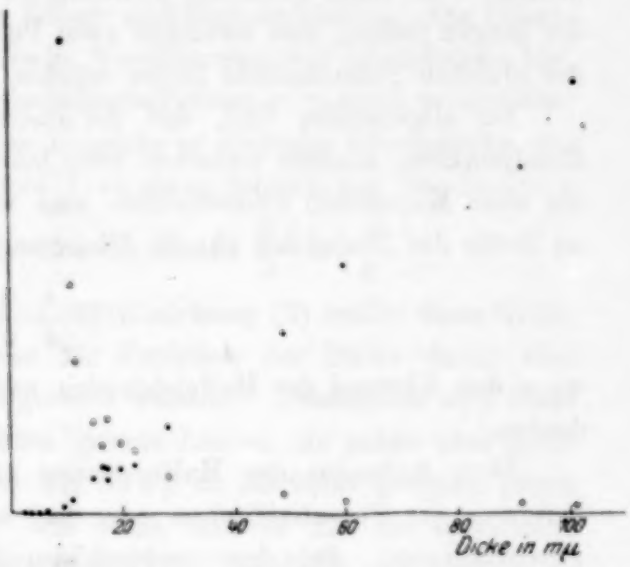


Fig. 2.

noch eine erhebliche Leitfähigkeit bei Schichtdicken, bei welchen Vincent schon unendlichen Widerstand maß. Offenbar bedingt die Herstellung der Silberspiegel auf nassem Wege Besonderheiten, die nur diesen Schichten eigen und nicht im Wesen der elektrischen Leitung begründet sind.

Ähnliche Abweichungen bestehen zwischen Moreaus und meinen Messungen an dünnen Nickelschichten. Für größere Dicken stimmen die beiden Kurven gut überein, für die geringen dagegen fällt die spezifische Flächenleitfähigkeit der Schichten Moreaus viel schneller ab als die der meinen. Schon eine Schicht von 24 mμ Dicke leitete bei Moreau nicht mehr, während ich bei 7,3 mμ noch eine sehr deutliche Leitfähigkeit fand. Offenbar bestehen also zwischen den galvanoplastischen Nickelschichten und den durch Kathodenzerstäubung hergestellten ähnliche Unterschiede wie die eben besprochenen bei den Silberschichten.

B. Halleffekt. Der Halleffekt, also die in einem stromdurchflossenen Leiter durch ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien senkrecht auf den Stromlinien stehen, erzeugte transversale elektromotorische Kraft — sie steht auf Strom- und Kraftlinien senkrecht — ist bei dünnen Schichten bisher nur wenig untersucht worden. Für ein Blech von der Dicke d in Form eines gestreckten Rechteckes, das vom primären elektrischen Strom in Richtung der langen Seiten durchflossen wird, ist die Hallspannung e gegeben durch

$$e = RH\frac{i}{d}, \tag{3}$$

wo R eine Materialkonstante und H die Stärke des Magnetfeldes bedeuten. e ist dabei gemessen zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten der langen Seiten, also zwischen zwei Punkten, die ohne Magnetfeld auf der gleichen Potentiallinie liegen würden.

Im allgemeinen Fall, daß die Hallspannung nicht zwischen zwei Randpunkten, sondern zwischen zwei beliebigen Punkten einer Geraden, die ohne Magnetfeld Potentiallinie sein würde, abgenommen wird, tritt an Stelle der Beziehung (3) die Gleichung

$$e = RH\frac{i}{d}\frac{a}{b}, \tag{4}$$

wo a den Abstand der Hallelektroden und b die Breite des Bleches bedeuten.

Dem Auftreten der Hallspannung entspricht eine bestimmte Verlagerung der Potentialflächen oder bei einem flächenhaften Leiter der Potentiallinien. Bei dem rechteckigen Blech, das vom Primärstrom parallel den langen Seiten durchflossen wird, sind die Potentiallinien ohne Magnetfeld Gerade, die senkrecht auf den langen Seiten stehen. Durch das Magnetfeld werden sie gedreht. Für den Drehungswinkel α gilt

$$\operatorname{tg}\alpha = RH\lambda. \tag{5}$$

wo λ die spezifische Leitfähigkeit des Bleches bedeutet. Die Drehung ist also unabhängig von der Stärke des Primärstromes. Erfolgt die Drehung im Sinne des das Magnetfeld erzeugenden Stromes, so wird der Halleffekt als positiv bezeichnet, im anderen Fall als negativ.

Die Gleichung (3) für die Hallspannung ist häufig geprüft worden und stets hat sie sich bewährt. Die ferromagnetischen Metalle zeigen für die Hallspannung in Abhängigkeit von dem äußeren Magnetfeld eine ähnliche Sättigungskurve wie für die Magnetisierung. Kundt[1]) hat

[1]) Wied. Ann. **49**, 257, 1893.

nachgewiesen, daß innerhalb seiner allerdings ziemlich großen Beobachtungsfehler die Hallspannung bei Eisen, Kobalt und Nickel proportional der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch das Magnetfeld ist, so daß man bei den ferromagnetischen Metallen in der obigen Gleichung an Stelle des äußeren Feldes offenbar die Magnetisierung des Metalles setzen muß.

Eine Lücke in den Beobachtungen klafft noch hinsichtlich der Gültigkeit der Gleichung für kleine Dicken. Zwar hat schon Hall Messungen an Silberschichten angestellt, die auf chemischem Wege auf Glas niedergeschlagen waren, aber diese Messungen bezogen sich nicht auf die Abhängigkeit des Effektes von der Dicke. G. Moreau[1]) untersuchte den Halleffekt in dünnen Silber- und Nickelschichten. Die Silberschichten stellte er durch chemische Versilberung von Glasplatten her, die Nickelschichten, indem er seine Silberschichten galvanisch vernickelte. Zur Darstellung seiner Messungen benutzte er diejenige Stromstärke, die erforderlich ist, um im Magnetfeld 1 in einer Schicht von der Breite 1 die Hallspannung 1 zu erzeugen, also die Größe $\frac{Hi}{e} = \frac{d}{R}$.

Bei unbeschränkter Gültigkeit der Gleichung (3) müßte diese Größe der Dicke proportional sein, also als Funktion der Dicke durch eine Gerade durch den Nullpunkt dargestellt werden. Tatsächlich sind seine Kurven zwar für dickere Schichten gerade Linien, sie gehen aber nicht durch den Nullpunkt und knicken bei 50 mμ zu stärkerer Neigung gegen die Abszissenachse ab, ähnlich wie seine Kurven für die spezifische Flächenleitfähigkeit. Daher drängt sich der Verdacht auf, daß diese Besonderheit in dem Verlauf des Halleffektes nicht den dünnen Schichten als solchen zukommt, sondern ähnlich wie die Besonderheit in dem Verhalten der spezifischen Flächenleitfähigkeit in der Herstellungsweise der Schichten ihren Grund hat.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war es, durch möglichst genaue Messungen die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Schichtdicke und das Verhalten des Halleffektes in dünnen Schichten zu untersuchen. Als Metall habe ich Nickel gewählt, weil dieses die Besonderheiten der Leitfähigkeit am ausgeprägtesten zeigte und weil es verhältnismäßig große Hallspannungen ergibt.

Leider erst nach Abschluß der Messungen erhielt ich genauere Kenntnis von einigen amerikanischen Arbeiten auf diesem Gebiet.

---

[1]) A. a. O.

G. R. Wait[1]) untersuchte die Leitfähigkeit und den Halleffekt in dünnen Silberschichten, die er nach einer chemischen Methode auf Glas niederschlug. Für die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Dicke fand er eine Kurve, die mit abnehmender Dicke zunächst langsam, von etwa 30 mμ an aber sehr steil anstieg und bei etwa 20 mμ nach Unendlich ging. Sein Material scheint nicht sehr gleichmäßig gewesen zu sein, denn für Schichten fast gleicher Dicke fand er Widerstandswerte, deren Quotient 3 überstieg. Die Beobachtungen des Halleffektes schlossen sich einer Kurve, die aus Gleichung (3) mit der Konstanten für Silberblech berechnet war, mit einer Genauigkeit von etwa 25 Proz. an. Wait glaubt seinen Beobachtungen durch die Annahme genügen zu können, daß die Silberschicht aus einzelnen Körnern besteht, von der gleichen Eigenschaft wie Silber in Blech- oder Drahtform, daß aber der Übergang von Korn zu Korn einen Zusatzwiderstand bedingt.

J. C. Steinberg[2]) maß den Widerstand an dünnen Schichten aus Silber, Kupfer und Eisen, die er durch Auffangen des von im Vakuum galvanisch geglühten Drähten ausgehenden Dampfes herstellte. Seine Kurven für den spezifischen Widerstand sind denen Waits ähnlich, jedoch entsprechen sie auffallend großen Werten (bei Eisen dem 500fachen Widerstand von Blech). Seinen Hallbeobachtungen konnte er durch die Annahme einer von der Dicke unabhängigen Konstanten mit einer Genauigkeit von etwa 10 Proz. genügen. Er sieht in seinen Messungen eine Stütze der Anschauungen Waits.

Auch S. S. Mackeown[3]) glaubt durch seine Messungen an Goldschichten, die er durch Kathodenzerstäubung herstellte, diese Anschauung stützen zu können.

II. Die Herstellung der Schichten.

Die Schichten wurden durch Kathodenzerstäubung in einer Wasserstoffatmosphäre hergestellt. Der Apparat entsprach im wesentlichen dem, welchen ich bei meinen früheren Untersuchungen benutzt hatte. Damals hatte sich gezeigt, daß die Gleichmäßigkeit der Schichten hinsichtlich der Dicke sehr empfindlich ist gegen Unterschiede im Abstand der Wände des Bestäubungsraumes von der Auffangplatte. Ich habe daher den neuen Apparat wesentlich größer gebaut und alles vermieden, was die Gleichmäßigkeit stören konnte.

---

[1]) Phys. Rev. (2) **19**, 615, 1922.
[2]) Ebenda (2) **21**, 22, 1923.
[3]) Phys. Rev. (2) **21**, 708, 1923. Nur kurze Mitteilung.

Auf eine als Anode dienende Grundplatte von 50 cm Durchmesser waren zwei Glasglocken aufgesetzt, eine innere, lichte Höhe 35 cm, lichter Durchmesser 31 cm, und darüber eine äußere. Nur diese wurde durch Ramsayfett an ihrem breiten Grundflansch gedichtet. Die innere Glocke hatte oben einen Hals, in welchen ein Schliff aus Glas eingesetzt war. Dieser Schliff trug zwei Glasrohre. Das eine, von etwa 9 mm lichter Weite und 15 cm Länge, diente dazu, eine Verbindung zwischen dem Raum unter der inneren Glocke, dem Bestäubungsraum, und dem Raum zwischen den beiden Glocken herzustellen. Das andere umschloß den zur Kathode, einer Kreisscheibe aus Blech von 10 cm Durchmesser und 0,6 mm Dicke, führenden Leitungsdraht. Der Abstand der Kathode von der Grundplatte betrug 10,5 cm.

Der sich in den Raum zwischen den beiden Glocken fortsetzende Teil des Kathodenträgers ging durch eine Bohrung in der Grundplatte nach außen. An die gleiche Bohrung war die Luftpumpe, eine Gaedesche rotierende Quecksilberpumpe mit gut regelbarem Motor, angeschlossen. Folgende Vorkehrungen (Fig. 3) ermöglichten es, die innere Glocke bequem abzuheben trotz der durch sie hindurchführenden Zuleitung. Das Kathodenträgerrohr RR' mit dem Leitungsdraht L war bei G unterbrochen. Der Draht endete beidseitig in Messingzylinder von gleichem äußeren Durchmesser wie das Glasrohr RR'. Die elektrische Verbindung zwischen beiden wurde durch eine in Haken der Messingzylinder eingehängte Spiralfeder hergestellt. Über das Ganze wurde ein gut passendes Glasrohr geschoben. Diese Vorkehrung unterdrückte zuverlässig jeden Stromübergang von dieser Stelle aus. Drei in die Grundplatte eingesetzte Stifte, von denen einer in eine Lücke des Bodenflansches der inneren Glocke paßte, bewirkten, daß diese nur in bestimmter Weise aufgesetzt werden konnte.

Fig. 3.

Die zu bestäubende Glasplatte — ich will sie die Spiegelplatte nennen — wurde genau unter die Kathode auf ein Tischchen aus Messingrohr mit aufgesetzten Kreisscheiben aus Glas von abwechselnd großem und kleinem Durchmesser aufgelegt. Der Zweck dieser Glasplatten war, die Spiegelplatte von der als Anode dienenden Grundplatte zu isolieren. Die Höhe des Tischchens betrug 6 cm. Durch ein dünnes kreisförmiges Messingblech, das im Anfangszustand die Spiegelplatte bedeckte, war diese zunächst gegen Bestäubung geschützt. Durch einen kleinen von außen durch die Grundplatte hindurch wirkenden Elektromagneten konnte eine Feder ausgelöst werden, die das Schutzblech zur Seite bewegte und

flach auf die Grundplatte legte, so daß es den Entladungsvorgang nicht mehr merklich beeinflußte. Der Schutz war so wirksam, daß selbst nach fünfstündigem Stromdurchgang kein Nickel auf der Spiegelplatte nachweisbar war. Die spezifische Flächenleitfähigkeit der etwa vorhandenen Schicht lag unter 10^{-10}.

Unter die innere Glocke wurde während der Bestäubung durch eine Bohrung in der Grundplatte dauernd Wasserstoff geleitet. Die Luftpumpe arbeitete dabei beständig, so daß ein stetiger Wasserstoffstrom von der inneren Glocke zu dem Raum zwischen den beiden Glocken und von da zur Pumpe floß. Auf diese Weise wurden durch die Entladung frei gemachte Gase weggespült sowie Fett- und Quecksilberdämpfe am Eindringen in den Bestäubungsraum gehindert. Der Wasserstoffbedarf betrug 170 cm^3 in der Stunde, gemessen bei Atmosphärendruck. Durch Veränderung der Umdrehungszahl des die Pumpe treibenden Motors konnte der Gasdruck im Entladungsraum geändert werden. Er betrug etwa 0,4 mm Quecksilbersäule.

Der Wasserstoff wurde durch Elektrolyse von verdünnter Schwefelsäure gewonnen. Eine Zwischenelektrode [1]), die dauernd unter Spannung war, verhinderte, daß Sauerstoff von der Anode zur Kathode diffundieren konnte. Der entwickelte Wasserstoff wurde vor dem Gebrauch mindestens 24 Stunden über Phosphorpentoxyd in einer Vorratsflasche von etwa 4 Liter Inhalt aufbewahrt. Er wurde unter einem solchen Überdruck hineingepreßt, daß auch bei den längsten Versuchszeiten am Schluß immer noch Überdruck herrschte. Es war also unmöglich, daß einströmende Luft den Wasserstoff verunreinigte. In den Weg des Wasserstoffs aus der Vorratsflasche zum Bestäubungsraum war ein etwa 12 cm langes Stück einer Thermometerkapillare von 0,005 mm^2 lichtem Querschnitt eingeschaltet, das die Zuströmungsgeschwindigkeit auf einen angemessenen Wert herabsetzte.

Das als Kathode dienende Blech war von der Firma W. C. Heraeus in Hanau geliefert worden. Es sollte aus sehr reinem Nickel (auch ohne Verarbeitungszusätze) bestehen.

Der Strom für die Entladung wurde einem Umformer für 1 Amp. und 1600 Volt entnommen. Im Kreis des Zerstäubungsstromes lag außer einem Milliamperemeter für 45 mA bei 150 Skt. Ausschlag ein Vorschaltwiderstand. Er bestand aus fünf hintereinander geschalteten Metallfaden-Glühlampen von 16 Kerzen für 220 Volt. Diese Lampen

---

[1]) Gaede, Ann. d. Phys. (4) **41**, 302, 1913.

zeigten bei dem durch sie hindurchgehenden schwachen Strom nur einen sehr geringen Spannungsabfall, waren aber doch imstande, beim plötzlichen Umschlagen der Entladung zu höheren Stromstärken die ganze Maschinenspannung aufzunehmen. Sie haben sich sehr gut bewährt. Obwohl das Umschlagen der Entladung häufig eintrat, besonders kurz nach dem Einschalten, ist das Milliamperemeter nie beschädigt worden. Der Zeiger erreichte nur in den seltensten Fällen den doppelten Anschlag. Die Spannung am Entladungsraum wurde dauernd durch ein Drehspulvoltmeter für 1500 Volt bei 150 Skt. Ausschlag überwacht.

Als Unterlage für die Nickelschichten dienten Glasstreifen. Sie wurden in folgender Weise hergestellt. Aus alten möglichst dünnen photographischen Platten wurde zunächst eine Kreisscheibe herausgeschnitten von etwa 61 mm Durchmesser. Diese Scheibe wurde dann entsprechend Fig. 4 zerlegt und sämtliche Schnittränder durch Abschleifen so weit geglättet, daß sie sich beim Zusammenlegen wieder gut aneinanderfügten. Durch verschieden starkes Brechen der Kanten an der Unterseite wurden die zueinander passenden Ränder gekennzeichnet. Nur der mittlere rechteckige Streifen wurde für die Messungen verwandt. Bei der Bestäubung wurden die abgeschnittenen Segmente um das Rechteck herumgelegt. Auf diese Weise bildete die zur Messung benutzte Schicht den Mittelteil einer größeren Fläche, so daß ihre Gleichmäßigkeit durch Randwirkungen kaum beeinträchtigt wurde. Zu den wesentlichen Messungen wurden nur zwei solche Glasstreifen abwechselnd benutzt. Die Nickelschicht wurde stets nach den Messungen wieder mit Salpetersäure abgelöst.

Fig. 4.

Die Herstellung einer Schicht geschah in folgender Weise. Nach Ablösung der alten Schicht und Abspülen mit destilliertem Wasser wurde der Glasstreifen samt den zugehörigen Segmenten in einem Gemisch von Schwefelsäure und Kaliumbichromat etwa eine Stunde lang im Wasserbad auf 100° erwärmt. Nach dem Erkalten wurden die Glasstücke abgespült und meistens über Nacht unter destilliertem Wasser aufbewahrt. Gewöhnlich am nächsten Morgen wurden sie herausgenommen, mit destilliertem Wasser gründlich abgespritzt, mit einem Leinentuch getrocknet und auf einer Glasplatte etwa $^1/_2$ Stunde lang auf 300 bis 400° erhitzt. Eine zweite im geringen Abstand darübergedeckte Glasplatte schützte dabei gegen Staub.

Währenddessen wurde Luft in den Bestäubungsapparat eingelassen, dieser geöffnet und das Kathodenträgerrohr von dem Nickelbelag, den es

bei der vorhergegangenen Bestäubung erhalten hatte, durch Salpetersäure gereinigt, mit destilliertem Wasser abgewaschen und getrocknet. Auf diese Weise wurde vermieden, daß der Nickelüberzug, der nach einigen Bestäubungen die ganze Innenwand der inneren Glocke bedeckte, eine leitende Verbindung zwischen der Anode und der Kathode herstellte. Nach dem Erkalten der Spiegelplatte wurde sie gewogen und dann sofort in den Bestäubungsraum auf das Tischchen gebracht. Die zu ihr gehörigen Segmente wurden um sie herumgelegt, so daß wieder die alte Kreisscheibe entstand. Nach dem Darüberdecken des Schutzbleches wurden die Glasglocken aufgesetzt und die Pumpe eingeschaltet.

Nach einigen Stunden war der Druck unter 0,01 mm Quecksilbersäule gesunken. Nun wurde die Pumpe durch einen Hahn vom Entladungsgefäß abgesperrt. Am nächsten Tag wurde geprüft, ob die Anordnung dicht gehalten hatte. Genügte die Dichtheit, so wurde der Hahn zur Wasserstoffzuleitung geöffnet und die Kapillare durch Öffnen eines weiteren Hahnes überbrückt. Auf diese Weise war die ganze Wasserstoffleitung an das Entladungsgefäß angeschlossen bis zu dem Hahn an der Vorratsflasche. Hinter diesem befand sich dann der Wasserstoff unter Überdruck. Nachdem der vom vorhergegangenen Versuch noch in den Röhren befindliche Wasserstoff wieder aus den Glocken weggepumpt und damit der letzte Luftrest hinausgespült worden war, wurde die Pumpe wieder abgesperrt. Am nächsten Tag wurde abermals auf Dichtheit geprüft. Erwies sich diese auch jetzt als ausreichend, so wurde die Herstellung eines Spiegels begonnen. Die Pumpe lief anfangs so schnell, daß der Druck im Bestäubungsraum zunächst geringer war, als zur Spiegelherstellung erforderlich. Erst nach einer Stunde wurde der elektrische Strom eingeschaltet. Vorteilhaft hält man dabei zunächst die angelegte Spannung um ein Viertel zu gering, weil die Stromstärke auch bei unverändertem Gasdruck zunächst höher ist als später und die Entladung am Anfang auch leicht zu höheren Stromstärken umschlägt. Nach etwa fünf Minuten kann man die volle Spannung anlegen. Nun wurden Pumpengeschwindigkeit und Stromquelle so eingestellt, daß bei einer gegebenen Stromstärke eine bestimmte Spannung zwischen den Elektroden herrschte. Ich habe 33 mA und 1250 Volt benutzt. Mit steigender Pumpengeschwindigkeit, also mit abnehmendem Druck stieg die Spannung. Die Einstellung ließ sich sehr scharf durchführen, wenn die Stromquellen hinreichend unveränderlich waren. Der Umformer lag an der Akkumulatorenbatterie des Instituts. Diese wurde während der Bestäubung von anderer Seite nicht beansprucht. Zunächst war auch

der Pumpenmotor an die gleiche Batterie angeschlossen. Da aber in diesem Fall eine Veränderung in der Einstellung der einen Maschine auch die andere beeinflußte, habe ich später den Pumpenmotor an das Hochschulnetz angeschlossen. Die Schwankungen dieses Netzes waren zwar störend, bei hinreichender Aufmerksamkeit aber ließen sie sich unschädlich machen, weil der Gasdruck der veränderten Pumpengeschwindigkeit nur langsam folgte.

Nachdem die Entladung einige Stunden gedauert hatte, wurde die Spiegelplatte zur Bestäubung freigegeben. Dadurch änderte sich gewöhnlich die Stromstärke und Spannung am Entladungsgefäß ein wenig. Bei einiger Übung kann man dieser Veränderung vorher Rechnung tragen, sonst genügte eine Minute, um die gewünschten Werte einzustellen. Es machte keine besondere Mühe, diese Werte bis auf $^1/_2$ Proz. einzuhalten. Die Zeiger der Instrumente standen im allgemeinen vollkommen still.

Nachdem die Bestäubung die gewünschte Zeit — sie wurde bis auf einige Sekunden genau mit der Taschenuhr gemessen — gedauert hatte, wurde ein Schalter im Stromkreis des Entladungsraumes geöffnet und dadurch die Bestäubung beendet. Die Pumpe lief nun noch mindestens 10 Minuten lang. Dann erst wurde sie und der Wasserstoffstrom durch Schließen der entsprechenden Hähne abgesperrt.

Am nächsten Tag, also nach vollständiger Abkühlung wurde geprüft, ob der Bestäubungsraum dicht geblieben war. Bei dieser Prüfung konnten aber nur Druckzunahmen von wenigstens 0,2 mm Quecksilbersäule wahrgenommen werden. Dann wurde Luft eingelassen, die Glocken abgehoben, der Spiegel herausgenommen und sofort gewogen.

Die in dieser Weise hergestellten Nickelschichten zeigten einen Hochglanz, wie er wohl bei Metallen auf keine andere Weise zu erreichen ist. Weder im auffallenden noch im durchfallenden Licht waren Ungleichmäßigkeiten oder Unterschiede in der Dicke an verschiedenen Stellen der Platte zu erkennen. Auch die später angeführten Messungen der Leitfähigkeit beweisen, daß die Abweichungen nur sehr gering waren. Unter dem Mikroskop waren auch mit Immersionssystem keine Andeutungen einer Struktur zu erkennen.

Vor den endgültigen Messungen mußte Klarheit darüber gewonnen werden, wie die Herstellungsweise auf die Leitfähigkeit der Schichten einwirkte. Die früher von mir gefundene Kurve erregt den Verdacht, daß die zu Beginn der Bestäubung niedergeschlagenen Schichtteile eine geringere Leitfähigkeit besitzen als die später abgeschiedener. Ein solches Verhalten würde sich ungezwungen durch die Annahme erklären

lassen, daß die Nickelkathode an der Luft oberflächlich oxydiert wird, so daß zu Beginn der Bestäubung sich teilweise Nickeloxyd an Stelle des reinen Metalls niederschlägt, und erst später, wenn alles Nickeloxyd von der Kathode zerstäubt bzw. durch den Wasserstoff reduziert und der frei gewordene Sauerstoff fortgespült ist, reines Nickel sich abscheidet. Auf Grund dieses Gedankenganges muß man erwarten, daß von gleich dicken Schichten diejenigen die größte Leitfähigkeit besitzen, bei deren Herstellung die Vorbereitungszeit, das ist die Zeit vom Einschalten des elektrischen Stromes bis zum Freigeben der Spiegelplatte zur Bestäubung, am längsten war. Eine solche Meßreihe zeigt Tabelle 1. Die Bestäubungszeit betrug für alle Schichten 30 Minuten. Man sieht deutlich, wie mit wachsender Vorbereitungszeit die Leitfähigkeit erheblich zunimmt. Außerdem zeigt sich, daß auch die Schichtdicke im gleichen Sinne ansteigt, vielleicht weil die oxydierte Kathode langsamer zerstäubt als die reine, oder auch weil die durch den Strom bereits erhitzte Kathode schneller zerstäubt als die kalte.

Tabelle 1.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Vorbereitungszeit Minuten	Leitfähigkeit, willkürliche Einheiten
8	50,6	58	780
9	52,2	121	920
10	56,0	180	1057
11	55,8	240	1130
13	55,2	300	1043

Die Schicht Nr. 12 mißglückte, weil das Fett unter dem Flansch der äußeren Glocke an einer Stelle hinweggesogen war, so daß Luft eindrang. Schicht Nr. 13 zeigt wieder eine geringere Leitfähigkeit. Es lag daher der Gedanke nahe, daß der Widerstand noch in anderer Weise von der Herstellungsart der Schichten abhängt, nämlich daß die Leitfähigkeit einer Schicht um so größer ist, je länger das Entladungsgefäß im Betrieb war, seitdem die Kathode längere Zeit der Luft ausgesetzt war oder im lufthaltigen Gas als Kathode diente. Die Meßreihe der Tabelle 2 bestätigte diese Vermutung. Die Bestäubungszeit betrug wieder 30 Minuten, die Vorbereitungszeit, abgesehen von der Schicht Nr. 19, 4 Stunden. Die fehlende Nr. 16 war eine Schicht, deren Herstellung 90 Minuten gedauert hatte, die also hier nicht in Betracht kommt. Bei Beginn der Meßreihe hatte die Kathode etwa einen Monat an der Luft gelegen. Schicht 19 wurde mit 5 Stunden statt 4 Stunden Vorbereitungszeit hergestellt. Man

sieht, daß die Leitfähigkeit dadurch nicht mehr merklich beeinflußt wurde. Ich habe daher bei der endgültigen Meßreihe mit einer Vorbereitungszeit von 4 Stunden gearbeitet. Möglicherweise hätte auch eine kürzere ausgereicht, aber die Klärung dieser Frage hätte mehr Zeit erfordert, als ich später im günstigsten Fall hätte sparen können.

Tabelle 2.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Spez. Flächenleitfähigkeit	Spez. Flächenleitfähigkeit für 52,5 mμ Dicke
14	47,6	0,201	0,239
15	52,7	0,248	0,246
17	52,4	0,257	0,258
18	52,2	0,271	0,273
19	53,0	0,277	0,273

Bei Schichten mit einer anderen Bestäubungszeit als 30 Minuten wurde die Vorbereitungszeit so gewählt, daß die Mitte der Bestäubungszeit immer 4 Stunden und 15 Minuten nach dem Einschalten des Entladungsstromes lag. Die Kathode war nicht länger in Luft, als für das Herausnehmen der fertigen Schicht aus dem Bestäubungsraum, das Einlegen der Glasplatte für die neue Schicht und das Evakuieren erforderlich war. Das waren etwa 5 Stunden. Jeden dritten Tag wurde eine Schicht hergestellt. Die unten mitgeteilten Messungsergebnisse beweisen, daß die in dieser Weise gewonnenen Schichten gut miteinander vergleichbar waren.

III. Die Dickenmessung.

Die Dicke der Schichten wurde mit der Wage ermittelt, indem die Spiegelplatte vor und nach der Bestäubung gewogen und so das Gewicht der Schicht bestimmt wurde. Aus dem Flächeninhalt der Platte und dem spezifischen Gewicht des Belags ergab sich dann die Dicke. Als spezifisches Gewicht wurde der Wert 8,8 angenommen, wie er für Nickel gewöhnlicher Form gilt. Die Annahme, daß dieser Wert auch für das Nickel in den dünnen Schichten richtig ist, wird gestützt durch Messungen von Hagen und Rubens[1]). Diese Messungen lassen es als sehr wahrscheinlich erscheinen, daß das Silber dünner Schichten, die durch Kathodenzerstäubung oder auf chemischem Wege auf Glas niedergeschlagen sind, dasselbe spezifische Gewicht hat wie das Silber in gewöhnlicher Form. Außer der Dicke in mμ ist in den Tabellen noch die Flächendichte der

[1]) Ann. d. Phys. (4) 8, 437, 1902.

Schicht, also das Gewicht der Schicht je Flächeneinheit angegeben. Für diesen Wert spielt die Unsicherheit des spezifischen Gewichtes keine Rolle.

Als Wage wurde eine Mikroanalysenwage von Sartorius benutzt. Die Zungenstellung wurde mit einer Lupe abgelesen. Das Reiterlineal war durch 100 Zähne unterteilt, so daß der Reiter nur in wohlbestimmter Weise aufgesetzt werden konnte. Ein Uhrglas mit Thoriumoxyd war innerhalb des Gehäuses aufgestellt zum Schutz gegen Fehler durch elektrische Ladungen der Glaswände. Ein Ausschlag von einem Teilstrich wurde bei Belastungen von 1 bis 3 g durch ein Übergewicht von 0,020 mg erzeugt. Die Ruhelagen stimmten im allgemeinen auf etwa $^1/_2$ Skalenteil überein. Als Gewicht wurde im wesentlichen nur eine Glasplatte verwendet. Diese Glasplatte, die Gewichtsplatte, war aus der gleichen photographischen Platte geschnitten wie die als Schichtunterlage dienende Spiegelplatte. Beide Platten waren durch Schleifen so abgeglichen, daß die Gewichtsplatte etwa 1 mg schwerer war als die Spiegelplatte. Jede wog etwa 2 g. Sie wurden immer in gleicher Weise behandelt, nur wurde die Gewichtsplatte im Entladungsraum in ein aus Glasstreifen zusammengesetztes Kästchen gelegt und so gegen Bestäubung geschützt. Sonst wurde nur noch ein Zwei-Milligramm-Reiter als Gewicht benutzt.

Die Wägungen wurden in folgender Weise ausgeführt. Auf die linke Wagschale kam die Spiegelplatte, auf die rechte die Gewichtsplatte; der Reiter wurde in eine passende Zahnlücke gesetzt. Aus sieben Umkehrpunkten wurde die Ruhelage der Zunge abgeleitet. Dann wurden die beiden Platten vertauscht, der Reiter in die entsprechende Lücke auf dem anderen Arm gesetzt und in gleicher Weise die Ruhelage bestimmt. Der Unterschied zwischen den beiden Ruhelagen ist ein Maß für den Unterschied in den Gewichten, unabhängig von Wagebalkenverhältnis und Auftrieb der Luft. Im ganzen wurden so mindestens fünf Ruhelagenbestimmungen ausgeführt, um etwaigen Nullpunktsverschiebungen Rechnung zu tragen. Der Fehler einer Wägung hat wohl nie 0,01 mg erreicht.

Zur Prüfung der Unveränderlichkeit des Gewichtsunterschiedes zwischen Spiegel- und Gewichtsplatte wurde folgende Messungsreihe ausgeführt. Die Platten wurden, wie zu einer Bestäubung vorbereitet, ins Vakuum gebracht, nach etwa drei Tagen herausgenommen, gewogen, wieder ins Vakuum gebracht usf. Vor der fünften Wägung wurde der Zerstäubungsstrom bei bedeckter Spiegelplatte eingeschaltet. Es ergaben sich folgende Gewichtsunterschiede in Milligramm:

0,553, 0,549, 0,552, 0,550, 0,552.

Die Abweichungen zwischen den einzelnen Werten betragen noch nicht 0,005 mg.

Um zu untersuchen, ob vielleicht durch die Bestäubung zunächst ein merklicher Gewichtsverlust der Spiegelplatte eintrat, vielleicht dadurch, daß die Platte eine ihr anhaftende Gashaut abgab, habe ich eine Scheibe nur 30 Sekunden lang bestäubt. Das Gewicht nahm dadurch um 0,001 mg ab, während es durch die niedergeschlagene Nickelschicht um etwa 0,006 mg hätte zunehmen sollen. Der Unterschied ist von der Größe der Wägefehler. Eine weitere Stütze dafür, daß die Bestäubung eine Gewichtsänderung der Spiegelplatte an sich nicht veranlaßt, wird weiter unten angeführt werden.

Rechnet man mit einem Wägefehler von 0,005 mg, so ergibt sich, da die Spiegelplatte einen Flächeninhalt von 8 cm^2 hatte und zur Dickenbestimmung zwei Wägungen erforderlich waren, als Fehler der Flächendichte 0,001 mg/cm^2. Das entspricht einem Fehler in der Dicke von 1 $m\mu$.

Für sehr dünne Schichten versagt die Wage bei der Dickenbestimmung, weil das Gewicht der Schicht so gering ist, daß der Wägefehler einen erheblichen Bruchteil des Gesamtgewichtes der Schicht ausmacht. In diesem Fall habe ich die Dicke aus der Zeit abgeleitet, die die Spiegelplatte der Bestäubung ausgesetzt war. Das Verfahren setzt voraus, daß die Abhängigkeit der Dicke von der Bestäubungszeit bekannt ist. Bei gleichmäßigen Bedingungen, also gleicher Stromstärke, gleicher Spannung (also auch gleichem Gasdruck), gleicher Lage von Kathode, Spiegelplatte usw. ist anzunehmen, daß die Dicke der Bestäubungszeit proportional ist. In welchem Maße diese Annahme bei meinen Versuchen berechtigt war, zeigt Tabelle 3. Schicht Nr. 35 war fast 200 $m\mu$ dick, erforderte also eine sehr lange Bestäubungszeit, ich habe daher nicht versucht, die Bestäubungsbedingungen genau konstant zu halten.

Tabelle 3.

Schicht Nr.	Bestäubungszeit Minuten	Dicke, gemessen, in		Dicke, ber., in
		mg cm^{-2}	$m\mu$	$m\mu$
28	30	0,0419	47,6	47,4
29	40	0,0546	62,0	63,2
30	20	0,0276	31,4	31,6
31	30	0,0420	47,7	47,4
32	60	0,0838	95,2	94,8
33	10	0,0143	16,3	15,8
34	30	0,0417	47,3	47,4
41	30	0,0427	48,5	47,4

Die anderen fehlenden Nummern beziehen sich auf Schichten, die für eine Wägung zu dünn waren.

In der letzten Spalte der Tabelle 3 sind die Dicken eingetragen, wie sie sich mit Hilfe einer Bestäubungsgeschwindigkeit von 1,58 mμ/min ergeben. Die größte Abweichung beträgt 1,2 mμ. Damit ist zugleich vor neuem erwiesen, daß die Spiegelplatte an sich keine über die Wägegenauigkeit hinausgehende Gewichtsänderung durch die Bestäubung erleidet.

Das Verfahren, die Dicke der sehr dünnen Schichten aus der Bestäubungszeit zu berechnen, hat natürlich nur Sinn, wenn die Proportionalität zwischen beiden für kleinere Dicken genauer erfüllt ist, als man mit der Wage nachweisen kann. Als Grund für Abweichungen könnte in Betracht kommen, daß die Nickelteilchen sich auf der reinen Glasfläche mit anderer Geschwindigkeit absetzen als auf dem Nickelbelag. Nach anderen Erfahrungen, z. B. bei dem Wegfangen von Quecksilbermolekülen im Vakuum durch gekühlte Flächen, ist es nicht unmöglich, daß die Bestäubungsgeschwindigkeit am Anfang kleiner ist als später. Die dünnsten Schichten würden also dünner sein, als der Bestäubungszeit und damit dem berechneten Wert entspricht.

Tabelle 4.

Metall	Temperaturgebiet	Siedepunkt
Quecksilber	— 140 bis — 130	357°
Cadmium	zwischen — 183 u. — 78	775
Zink		910
Magnesium		1100
Kupfer	zwischen 350 und 575	2300
Silber	über 575	1950

Nach Untersuchungen von Knudsen[1]) ist es freilich unwahrscheinlich, daß bei Nickel unter den gegebenen Verhältnissen eine solche Erscheinung eintritt. Danach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Dampfmolekül im Vakuum beim Auftreffen auf eine saubere Glasfläche sofort hängen bleibt, von der Temperatur abhängig, und zwar gibt es einen engen Bereich, in welchem mit steigender Temperatur die Wahrscheinlichkeit vom größten Wert 1 zu sehr kleinen Werten abfällt. Unterhalb dieses Temperaturbereiches bleibt also ein Dampfmolekül beim ersten Auftreffen hängen. Tabelle 4 gibt die Ergebnisse der Knudsenschen Messungen

[1]) Ann. d. Phys. (4) **50**, 472, 1916.

wieder. Die in der letzten Spalte angeführten Siedepunkte sind den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen. Da Nickel einen sehr hohen Siedepunkt (2340° bei 30 mm Druck) hat, so ist es sehr wahrscheinlich, daß es auf der Fläche der Spiegelplatte restlos kondensierte.

IV. Die Leitfähigkeit.

A. Meßmethode. Der Widerstand der Schichten wurde nach einem Kompensationsverfahren gemessen. Durch die Schicht wurde ein elektrischer Strom geleitet, dessen Stärke mit einem genauen Amperemeter gemessen wurde. Auf den mittleren Teil der Spiegelplatte, in einem wohlbestimmten Abstand von etwa 1 cm voneinander, wurden zwei Silberspitzen aufgesetzt, welche die zu kompensierende Spannung abnahmen.

Als Kompensationsapparat diente ein Stöpselrheostat mit Fehlern unter einem Tausendstel. Die Spannung lieferte ein Akkumulator. Ein dauernd angeschaltetes Voltmeter gestattete, sie beständig zu überwachen. Dieses Voltmeter wurde nach jeder Meßreihe an das mit Vorschaltwiderstand versehene Millivolt- und Amperemeter angeschlossen, welches zur Strommessung diente.

Zur Messung wurde ein bestimmtes Widerstandsverhältnis am Rheostaten gestöpselt und so eine bestimmte Spannung an die Silberspitzen gelegt. Dann wurde der Meßstrom so eingestellt, daß das Galvanometer keinen Ausschlag zeigte, und am Amperemeter abgelesen. Da drei Kontaktspitzen vorhanden waren, standen also drei Spitzenpaare zur Verfügung. Ein Umschalter gestattete, die Meßspannung entweder an die Spitzen I und II oder II und III oder I und III zu legen. Mit jedem dieser Paare wurde eine Messung für jede Stromrichtung ausgeführt, außerdem wurde mit drei verschiedenen Spannungen gearbeitet, so daß jede Meßreihe im allgemeinen 18 Beobachtungen umfaßte. Wählt man die verschiedenen Spannungen den Meßbereichen des Amperemeters entsprechend, so erhält man nahezu gleiche Einstellungen dieses Instrumentes. Die Beobachtungen und ihre Auswertung erfordern dann nur wenig Zeit.

Ein Urteil über die Zuverlässigkeit der Widerstandsmessungen gestattet die Beobachtungsreihe der Tabelle 5. Sie bezieht sich auf eine Schicht von etwa 50 mμ Dicke. Die Zahlen geben die Amperemeterausschläge an. Sie drücken also die Leitfähigkeit in willkürlichen Einheiten aus. Die drei Spalten gelten für die drei Spitzenpaare.

Die Abweichungen der einzelnen Werte voneinander bleiben sämtlich unter 1 Proz., wenn man von der ersten Zeile absieht, sogar unter 0,5 Proz. Die Einzelwerte zeigen dabei einen gewissen Gang, die Leit-

fähigkeit nimmt langsam zu, so daß die eigentlichen Meßfehler wohl nur wenige Tausendstel betragen haben. Mehr war mit den benutzten Hilfsmitteln nicht zu erreichen, da das Amperemeter nicht genauer war. Eine Steigerung der Genauigkeit wäre auch zwecklos, da die Dickenmessung größere Fehler aufwies.

Tabelle 5.

Leitfähigkeitsmessungen an der gleichen Schicht.

15. 6.	7,00 N	114,9	111,4	56,5
	Unveränderte Wiederholung:			
16. 6.	6,00 N	115,1	111,8	56,7
	Die Spitzen wurden abgehoben und wieder aufgesetzt:			
	6,30 N	115,0	112,0	56,7
	Die Spitzen wurden stärker aufgedrückt:			
	6,40 N	115,0	112,0	56,7
	Unveränderte Wiederholung:			
17. 6.	11,30 V	115,2	112,0	56,8
	Die Schicht wurde aus dem Apparat herausgenommen und neu eingelegt, dabei wurden die Kontaktpolster vertauscht:			
	12,15 V	115,0	112,0	56,7
	Die Spitzen wurden stärker aufgedrückt:			
	12,30 V	115,0	111,9	56,7
	Unveränderte Wiederholung:			
20. 6.	4,10 N	115,4	112,2	56,8
	Die Schicht wurde aus dem Apparat herausgenommen und neu eingelegt, dabei wurden die Kontaktpolster vertauscht:			
	4,30 N	115,4	112,1	56,8

Die Schichtbreite, die gleich der Breite der Spiegelplatte war, wurde mit dem Schraubenmikrometer bis auf 0,01 mm bestimmt. Sie betrug etwa 15 mm. Die Messung des Abstandes der Silberspitzen geschah in der Weise, daß an Stelle der Spiegelplatte ein leicht berußter Glasstreifen in den Widerstandsapparat gelegt wurde. Beim Niederdrücken der Spitzen hinterließen diese Eindrücke, die im durchfallenden Licht gut unter dem Mikroskop einzustellen waren. Ihr Abstand wurde bis auf 0,01 mm genau bestimmt. Dabei war der Abstand in Richtung der Stromlinien zu messen.

Ein Beispiel für eine solche Leitfähigkeitsmessung gibt Tabelle 6. Die Werte für die spezifische Flächenleitfähigkeit in der letzten Spalte sind aus den Werten der beiden ersten Spalten berechnet. Die Abweichungen von den beobachteten in der vorletzten Spalte liegen innerhalb der Ablesefehler.

Tabelle 6.

Bestimmung der spezifischen Flächenleitfähigkeit.

A. Widerstandsmessung:

Spannung des Akkumulators zu Beginn 136,0 Skt.

Widerstandsverhältnis	Meßber. d. Amperemeters	Kompensationsstrom in Skt. d. Amp. f. Spitz. I–II	II–III	I–III
100 : 6000	0,015	123,8 123,8	117,1 117,1	60,0 60,0
200 : 6000	0,030	124,2 124,2	117,7 117,7	60,3 60,3
500 : 6000	0,075	124,0 124,0	117,5 117,5	60,2 60,2
Korr. d. Amperemeters . .		+ 0,1	+ 0,1	+ 0,2

Spannung des Akkumulators am Ende 136,0 Skt. = 2,000 Volt.

B. Bestimmung der Längenmaße:

Spitzenabstand I–II: 10,65 10,67 10,67 10,67 Mittel: 10,66 mm
„ II–III: 11,56 11,55 11,56 11,55 „ 11,56 „
Plattenbreite zwischen I und II 15,44 mm, zwischen II und III 15,50 mm.

C. Spezifische Flächenleitfähigkeit:

I–II	II–III	I–III beob.	I–III ber.
0,2566	0,2624	0,2594	0,2596
0,2575	0,2637	0,2607	0,2607
0,2570	0,2633	0,2603	0,2603

Mittel: 0,260 Ohm^{-1}.

B. Änderungen des Widerstandes mit der Zeit. Die Messungen der Tabelle 5 erstreckten sich über 6 Tage, sie zeigen also auch, daß die Leitfähigkeit der Nickelschichten sich mit der Zeit nur wenig änderte. Eine Reihe weiterer Messungen an anderen Schichten führten zu demselben Ergebnis. Die Änderungen, welche die Leitfähigkeit innerhalb einiger Tage erlitt, blieben stets unter 1 Proz. Da bei allen Schichten in ziemlich gleicher Weise verfahren wurde — die Widerstandsmessung erfolgte etwa 18 Stunden nach der Herstellung —, kann auf diese Weise keine Unstimmigkeit in die Beobachtungen hineingekommen sein.

Setzt man die Schichten längere Zeit höheren Temperaturen aus, so wird die Widerstandsänderung merklicher. In Tabelle 7 ist eine Beobachtungsreihe dieser Art wiedergegeben. Die Schichten wurden in einem elektrisch geheizten Luftbad auf etwa 90° erwärmt. Die Änderung der Leitfähigkeit bei dieser Temperatur scheint also in zweierlei Weise zu geschehen. Einmal nimmt sie ab, offenbar weil das Metall von der

Luft angegriffen wird; diese Änderung macht sich naturgemäß bei den dünnsten Schichten am stärksten bemerkbar. Dann aber nimmt die Leitfähigkeit auch zu, vielleicht durch eine Art Anlaßvorgang, wie er sich ähnlich an Drähten und Blechen bemerkbar macht. Diese Zunahme kommt aber nur bei verhältnismäßig dicken Schichten zur Auswirkung, während sie bei dünnen durch die Abnahme überdeckt wird.

Tabelle 7.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Dauer der Erwärmung Std.	Zunahme der Leitfähigkeit Proz.
35	186	15	+ 1,2
36	10,3	11	— 0,5
37	5,3	12	— 2,8
39	3,2	22	— 7
40	5,3	14	— 4,2
41	48,5	14	0,0

C Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Dicke. In Tabelle 8 sind die Ergebnisse der Messungen an einer Reihe von Schichten verzeichnet, die in möglichst gleicher Weise, wie oben beschrieben, hergestellt wurden. Bei der Herstellung der dieser Reihe vorausgehenden Schicht Nr 25 war Luft in den Entladungsraum eingedrungen. Die Messungen an den Schichten Nr. 26 und 27, die im Vergleich mit den späteren eine zu geringe Leitfähigkeit ergaben, sind daher nicht verwertet worden. Die durch einen Stern bezeichneten Werte für die Dicke wurden aus der Bestäubungszeit berechnet. In Spalte 5 stehen die spezifischen Flächenleitfähigkeiten, die sich aus den Messungen mit dem Spitzenpaar I und II ergaben, entsprechend in Spalte 6 und 7 diejenigen für die anderen Paare, je für drei verschiedene Meßspannungen. Spalte 8 enthält das Mittel aus den neun Werten. Die Spalten 5 und 6 sollten übereinstimmen. Tatsächlich weichen sie voneinander ab, offenbar weil die Schichtdicke nicht über die ganze Plattenfläche gleich war. Die Unterschiede sind aber so gering, höchstens 3 Proz., daß sie die Ergebnisse nicht wesentlich beeinflussen.

Die spezifischen Flächenleitfähigkeiten der Schichten mit 30 Minuten Bestäubungszeit, also die Schichten Nr. 28, 31, 34 und 41 zeigen eine geringe Zunahme in dem Sinne, daß die später hergestellten Schichten besser leiten als die zunächst niedergeschlagenen. Der Grenzzustand der Bestäubungseinrichtung war also mit der Schicht Nr. 28 noch nicht erreicht. Ich habe diesem Umstand dadurch Rechnung getragen, daß

Tabelle 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Schicht Nr.	Best.-Zeit Min.	Schichtdicke in		Spez. Flächenleitfähigkeit in Ohm^{-1} gemessen				
		mg cm^{-2}	mμ	I–II	II–III	I–III	Mittel	berich.
26	30	0,0386	43,8	0,221 0 0,222 2 0,221 3	0,222 6 0,223 3 0,223 0	0,222 2 0,222 9 0,222 7	0,222 4	—
27	30	0,0408	46,3	0,251 0 0,252 2 0,251 7	0,254 8 0,256 2 0,255 7	0,253 0 0,254 7 0,254 0	0,253 7	—
28	30	0,0419	47,6	0,256 6 0,257 5 0,257 0	0,262 4 0,263 7 0,263 3	0,259 4 0,260 7 0,260 3	0,260 1	0,277
29	40	0,0546	62,0	0,381 0 0,382 7 0,381 8	0,384 0 0,386 3 0,385 4	0,381 0 0,382 0 0,381 7	0,382 9	0,401
30	20	0,0276	31,4	0,154 2 0,155 0 0,154 3	0,156 0 0,157 0 0,156 6	0,154 5 0,155 3 0,155 1	0,155 3	0,160
31	30	0,0420	47,7	0,273 0 0,274 2 0,273 4	0,274 0 0,275 3 0,274 9	0,273 0 0,274 2 0,273 8	0,274 0	0,278
32	60	0,0838	95,2	0,644 0,647 0,646	0,655 0,657 0,656	0,648 0,652 0,651	0,645	0,652
33	10	0,0143	15,8*	0,046 7 0,046 9 —	0,046 1 0,046 3 —	0,046 3 0,046 4 0,046 4	0,046 4	0,046 8
34	30	0,0417	47,3	0,270 0 0,271 2 0,270 7	0,273 2 0,274 3 0,274 0	0,271 0 0,272 0 0,272 0	0,272 1	0,274
35	120	0,164	186	1,362 1,367 1,365	1,378 1,384 1,382	1,370 1,376 1,376	1,373	1,372
36	6,5	—	10,3*	0,029 80 0,029 95 0,029 83	0,030 60 0,030 78 0,030 65	0,030 20 0,030 35 0,030 28	0,030 27	0,030 0
37	$3^1/_3$	—	5,3*	0,004 6 0,004 6	0,004 4 0,004 4	0,004 5 0,004 5	0,004 5	0,004 4
38	1	—	1,6*	—	—	—	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$
39	2	—	3,2*	$0,0_3304$	$0,0_3151$	$0,0_3198$	0,000 22	0,000 21
40	$3^1/_3$	—	5,3*	0,006 80 0,006 76 0,006 79	0,006 52 0,006 49 0,006 51	0,006 63 0,006 61 0,006 63	0,006 6	0,006 3
41	30	0,0427	48,5	0,298 4 0,299 2 0,298 7	0,297 6 0,299 1 0,298 2	0,298 0 0,300 0 0,299 0	0,298 7	0,284

ich für die Leitfähigkeit einer Schicht von 48 mμ Dicke den mittleren Wert 0,2800 annahm, und die gemessenen Beträge durch Interpolation entsprechend berichtigte (Spalte 9). Tabelle 9 zeigt im einzelnen, wie bei der Berechnung der berichtigten Leitfähigkeiten verfahren wurde.

Tabelle 9.

1	2	3	4	5	6
Schicht Nr.	Dicke	Leitfähigkeit		Red.-Fakt.	Berichtigter Wert
		gemessen	reduz. a. $d = 48{,}0$ mμ		
31	47,7	0,2740	0,2762	1,012	0,278
32	95,2	0,6451	—	1,010	0,652
33	15,8	0,0464	—	1,009	0,0468
34	47,3	0,2721	0,2774	1,008	0,274

Aus der Tabelle 8 ergibt sich, daß die spezifische Flächenleitfähigkeit für Dicken um 50 mμ für 1 mμ Dickenzunahme um 0,0075 anwächst. Mit Hilfe dieses Wertes wurde aus den Zahlen der Spalte 3 (Tabelle 9) für Schichten mit 30 Minuten Bestäubungszeit, das sind die Schichten Nr. 31 und 34, die spezifische Flächenleitfähigkeit berechnet, welche sie zeigen würden, wenn sie genau 48 mμ dick wären. Die so erhaltenen Werte sind in Spalte 4 eingetragen. Spalte 5 enthält dann den Faktor, mit welchem man diese Werte multiplizieren muß, um den als Normalwert angenommenen Betrag 0,2800 zu erhalten. Die entsprechenden Faktoren für die Schichten 32 und 33 sind aus den beiden anderen interpoliert. Die berichtigten Werte in Spalte 6 ergaben sich dann als Produkt aus den Werten der Spalten 3 und 5. In Fig. 5 ist die spezifische Flächenleitfähigkeit als Funktion der Dicke aufgetragen. Es ergibt sich daraus, daß die spezifische Flächenleitfähigkeit für Schichtdicken größer als 20 mμ durch eine Gerade dargestellt wird. Diese Gerade geht aber nicht durch den Nullpunkt, sondern schneidet die Abszissenachse bei einer Dicke von 12 mμ. Dieser Betrag ist etwa das Zehnfache des Beobachtungsfehlers, er kann also nicht durch Fehler in der Dickenbestimmung erklärt werden.

Für Dicken unterhalb 20 mμ fügen sich die Beobachtungen nicht mehr der Geraden ein, sondern mit abnehmender Dicke nimmt die spezifische Flächenleitfähigkeit langsamer ab, als jener Geraden entspricht. Innerhalb der in diesem Bereich ziemlich großen verhältnismäßigen Fehler liegen auch hier die den Beobachtungen entsprechenden Punkte auf einer Geraden, die bei etwa 3 mμ die Abszissenachse erreicht, so daß also

dünnere Schichten den elektrischen Strom nicht mehr leiten. Für die Dicke von 1,6 mμ ist das durch die Schicht Nr. 38 noch besonders belegt.

Abgesehen von einer Unsicherheit von 3 mμ der Dicke verhält sich eine durch Kathodenzerstäubung in strömendem Wasserstoff auf Glas niedergeschlagene Nickelschicht so, als ob sie aus zwei Teilen bestände, einem von 20 mμ Dicke und einem, der den Rest der Schicht ausmacht. Bei Schichten, die dünner als 20 mμ sind, macht der erste Teil die ganze Schicht aus, so daß der zweite Teil fehlt. Es mag dahingestellt bleiben, ob bei den dickeren Schichten der erste Teil aus zwei Lagen, eine an der Grenze Glas—Metall und eine an der Grenze Luft—Metall besteht. Die spezifische Leitfähigkeit des ersten Teils ergibt sich unter Berücksichtigung der Verschiebung der Kurve um 3 mμ nach größeren Dicken

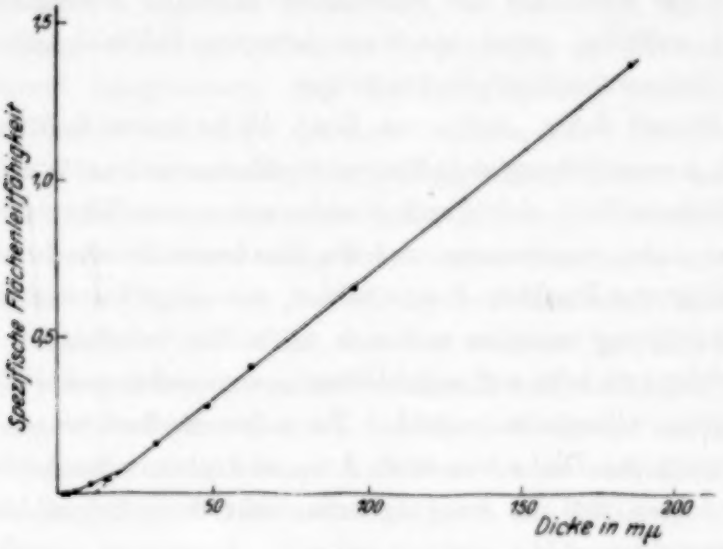


Fig. 5.

zu $3{,}8 \cdot 10^{4}\,\mathrm{Ohm}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Die spezifische Leitfähigkeit des zweiten Teils ist $7{,}86 \cdot 10^{4}\,\mathrm{Ohm}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Die Zahlenwerte sind in beiden Fällen aus der Kurve der Fig. 5 entnommen.

Die spezifische Leitfähigkeit des zweiten Teils ist der Grenzwert der spezifischen Leitfähigkeit für sehr dicke Schichten, denn in diesem Fall spielt der erste Teil keine Rolle. Man sollte also den Wert $14{,}4 \cdot 10^{4}\,\mathrm{Ohm}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$ erwarten, wie er für Nickel in der üblichen Draht- oder Blechform gilt, also einen Wert, der etwa doppelt so groß ist wie der beobachtete. Es liegt nahe, aus der geringen Leitfähigkeit zu schließen, daß das Metall der dünnen Schichten nicht rein ist. Ein solcher Schluß würde auch durch die Tatsache gestützt werden, daß der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit der dünnen Schichten nur etwa

halb so groß ist wie bei reinen Metallen üblicher Form. Eine Verunreinigung könnte leicht durch den Wasserstoff bei der Bestäubung verursacht werden.

Es kommt aber noch ein anderer Grund in Betracht für die geringe Leitfähigkeit und den kleinen Temperaturkoeffizienten. Es ist bekannt, daß Drähte durch Formänderungen, z. B. durch Aufspulen, eine Verminderung ihrer Leitfähigkeit erfahren. Durch Erwärmen steigt dann die Leitfähigkeit wieder an. Beiden Behandlungsweisen einher geht eine Abnahme bzw. Zunahme des Temperaturkoeffizienten. Eine Verunreinigung bzw. Reinigung des Metalles ist mit dem Aufspulen und Erwärmen natürlich nicht verbunden, sondern es findet nur eine teilweise Zerstörung bzw. Wiederherstellung des Kristallgefüges statt. In den dünnen Schichten aber fehlt der Raum für die Ausbildung normaler Kristallite. Es ist also nicht auffällig, wenn sie eine geringere Leitfähigkeit und einen kleineren Temperaturkoeffizienten zeigen.

Als Grund dafür, daß unter 3 mμ Dicke keine Leitfähigkeit vorhanden ist, kommt folgendes in Frage. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß die Nickelschicht sich durch Kondensation von Nickeldampf bildet, so liegt es nahe, anzunehmen, daß die Kondensation damit beginnt, daß sich an diskreten Punkten Kerne bilden, die dann im weiteren Verlauf der Schichtbildung wachsen und sich schließlich berühren. Eine merkliche Leitfähigkeit tritt auf, sobald eine zusammenhängende Metallbrücke über die ganze Glasplatte besteht. Nach den Beobachtungen müßte das bei einer mittleren Dicke von etwa 3 mμ eintreten. Daraus würde dann rückwärts folgen, daß die Ausgangskerne sehr dicht liegen, höchstens im Abstand von 4 mμ.

Auf Grund dieser Auffassung sollte man erwarten, daß nach dem Zusammenwachsen der Kerne die Flächenleitfähigkeit bei weiter steigender Dicke schnell zunähme und schließlich durch eine durch den Nullpunkt gehende Gerade dargestellt würde. Die Beobachtungen bestätigen diese Vermutung nicht.

Eine Verschiebung der Kurve für die spezifische Flächenleitfähigkeit nach größeren Dicken würde aber dadurch eintreten, daß beim Bestäuben sich die Nickelteilchen auf der reinen Glasfläche weniger leicht absetzten als auf einem bereits vorhandenen Nickelbelag, denn in diesem Fall würde der für die Dicke errechnete Wert zu klein sein. Die Betrachtungen, die oben bei der Besprechung der Dickenmessung angestellt wurden, beweisen aber, daß die auf diese Weise mögliche Verschiebung höchstens 1 mμ betragen kann, so daß sich nur ein Drittel des beobachteten

Wertes so erklären läßt. Außerdem sprechen die oben angeführten Beobachtungen von Knudsen dagegen.

Eine Erklärungsmöglichkeit über die Verschiebung der Kurve nach größeren Dicken und für das Auftreten zweier Werte der spezifischen Leitfähigkeit des Nickels scheint mir mit der bereits oben angedeuteten Zerlegung der Gesamtschicht in zwei bzw. drei Lagen gegeben zu sein. Danach würde die Oberflächenschicht eines Leiters eine andere Leitfähigkeit zeigen als die tiefer liegenden Teile. Für Nickel wäre die Summe der Oberflächenschichten Glas—Nickel und Nickel—Luft im vorliegenden Fall etwa 20 mμ. Die Gleichung (1) würde danach nur für große Querschnitte Gültigkeit haben, aber für kleine versagen.

Dieses Versagen muß nicht auf einer im Wesen der metallischen Leitung begründeten Eigenschaft beruhen, es läßt sich leicht durch Nebenerscheinungen erklären. Bei der Besprechung der Dickenmessung hatte ich darauf hingewiesen, daß die Spiegelplatte zu Beginn der Bestäubung vielleicht mit einer Gashaut beladen ist. Die Messungen zeigten zwar, daß keine Änderung einer solchen Haut eintrat, welche mit einer Gewichtsveränderung von mehr als 0,001 mg/cm² verbunden ist, aber sie schlossen das Vorhandensein einer solchen Haut nicht aus. Wenn die Spiegelplatte zu Beginn der Bestäubung mit Sauerstoff beladen ist, so wird der Nickelbelag vielleicht zunächst vollständig, dann teilweise so lange oxydiert werden, bis aller Sauerstoff verbraucht ist, oder bis die Schichtdicke so groß geworden ist, daß der noch vorhandene Sauerstoff nicht mehr hindurchwirken kann. Außerdem ist es auch möglich, daß die Luft auf die fertige Schicht einwirkt und den Leitwert um einen bestimmten Betrag herabsetzt. Die beobachtete Abhängigkeit der spezifischen Flächenleitfähigkeit von der Dicke würde sich auf diese Weise zwanglos erklären, ohne daß die Gültigkeit der Gleichung (1) angetastet würde. Unter Beachtung dieser Möglichkeiten stellt der oben abgeleitete Wert für den Abstand der Kondensationskerne nur eine obere Grenze dar. Der richtige Wert ist wahrscheinlich viel kleiner.

V. Der Halleffekt.

A. Magnetfeld. Zur Erzeugung des Magnetfeldes für den Halleffekt dienten eine eisenfreie Spule oder ein Elektromagnet.

Die eisenfreie Spule bestand aus etwa 1000 Windungen. Sie hatte einen lichten Durchmesser von 38 cm und eine Länge von 12 cm. Bei der Messung des Halleffektes befand sich die Nickelschicht in der Mitte der Spule. An genau der gleichen Stelle wurde mit einer auf einen

Holzzylinder gewickelten Probespule mit 19 Windungen — Windungsfläche 189 cm^2 — die Stärke des Magnetfeldes mit dem ballistischen Galvanometer bestimmt. Dabei wurde Sorge getragen, daß die Achse der Probespule genau senkrecht stand auf der Ebene, in welcher sich später die Nickelschicht befand.

Einem Magnetstrom von 5 Amp. und einem Hilfsstrom von 0,0302 Amp. (zur Eichung des Galvanometers) entsprachen folgende abwechselnd gemessene ballistische Ausschläge in Zentimeter:

12,57	12,56	12,58	12,48	12,50	Mittel 12,54
12,43	12,52	12,43	12,45		„ 12,46

Daraus folgte eine Feldstärke von 160 Gauß. Da die Spule kein Eisen enthielt, war damit die zu jedem Erregerstrom gehörige Feldstärke bestimmt. Der Fehler hat 1 Proz. kaum erreicht. 2 cm in Richtung der Spulenachse von der Meßstelle entfernt war das Feld 1 Proz. schwächer, in einer Entfernung von 5 cm senkrecht zur Spulenachse war es 2,5 Proz. stärker. Durch Abweichungen von der Meßstelle bei der Bestimmung des Halleffektes ist höchstens ein Fehler von $^1/_2$ Proz. bewirkt worden.

Der Elektromagnet hatte zwei gegeneinander gerichtete Spulenkerne von 10 cm Durchmesser, die durch ein U-förmiges Joch verbunden waren. Durch aufgesetzte Polschuhe wurde der Querschnitt auf 2×5 cm^2 verjüngt. Der Abstand der Polschuhe betrug etwa 3 mm. Die magnetische Feldstärke wurde in ähnlicher Weise bestimmt wie bei der eisenfreien Spule. Die Probespule war hier auf eine rechteckige Bernsteinplatte gewickelt. Sie hatte 12 Windungen. Ihre Maße wurden mit dem Schraubenmikrometer vor und nach dem Bewickeln bestimmt. Die Windungsfläche betrug 25,46 cm^2. Die Zuleitungen der Spule setzten in der Mitte der einen Seite an. Sie waren auf über 1 m verseilt. Die Anschlußstellen an die Leitung zu dem etwa 5 m entfernten Galvanometer waren so befestigt, daß sie sich beim Bewegen der Spule nicht mitbewegten, also auch keine Kraftlinien schnitten.

Die Spule wurde in die Mitte zwischen die Polschuhe gebracht, so daß ihre Kanten den Kanten der Polschuhe parallel waren. Sie befand sich gerade an der Stelle des Feldes, an welcher später die Hallspannung zustande kam.

Die Felder wurden am Elektromagneten in folgender Weise erzeugt. Nach Einstellen einer bestimmten Stromstärke in den Spulen wurde durch Kurzschließen der Vorschaltwiderstände die Stromstärke auf etwa 5,2 Amp. gesteigert. Die Magnetisierung der Eisenkerne wuchs dadurch bis zur Sättigung. Nach etwa 5 Sekunden wurde der Kurzschluß unter-

brochen, so daß nun die auf dem absteigenden Ast der Magnetisierungskurve zu dem eingestellten Erregerstrom gehörige Feldstärke herrschte. Bei jeder Stromstärke wurde das Feld für beide Stromrichtungen bestimmt und die Ergebnisse zum Mittel vereinigt. Der Fehler ist wahrscheinlich unter 1 Proz. geblieben. Die stärkeren Felder wurden mit einer kleineren zylindrischen Probespule gemessen. Für die Felder 15000 und 23000 Gauß wurden beide Spulen benutzt. Die mit den zwei Spulen gefundenen Werte wichen weniger als $^1/_2$ Proz. voneinander ab.

Um einen Anhalt für die Gleichmäßigkeit des Magnetfeldes zu gewinnen, wurde seine Stärke mit Hilfe der kleinen Spule auch an einer Stelle gemessen, die von der Mitte 7 mm in Richtung auf die lange Polschuhkante entfernt war. Hier ergaben sich für zwei verschiedene Magnetisierungsströme Werte, die 2 bzw. $^1/_2$ Proz. kleiner waren als die Werte für die Mitte. Für die bei den Messungen des Halleffektes erreichte Genauigkeit ist diese Ungleichmäßigkeit belanglos.

B. Messung des Halleffektes. Zur Untersuchung des Halleffektes dienten die gleichen Spiegel wie zu den Leitfähigkeitsbeobachtungen. Der Grundgedanke der Messung war folgender. Zunächst wurde der zur Hallspannung gehörige Galvanometerausschlag abgelesen. Dann wurde ohne Änderung des Stromkreises ein möglichst gleicher Ausschlag durch eine bekannte Spannung erzeugt, und so die zugehörige Galvanometerempfindlichkeit bestimmt. Daraus ließ sich dann die zum ersten Ausschlag gehörige Hallspannung in Volt berechnen. Würde man die beiden Spannungen gleichzeitig gegeneinander wirken lassen, so würde diese Austauschmethode zu einer Null- (Kompensations-) Methode werden. Ihre Anwendung würde aber sehr viel mehr Zeit erfordern und daher kaum genauere Ergebnisse liefern.

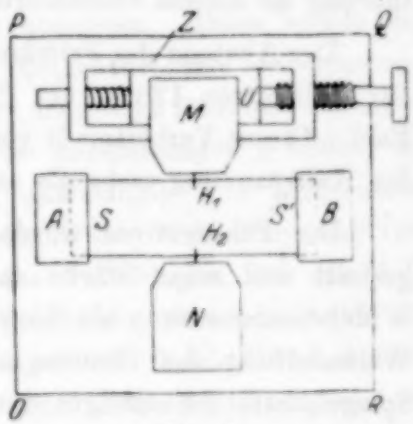


Fig. 6.

Zur Messung wurde die Spiegelplatte SS' (Fig. 6) auf die Hartgummiplatte $OPQR$ gelegt. An ihren Enden wurde mit Hilfe zweier Blechstreifen A und B der Primärstrom über die ganze Breite der Schicht zu- bzw. abgeleitet. Die Hallelektroden H_1 und H_2 bestanden aus Silberdrähten, die am Ende zu einem kleinen Haken gebogen waren, so daß sie mit ihrer Mantelfläche die Schicht berührten. Sie waren an zwei

Blechen M und N angelötet und wurden mit Hilfe von Schrauben leicht auf die Schicht gedrückt. Der eine der Blechstreifen M war an einem Schlitten U befestigt, der in einem Rahmen Z mit Hilfe von Schraube und Gegenfeder parallel zur Spiegelplatte verschiebbar war. Er wurde so eingestellt, daß die Hallelektroden ohne Magnetfeld auf der gleichen Potentiallinie lagen. Nach dieser Einstellung wurde er durch zwei Schrauben (in der Figur nicht gezeichnet) festgeklemmt. An der ganzen Vorrichtung war kein Eisen; auch die Gegenfeder bestand aus Messing.

Für die Messungen im eisenfreien Feld und am Elektromagneten war je eine besondere Hartgummiplatte mit den beschriebenen Vorrichtungen versehen worden. Bei derjenigen für den Elektromagneten bedingte der enge Raum von nur 3 mm zwischen den beiden Polschuhen einige Besonderheiten mechanischer Art. Die Platte war in der Mitte durchbrochen und in die Höhlung war ein Polschuh so eingekittet, daß seine Stirnfläche mit der Oberfläche der Hartgummiplatte in einer Ebene lag. Der Polschuh wurde jedesmal, wenn eine neue Schicht eingelegt werden sollte, vom Magnetkern abgenommen. Eine Schwalbenschwanzführung an diesem erleichterte die Wiederbefestigung.

Der Abstand der Primärelektroden betrug etwa 43 mm, der Abstand der Hallspitzen 12 mm am Elektromagneten und 14 mm im eisenfreien Feld. Dieses Verhältnis [1]) von mehr als 3 : 1 war zur vollen Ausbildung der Hallspannung mehr als ausreichend.

Der Primärstrom wurde mit Hilfe eines Schiebewiderstandes eingestellt und seine Stärke am gleichen Amperemeter, welches bei der Widerstandsmessung als Normalinstrument gedient hatte, abgelesen. Die Weiterleitung des Stromes zu der etwa 5 m vom Meßtisch entfernten Spiegelplatte SS' erfolgte durch eine verseilte Litze. Eine zweite verseilte Litze führte von den Hallelektroden über einen kleinen Widerstand von meist 0,1 Ohm zu einem Panzergalvanometer mit Widerständen zur Herabsetzung der Empfindlichkeit. Ein Strom, der den kleinen Widerstand durchfloß, prägte dem Galvanometerkreis eine bestimmte elektromotorische Kraft auf. Diese, bzw. ein Vielfaches von ihr, wurde mit einem Voltmeter gemessen, das nach jeder Beobachtungsreihe an das Amperemeter des Primärkreises angeschlossen wurde. Das Panzergalvanometer war erschütterungsfrei aufgehängt. (Kugelpanzergalvano-

[1]) Ist die Länge des Rechtecks zu klein gegen die Breite, so kommt nicht die volle Hallspannung zur Geltung, weil sie durch die Primärelektroden teilweise kurz geschlossen wird.

meter von Siemens & Halske.) Sein innerer Widerstand betrug 220 Ohm. Bei dem benutzten Skalenabstand von 1,5 m entsprach einem Ausschlag von 1 cm ein Strom von etwa 10^{-9} Amp. Es wurde mit Lichtzeiger gearbeitet. Die Ablesefehler blieben unter 1 mm.

Der Hallkreis war sehr sorgfältig isoliert (Bernstein auf geerdeten Blechen). Er hing für galvanische Ströme nur durch die beiden Hallelektroden mit der Umgebung zusammen. Die Polschuhe des Elektromagnets waren auch geerdet. Alle Erdungsbleche und Drähte waren untereinander verlötet und an die Wasserleitung angeschlossen.

Die Messungen im Feld des Elektromagneten fanden in folgender Weise statt. Nach Abgleichung des Primärstromes wurde die verschiebbare Hallelektrode so eingestellt, daß beim Schließen des Stromes höchstens ein kleiner Galvanometerausschlag entstand. Dieser wurde durch eine mit Hilfe des kleinen Widerstandes von 0,1 Ohm gegengeschaltete iw-Spannung rückgängig gemacht. Nun wurde das Magnetfeld mit einer bestimmten Stromstärke erregt, durch Kurzschließen des Vorschaltwiderstandes die Magnetisierung der Magnetkerne bis zur Sättigung gesteigert, der Kurzschluß wieder unterbrochen und die Dauereinstellung des Galvanometers beim Schließen des Primärstromes abgelesen. Dann wurde der Magnetstrom und damit das Magnetfeld umgekehrt und entsprechend verfahren, dann wieder umgekehrt und so fort, im ganzen fünf- bis siebenmal. Für jede Feldrichtung wurde das Mittel der Einstellungen gebildet; die Differenz zwischen beiden Mitteln war, unabhängig von Nullpunktsänderungen des Galvanometers und Fehlern in der Einstellung der verschiebbaren Hallelektrode, das Doppelte des Ausschlages, der zur Hallspannung gehörte. Dann wurden entsprechende Messungen für die umgekehrte Richtung des Primärstromes ausgeführt. Beide Mittel wurden zu einem Hauptmittel vereinigt. Dieses ergab sich also im allgemeinen aus 14 Messungen. Nun wurde der Primärstrom abgeschaltet und dem Galvanometerkreis eine solche bekannte Spannung aufgeprägt, daß etwa der gleiche Galvanometerausschlag entstand. Die Einstellungen für die beiden Vorzeichen der Spannung wurden abwechselnd fünf- bis siebenmal bestimmt und zu zwei Mitteln vereinigt. Dabei erwies es sich als belanglos, ob das Magnetfeld erregt war oder nicht. Der Unterschied zwischen den beiden Mitteln war der doppelte Wert des zur aufgeprägten Spannung gehörigen Ausschlages. Die Widerstände des Galvanometerkreises spielten keine Rolle, da sie in gleicher Weise den Ausschlag für die Hallspannung und denjenigen für die bekannte aufgeprägte Spannung beeinflußten.

Ein Beispiel einer solchen Messung zeigt Tabelle 10.

Tabelle 10.

Messung der Hallspannung.

Primärstrom 10 mA, Magnetfeld $H = 7000$ Gauß. Ohne Kompensationsspannung.

I. Einstellungen des Galvanometers bei der Hallspannung.

Positiver Primärstrom		Negativer Primärstrom	
$+H$	$-H$	$+H$	$-H$
10,0	32,4	31,4	9,1
10,0	32,5	31,4	9,1
10,1	32,6	31,4	9,1
10,2		31,4	
Mittel		Mittel	
10,1	32,5	31,4	9,1
Doppelausschlag: 22,4		Doppelausschlag: 22,3	

Mittel des Doppelausschlags: 22,4.

II. Einstellungen des Galvanometers bei einer Spannung $E = \frac{0{,}1}{750} \cdot 2{,}00$ Volt.

$+E$: 9,4 9,4 9,4 9,4 Mittel: 9,4

$-E$: 32,2 32,2 32,2 „ 32,2 Doppelausschlag: 22,8

Hallspannung: $\frac{0{,}1}{750} \cdot 2{,}00 \cdot \frac{22{,}4}{22{,}8} = 0{,}262$ Millivolt.

Nach jeder Meßreihe wurden die Stromquellen im Primär- und Galvanometerkreis abgeschaltet und es wurde geprüft, ob das Galvanometer für beide Richtungen des Magnetstromes die gleiche Einstellung zeigte. Das war stets der Fall. Es wirkte also weder das Magnetfeld unmittelbar auf die Galvanometernadel ein, noch trat ein Teil des Magnetstromes in die Wicklungen des Galvanometers über.

Ein Urteil über die Zuverlässigkeit der Messungen gestattet Tabelle 11. Die größte Abweichung zwischen zwei Messungen beträgt 2 Proz., sieht man von dem einen Wert der Zeile 5 ab, sogar nur 1 Proz. In anderen Meßreihen dieser Art traten ähnliche Unterschiede auf. Die Messungen im eisenfreien Feld waren erheblich unsicherer. Der Hauptgrund dafür ist, daß die sehr viel kleineren Spannungen naturgemäß schwerer zu messen sind. Innerhalb einer schnell hintereinander ausgeführten Reihe von Messungen ergab sich zwar gute Übereinstimmung, nach längerer Zeit aber, oder gar wenn die Schicht aus dem Apparate herausgenommen und wieder neu eingelegt worden war, traten erhebliche Unterschiede auf. Ich gebe daher im folgenden die Messungen im schwachen Magnetfeld nur in willkürlichen Einheiten wieder.

Tabelle 11.

Messung der Hallspannung an der gleichen Schicht.

Primärstrom 20 mA. Hallspannung in Mikrovolt für die

	Feldstärke 7000 Gauß	Feldstärke 22 160 Gauß
1.	500	538
Unveränderte Wiederholung am nächsten Tag		
2.	500	535
Schicht aus dem Apparat genommen, neu eingelegt, dabei Kontaktpolster[1]) vertauscht		
3.	500	538
Dasselbe, aber die Schicht noch in ihrer Ebene um 180° gedreht		
4.	503	538
Unveränderte Wiederholung am Nachmittag		
5.	495	535
Unveränderte Wiederholung am nächsten Tag		
6.	503	538
Schicht aus dem Apparat genommen, neu eingelegt, dabei Kontaktpolster[1]) vertauscht		
7.	505	538

C. Änderungen der Hallspannung mit der Zeit. Die Messungen der Tabelle 11 lassen keinen bestimmten Gang in den Hallspannungen erkennen, obwohl sie sich über drei Tage erstreckten. Die Ergebnisse an einem anderen Spiegel von 50 mμ Dicke bei 20 mA Primärstrom und einem Magnetfeld von 7000 Gauß bei Temperaturen von 18 bis 20° waren folgende:

29. 6.	9 Uhr 45 V	0,513 mV
29. 6.	5 „ 30 N	0,513 „
30. 6.	12 „ 10 N	0,514 „
1. 7.	10 „ 20 N	0,520 „

Die Werte steigen etwas an, die Unterschiede sind aber von der Größenordnung der Meßfehler.

Tabelle 12.

Schicht Nr.	Primärstrom mA	Magnetfeld Gauß	Hallspannung in Mikrovolt	
			Vor der Erwärmung	Nach der Erwärmung
36	10	3 080	2900	3090
	10	13 580	3530	3580
37	2	13 580	2300	2340
40	2	3 080	1920	1970
	2	13 580	2160	2200
41	20	3 080	260	263
	20	13 580	468	474

[1]) Für den Primärstrom.

Zwölfstündiges Erwärmen im Luftbad wirkte in folgender Weise auf die Hallspannung ein: Tabelle 12. Die Hallspannungen nach dem Erwärmen sind im allgemeinen größer als vorher, jedoch sind die Abweichungen sehr gering.

D. Abhängigkeit der Hallspannung vom Magnetfeld und vom Primärstrom. Für schwache Magnetfelder wuchs die Hallspannung proportional der Feldstärke. Einige Messungen dieser Art sind in Tabelle 13 wiedergegeben. Die Abweichungen zwischen den einzelnen Werten des Quotienten Hallspannung : Magnetfeld liegen innerhalb der Meßfehler

Tabelle 13.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Magnetfeld Gauß	Hallspannung Mikrovolt	Hallspannung / Magnetfeld
34	47.3	32,0	15,7	0,490
		64,0	31,2	0,488
		96,5	46,6	0,484
		136,5	66,5	0,487
		185	90,2	0,487
35	186	64,0	14,1	0,220
		128,5	27,8	0,216
		185	40,2	0,217

Tabelle 14.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Hallspannung in Mikrovolt bei einer Feldstärke von 3080 e_1	7000 e_2	13580 e_3	22160 e_4	24300 e_5	e_1/e_5	e_2/e_5	e_3/e_5	e_4/e_5
26	43,8	218	348	357	368	372	0,586	0,935	0,959	0,989
27	46,3	182.2	288	305	316	319	0,571	0,928	0,956	0,990
28	47,6	167,8	279	286	—	300	0,559	0,930	0,953	—
29	62,0	515	884	910	943	962	0,536	0,920	0,946	0,981
30	31,4	648	1024	1050	1080	1088	0,596	0,942	0,965	0,993
31	47.7	310	516	533	552	558	0,555	0,925	0,955	0,988
32	95,2	1072	1870	1952	2060	2080	0,516	0,899	0,938	0,990
33	15,8	1858	1940	1970	2008	2008	0,925	0,965	0,980	1,000
34	47,3	153,6	262	270	281	283	0,543	0,925	0,954	0,993
35	186	47.1	79.6	84,5	89,6	90,8	0,519	0,876	0,930	0,987
36	10,3	2900	3430	3530	—	3620	0,801	0,947	0,975	—
37	5,3	2020	2240	2300	—	2370	0,852	0,945	0,971	—
40	5,3	1915	2110	2160	2200	2210	0,866	0,954	0,977	0,995
41	48,5	260	453	468	487	494	0,526	0,918	0,948	0,986

Für stärkere Felder nahm die Hallspannung langsamer zu, als der Proportionalität entsprach, sie näherte sich schließlich einem Grenzwert. Tabelle 14 gibt die entsprechenden Messungen an einer Reihe von Spiegeln

wieder. Die Schichten 38 und 39 fehlen, weil die erste den elektrischen Strom nicht leitete und die zweite nur sehr ungenaue Messungen zuließ. Um festzustellen, ob die Annäherung an den Sättigungswert der Hallspannung für die verschiedenen Schichtdicken gleich schnell erfolgte, wurden die Verhältnisse der Hallspannungen für die verschiedenen Feldstärken gebildet und in die letzten vier Spalten entsprechend den Überschriften eingetragen. Es zeigt sich, daß die Sättigungswerte bei den dünneren Schichten schneller erreicht wurden als bei den dickeren, aber selbst bei den dicksten Schichten stieg die Hallspannung um weniger als 2 Proz. an, wenn die Feldstärke von 22 160 auf 24 300 Gauß erhöht wurde.

Dem Primärstrom war die Hallspannung für alle Feldstärken streng proportional. Die dünnen Schichten sind für solche Untersuchungen besonders geeignet, weil sie sehr hohe Stromdichten zulassen. Tabelle 15 enthält drei Meßreihen dieser Art. Bei den höchsten Stromwerten wurden die Schichten deutlich warm. Der Strom von 200 mA in der Schicht Nr. 33 bedeutete eine Stromdichte von 84 000 Amp. cm^{-2}, der von 100 mA in der Schicht Nr. 36 eine solche von 62 000 Amp. cm^{-2}. Die damit erzielte Hallspannung von 0,04 Volt ist so groß, daß ein einfaches Hörsaalzeigervoltmeter einen sehr deutlichen Ausschlag geben würde. Bei der Schicht Nr. 33 stimmen die Werte der letzten Spalte

Tabelle 15.

Schicht Nr.	Dicke mμ	Feldstärke Gauß	Primärstrom mA	Hallspannung Mikrovolt	Hallspannung Primärstrom
33	15,8	13 580	0,5	98,2	196,4
			1	196,3	196,3
			2,5	492	196,8
			5	990	198,0
			10	1 970	197,0
			20	3 930	196,5
			40	7 860	196,5
			100	19 740	197,4
			200	39 700	198,5
36	10,3	13 580	2	695	348
			5	1 775	355
			10	3 530	353
			20	6 830	342
			50	17 780	356
			100	35 500	355
		80	2	23,0	11,5
			5	58,5	11,7
			10	115	11,5
			20	229	11,4
			50	575	11,5
			100	1 146	11,5

bis auf fast 1 Proz. überein. Bei der Schicht Nr. 36 gehen die Abweichungen bis zu 4 Proz., wenn man von der offenbar herausfallenden vierten Zeile absieht, bis zu 3 Proz. Sie zeigen aber keinerlei Gang, sondern verteilen sich wie Beobachtungsfehler. Das Gesetz der Proportionalität zwischen Primärstrom und Hallspannung wird also durch die Messungen bis zu Stromdichten von fast 10^5 Amp. cm^{-2} mit einer Genauigkeit von etwa 2 Proz. erhärtet. Messungen ähnlicher Art habe ich fast an jeder Schicht angestellt. Stets führten sie zu dem gleichen Ergebnis.

E. Abhängigkeit der Hallspannung von der Dicke. Aus Tabelle 14 hatte sich ergeben, daß für alle untersuchten Schichtdicken die Hallspannung bei einem Magnetfeld von 24 300 Gauß ihren Sättigungswert ziemlich erreicht hat. Selbst für die dickste Schicht von 186 mμ wird man bei weiterer Steigerung des Magnetfeldes kaum auf eine Zunahme der Hallspannung von 5 Proz. rechnen können. Die bei 24 300 Gauß gemessenen Hallspannungen sind also offenbar für die verschiedenen Schichten gut untereinander vergleichbar. Ich habe sie daher den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt und in Tabelle 16 zusammengestellt. Spalte 4 enthält die auf die Einheiten von Spiegelbreite, Abstand der Hallelektroden und Primärstrom bezogenen Hallspannungen, also die Größe $\frac{b}{a} \cdot \frac{e}{i}$, wo b die Breite des Spiegels, a der Abstand der Hallelektroden, e die Hallspannung und i die Primärstromstärke bedeuten.

Tabelle 16.

1	2	3	4	5	6
Schicht Nr.	Dicke in		Hallspannung reduziert	tg α	tg α berichtigt
	mg cm^{-2}	mμ			
26	0,0386	43,8	0,047 0	0,010 46	—
27	0,0408	46,3	0,039 7	0,010 07	—
28	0,0419	47,6	0,038 2	0,009 94	0,009 54
29	0,0546	62,0	0,024 3	0,009 32	0,009 04
30	0,0276	31,4	0,069 2	0,010 72	0,010 51
31	0,0420	47,7	0,034 8	0,009 52	0,009 42
32	0,0838	95,2	0,013 00	0,008 38	0,008 34
33	0,0143	15,8*	0,248	0,011 49	0,011 49
34	0,0417	47,3	0,035 16	0,009 58	0,009 60
35	0,164	186	0,055 8	0,007 68	0,007 76
36	—	10,3*	0,450	0,013 62	0,013 76
37	—	5,3*	1,45	0,006 5	0,006 6
38	—	1,6*	—	—	—
39	—	3,2*	2,38	0,000 5	0,000 5
40	—	5,3*	1,36	0,009 1	0,009 3
41	0,0427	48,5	0,030 9	0,009 24	0,009 47

Diese Größe ist aber zur Darstellung der Beobachtungen wenig geeignet, weil sie schon im einfachsten Fall, nämlich wenn die Gleichung (3) unbeschränkte Gültigkeit hat, der Dicke umgekehrt proportional ist, also durch eine Hyperbel dargestellt wird. Die Hallkonstante R bzw. das Produkt RH

$$RH = \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{i} \cdot d$$

(Feldstärke H, Dicke d) kommt auch nicht in Frage, weil zur Berechnung die Dicke, hinsichtlich welcher Unsicherheiten bestehen, erforderlich ist.

Sehr günstig zur Darstellung der Beobachtungen ist aber die Drehung der Potentiallinien, wie sie durch Gleichung (5) definiert ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = RH\lambda = \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{i} \cdot d \cdot \frac{\lambda_f}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{i} \cdot \lambda_f,$$

wo λ_f die spezifische Flächenleitfähigkeit bedeutet. Diese Größe enthält also die Dicke nicht, sie ist also auch nicht mit deren Unsicherheiten behaftet. Bei unbeschränkter Gültigkeit der Gleichungen (1) und (3) ist sie von der Dicke unabhängig, wird also als Ordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der Dicke als Abszisse durch eine Parallele zur Abszissenachse dargestellt. In Spalte 5 der Tabelle 16 sind ihre Werte für die verschiedenen Schichten eingetragen. Ähnlich wie die spezifischen Flächenleitfähigkeiten der Tabelle 8, Spalte 8, enthalten diese Werte noch die kleine Unstimmigkeit, die dadurch verursacht ist, daß beim Herstellen der Schicht Nr. 28 der Grenzzustand der Bestäubungseinrichtung noch nicht erreicht war. Ich habe diesem Umstand hier in ähnlicher Weise Rechnung getragen wie bei den Werten der spezifischen Flächenleitfähigkeit. Spalte 6 enthält die entsprechend berichtigten Zahlen.

Fig. 7 stellt sie als Funktion der Dicke dar. Die Figur zeigt, daß die Drehung der Potentiallinien nicht konstant ist, wie es dem einfachen Gesetz entspricht, sondern daß sie mit abnehmender Dicke erst langsam und dann schneller ansteigt bis zu einem Maximum bei etwa 10 mμ und dann schnell abfällt. Dem Maximum und dem Abfall wage ich vorläufig nicht Bedeutung beizumessen, mit Rücksicht auf die hier verhältnismäßig großen Beobachtungsfehler und die Unsicherheiten, welche die Leitfähigkeitsmessungen bei den dünnsten Schichten vermuten ließen. Ein Teil des Anstiegs ist offenbar dem Umstand zuzuschreiben, daß bei der benutzten magnetischen Feldstärke die Hallspannung bei den dünneren Schichten in höherem Maße gesättigt war als bei den dickeren. Ich halte es aber für ausgeschlossen, den gesamten Anstieg von 0,007 76 bei

186 mμ auf 0,0115 bei 16 mμ, das sind 50 Proz., auf diese Weise zu erklären. Als Grenzwert für sehr dicke Schichten ergibt die Kurve etwa 0,007.

Der Sinn der Drehung der Potentiallinien war bei allen Schichten entgegen dem Umlaufssinn des das Magnetfeld erzeugenden Stromes.

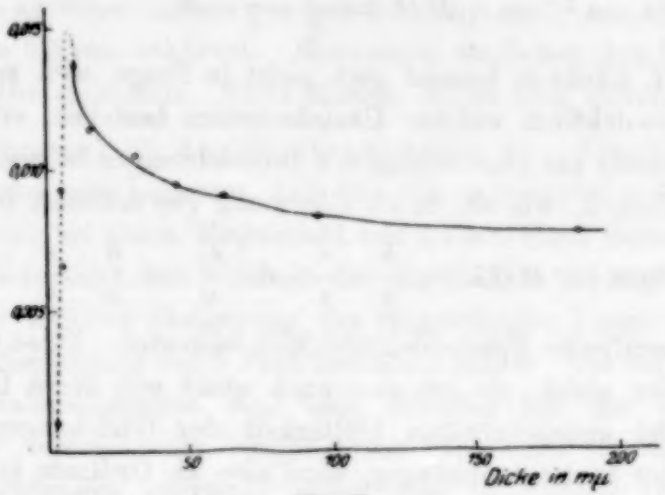


Fig. 7.

Der Halleffekt in dünnen Nickelschichten ist also negativ wie im Nickel üblicher Form.

VI. Zusammenfassung.

Durch Kathodenzerstäubung in strömendem Wasserstoff ist es möglich, Nickelschichten von vorgegebener Dicke mit einer Genauigkeit von etwa 1 mμ herzustellen.

Schon bei einer mittleren Schichtdicke von höchstens 3 mμ bildet ein in dieser Weise auf Glas niedergeschlagener Nickelbelag eine zusammenhängende, die Elektrizität leitende Schicht.

Das Gesetz, daß die elektrische Leitfähigkeit proportional dem Querschnitt ist, gilt für Nickel solcher Schichten bis zu den kleinsten Dicken mit einer Unsicherheit in der Dicke von höchstens 12 mμ. Es ist wahrscheinlich, daß die beobachteten (innerhalb der angegebenen Grenze liegenden) Abweichungen mindestens teilweise in Nebenerscheinungen und nicht im Wesen der metallischen Leitung ihre Ursache haben.

Der Halleffekt in solchen Schichten ist in schwachen Magnetfeldern (kleiner als 200 Gauß) der Feldstärke proportional, in starken nähert er sich einem Grenzwert. Dem Primärstrom ist er bis zu Stromdichten von fast 10^5 Amp. cm^{-2} mit einer Genauigkeit von mindestens 2 Proz. proportional.

Die Drehung der Potentiallinien für eine in der Nähe des Sättigungsgebietes liegende Feldstärke wächst mit abnehmender Dicke bis zu 15 mμ hinab. Das Vorzeichen des Effektes ist negativ.

Für die vorliegende Untersuchung wurde mir von der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft ein Präzisionsmilliamperemeter mit Vorschalt- und Nebenschlußwiderständen zur Verfügung gestellt. Herr Professor Dr. Gaede überließ mir in sehr entgegenkommender Weise aus seiner Privatsammlung einen Hochspannungsumformer, eine rotierende Quecksilberpumpe und eine Reihe von einfacheren Hilfsmitteln. Auch an dieser Stelle möchte ich für die mir zuteil gewordenen Unterstützungen meinen verbindlichsten Dank sagen.

Physikalisches Institut der Techn. Hochschule Karlsruhe.

Über das β-Strahlenspektrum von ThB + C.

Von **Werner Pohlmeyer** in Berlin-Zehlendorf.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 13. August 1924.)

Das β-Strahlenspektrum von ThB + C wird im Magnetfeld nach der Ionisationsmethode aufgenommen. In der Kurve der Intensitätsverteilung entsprechen den stärkeren homogenen Gruppen scharfe Maxima, aber auch schwächere Gruppen machen sich im Verlauf der Kurve bemerkbar. Es werden die verschiedenen Ursachen für das Auftreten eines kontinuierlichen Untergrundes teils direkt experimentell geprüft, teils aus schon vorliegenden Experimenten diskutiert. Es ergibt sich hierbei, daß das kontinuierliche Spektrum sekundären Einflüssen zuzuschreiben ist und der primäre Zerfallsvorgang in der Emission eines β-Teilchens mit definierter Geschwindigkeit besteht.

Die magnetischen Spektra radioaktiver β-Strahler sind in erster Linie nach der photographischen Methode in einem konstanten Magnetfeld untersucht worden[1]). Diese Methode gibt keinen sicheren Aufschluß über die Intensitätsverteilung innerhalb des Spektrums, sie gestattet nicht, die verschiedenen β-Strahlgruppen hinsichtlich der Anzahl der in ihnen emittierten Elektronen zu vergleichen, denn der Schwärzungsgrad der Linien auf der Platte hängt nicht nur von der Zahl der auftreffenden Elektronen, sondern auch von ihrer Geschwindigkeit in sehr hohem Maße ab. J. Chadwick untersuchte daher das Spektrum von RaB + C nach der Geigerschen Zählmethode in einem schrittweise veränderlichen Magnetfelde und kontrollierte seine Ergebnisse auch nach der Ionisationsmethode[2]). Aus dem Verlauf seiner Kurven zog er die Folgerung, „daß die β-Strahlung ein kontinuierliches Spektrum ergibt, das von einem Linienspektrum von relativ sehr geringer Intensität überlagert ist". Nur im Bereich der langsamen Strahlen soll es einige stärkere homogene Gruppen geben. Daß die Linien der schwächeren Gruppen auf der photographischen Platte deutlich zu sehen sind, erklärte Chadwick durch die hohe Empfindlichkeit der Platte gegen geringe Intensitätsunterschiede.

Auf Grund der Chadwickschen Messungen schloß Rutherford[3]), daß alle β-Strahler ein kontinuierliches Spektrum besitzen, wobei es unentschieden schien, ob diese Inhomogenität primären oder sekundären Ursprungs ist. C. D. Ellis[4]) knüpfte an diese Rutherfordschen Über-

[1]) Zusammenfassende Berichte: O. v. Baeyer, Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik **11**, 66, 1914.

[2]) J. Chadwick, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 383, 1914.

[3]) E. Rutherford, Phil. Mag. **24**, 453, 893, 1912.

[4]) C. D. Ellis, Proc. Roy. Soc. (A) **101**, 1, 1922.

legungen an und kam zu dem Schluß, daß die primären β-Strahlen beim Austritt aus dem Kern keine definierte Geschwindigkeit besitzen, sondern kontinuierlich verteilte Geschwindigkeiten haben, die nur innerhalb gewisser Grenzen liegen sollen. Da im Gegensatz dazu von anderer Seite [1]) die Ansicht vertreten worden war, daß die primären β-Strahlen den Kern analog den α-Strahlen mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit verlassen und die Verwaschung erst nachträglich durch sekundäre Einflüsse zustande komme, schien es angebracht, die Ergebnisse von Chadwick an einer anderen radioaktiven Substanz nachzuprüfen.

Auf Veranlassung von Fräulein Prof. L. Meitner wurden die vorliegenden Versuche durchgeführt, und zwar wurde die Ionisationsmethode verwendet, da Zweifel bestehen, ob die Zählmethode im Bereiche der schnellen β-Strahlen richtige Resultate zu liefern vermag. Denn bei dem notwendig verwendeten kleinen Abstand (etwa 2 mm) zwischen der Spitze und der Gefäßwand des Zählers kann der Fall eintreten, daß schnelle Strahlen auf dem kurzen Wege nicht mehr genug Ionen bilden, um eine Entladung auszulösen. Ebenso werden die schnellen Strahlen in kleinen Ionisierungsgefäßen nur sehr geringe Wirkungen ausüben können. Daher wurde mit einer Ionisationskammer von größeren Dimensionen als die von Chadwick gearbeitet. Im übrigen ist die Anordnung im wesentlichen dieselbe wie bei Chadwick.

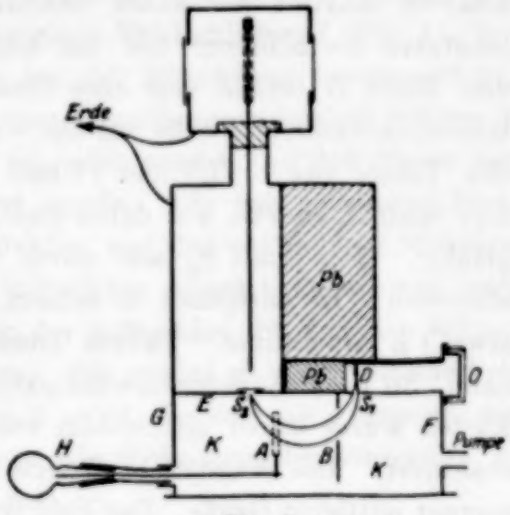


Fig. 1.

Die benutzte Apparatur ist in der Fig. 1 dargestellt. Die Kanten des Messingkastens K waren 6, 7 und 14 cm lang. Die Maße wurden so groß gewählt, damit die an den Wänden entstehenden sekundären Strahlen nur eine geringe Wirkung hervorrufen. Zum weiteren Schutz gegen diese Strahlen wurden alle Metallflächen im Innern mit Karton von 1 mm Stärke ausgekleidet. Der aktive Draht D war auf einem kleinen Schlitten eingeklemmt, der auf zwei Führungen mit einiger Reibung beweglich war. Er wurde durch die verschraubbare Öffnung O

[1]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **9**, 131, 1922; **11**, 35, 1922.

eingeführt. Durch einen Anschlag war dafür gesorgt, daß er sich stets genau über dem Spalt S_1 befand, zu dem er parallel war. Sein Abstand vom Spalt betrug 1 cm. Dieser war aus einem Bleiblech geschnitten, seine Größe betrug 3 . 10 mm. Die von D ausgehenden Strahlen wurden durch das dem Spalt parallel gerichtete Magnetfeld zu Kreisen gebogen. Die durch S_1 hindurchgehenden Kreisbahnen von gleichem Radius schneiden sich in der Ebene E; in dieser befand sich ein zweiter Spalt S_2 (2 . 10 mm), parallel zu dem ersten und etwa 56 mm von ihm entfernt. Bei richtiger Zentrierung des Apparats konnten, abgesehen von der Sekundärstrahlung, nur diejenigen β-Teilchen homogener Geschwindigkeit, deren Wege sich bei S_2 schnitten, in die darüber befindliche Ionisationskammer eintreten. Daß der Apparat diese Aufgabe erfüllte, zeigen die scharfen Maxima der unten beschriebenen Kurve. Die Bleiklötze Pb schützten die Kammer und das Elektroskop gegen die γ-Strahlen. In dem Blech B befand sich eine Blende von der Größe 12 . 16 mm. Die Ionisationskammer wurde auf die Wand E aufgesetzt; ihre Kanten hatten eine Länge von 6, 5,5 und 11 cm. Die Elektrode, die etwa 1 cm über dem Spalt S_2 endete, war durch eine Bernsteinisolation in das Elektroskop geführt. Der Spalt S_2 war durch ein Glimmerblättchen luftdicht verschlossen. Es entsprach in seinem Absorptionsvermögen für α-Strahlen etwa 1 μ Aluminium. Daraus konnte man schließen, daß es β-Strahlen unter 30 Proz. Lichtgeschwindigkeit nicht mehr austreten ließ. Der Kasten wurde durch ein System von Volmerpumpen auf $5 . 10^{-4}$ mm Hg evakuiert. Das Magnetfeld lieferte ein Du-Boisscher Halbringelektromagnet mittlerer Größe. Das Feld wurde mittels einer kleinen Induktionsspule auf Homogenität geprüft und durch Vergleich mit dem bekannten Feld einer von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichten Spule bestimmt. Es war, abgesehen von geringen Abweichungen bei kleinen Feldstärken, der Stromstärke proportional. Als Strahlungsquelle diente Th B im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten Th C + C′ + C″. Das aktive Präparat war auf einem Phosphorbronzedraht von 0,5 mm Stärke und etwa 10 mm Länge nach dem Rückstoßverfahren niedergeschlagen. Die Aktivität entsprach etwa 1 mg Radiummetall.

Die Ionisation wurde in der üblichen Weise in willkürlichen Einheiten gemessen, und zwar zunächst ohne Erregung des Feldes. Sie stellte so die Wirkung der γ-Strahlen dar, die trotz des Bleischutzes in die Kammer drangen. Dann wurde der Strom des Magnets eingeschaltet und die Ionisation wiederholt bestimmt, wobei nach jeder Messung das Feld um ungefähr 1 Proz. des jeweiligen Wertes gesteigert wurde, so

daß das Spektrum gleichsam an dem Eintrittsspalt der Ionisationskammer vorbeiwanderte.

Die Ionisation nach Erregung des Feldes ist auf drei Ursachen zurückzuführen. Es wirken

1. die γ-Strahlen,

2. diejenige Gruppe von β-Strahlen homogener Geschwindigkeit, die bei dem gerade vorhandenen Felde in die Kammer gelangen, also gemessen werden sollen und die im folgenden als direkte Strahlen bezeichnet werden,

3. sekundär erzeugte Strahlen, die durch die oben beschriebenen Schutzeinrichtungen nicht vollständig beseitigt werden konnten.

Die von den sekundären Strahlen herrührende Ionisation wurde anfänglich nach demselben Verfahren bestimmt, wie es von Chadwick angegeben worden ist. Durch Drehen eines Hohlschliffes H (Fig. 1), der an der Wand G des Kastens, etwas aus der Mittelebene herausgerückt, angebracht war, konnte der an einer Aluminiumstange befestigte Schirm A in den Gang der direkten Strahlen gebracht werden, so daß diesen der Weg zur Ionisationskammer versperrt wurde. Die nun gemessene Ionisation rührte nur noch von den γ-Strahlen und den sekundären Strahlen her. Da die Ionisation durch die γ-Strahlen schon bekannt war, gab die Differenz dieser Messung und der der γ-Strahlen die von den sekundären Strahlen herrührende Ionisation. Sie erwies sich als veränderlich mit der Feldstärke, wie es die Fig. 2 zeigt, in der als Abszissen die Stromstärken des Magnets in Ampere, als Ordinaten die Ionisation in willkürlichen Einheiten aufgetragen sind.

Beim Fortschreiten der Messungen entstanden jedoch Bedenken, ob auf diese Weise die sekundäre Strahlung vollständig erfaßt würde. Es erschien nicht ausgeschlossen, daß durch den Schirm außer der direkten Strahlung auch ein Teil der sekundären am Eintritt in die Kammer gehindert würde. Um hierüber Aufklärung zu erhalten, wurde der unter dem Präparat befindliche Spalt S_1 durch eine 3 mm starke Aluminiumplatte verschlossen und nunmehr die sekundäre Strahlung, die jetzt freilich nur von den γ-Strahlen des Präparats ausgelöst wurde, für jede Feldstärke zweimal gemessen. Bei der ersten von diesen Messungen befand sich der Schirm in der Grundstellung, die er einnahm, wenn die direkte Strahlung bestimmt wurde; vor der zweiten wurde er in die Sperrstellung gedreht. Die Fig. 3 gibt das Ergebnis dieser Messungen. Die Kurve A stellt die Ionisation der sekundären Strahlung bei freier, die Kurve B bei g sperrter Bahn dar. Die Annahme, daß der Schirm

in der Sperrstellung neben der direkten auch einen Teil der sekundären Strahlung fortnahm, wurde wenigstens für die größeren Feldstärken bestätigt. Der Vergleich dieser Kurven mit der in der Fig. 2 zeigt übrigens, daß die sekundäre Strahlung in erster Linie durch die γ-Strahlen erzeugt wird. Gleichwohl könnte auch die durch die Kurve *A* der Fig. 3 wiedergegebene Nebenwirkung noch nicht die gesamte Sekundärstrahlung darstellen, falls nämlich durch die direkten β-Strahlen gerade in der Nähe des Spaltes S_2 sekundäre Strahlen ausgelöst würden, die bei den soeben beschriebenen Versuchen infolge der Ausschaltung der direkten Strahlen gar nicht entstehen konnten.

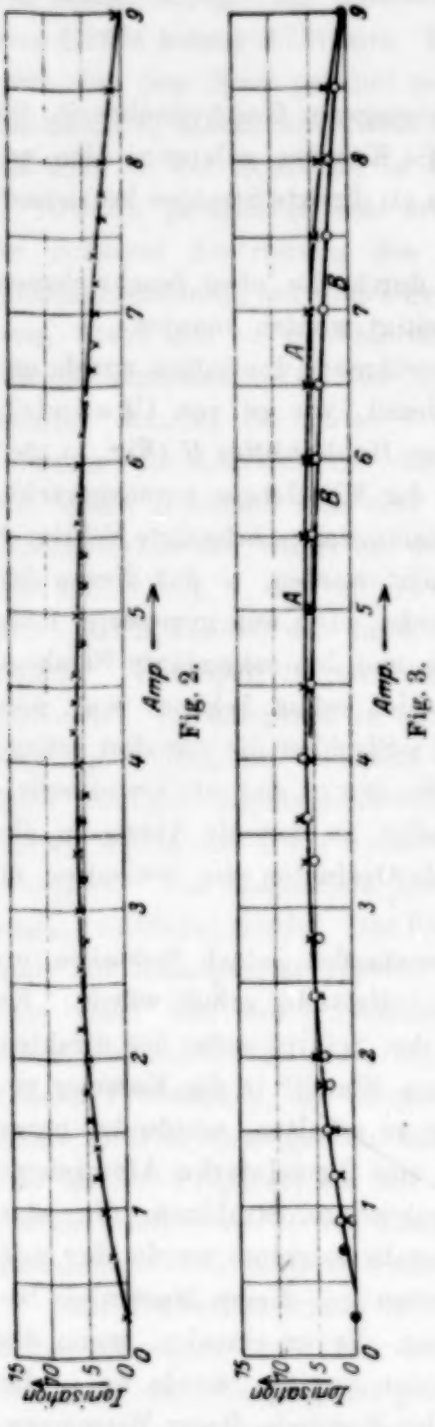


Fig. 2. Fig. 3.

Das Verhältnis der drei Wirkungen war davon abhängig, welche Stelle des Spektrums gemessen wurde. An der Stelle größter Intensität kamen 28 Proz. der ganzen Ionisation auf die γ-Strahlung, 2 Proz. auf die sekundären Strahlen, 70 Proz. auf die direkten β-Strahlen. Je schwächer mit wachsendem $H\,.\,\varrho$ die gemessene Intensität des Spektrums wurde, desto mehr änderte sich das Verhältnis zuungunsten der direkten Strahlen. In der Gegend $H\,.\,\varrho = 2400$ war es das folgende:

γ-Strahlen	73 Proz.
direkte β-Strahlen . .	22 „
sekundäre β-Strahlen .	5 „

Dies brachte den Nachteil mit sich, daß der Fehler, den die Messung der direkten Strahlen enthält, im Verhältnis zum gemessenen Effekt sich vergrößerte. Bei Chadwicks Versuchen war das Verhältnis für die Gebiete geringer Intensität ungefähr das gleiche. Die γ-Strahlen störten bei ihm etwas weniger, da sie nur in der sehr kleinen Ionisationskammer ionisierten,

während ihr Einfluß im Elektroskop durch Evakuieren desselben herabgesetzt wurde. Da hier aber die Kammer absichtlich erheblich größer gewählt war, wodurch nicht nur der einzelne γ-Strahl größere Ionisationswirkung ausübte, sondern auch ein größerer Bruchteil der nach allen Seiten ausgehenden γ-Strahlen mitgemessen wurde, mußte die Störung mit in Kauf genommen werden. Auf ein Evakuieren des Elektroskops wurde verzichtet, da die in ihm entstehende Ionisation gering war gegen die in der Kammer erzeugte.

Die Intensität des Spektrums als Funktion von $H\,.\,\varrho$ ergab sich demnach dadurch, daß von der gesamten Ionisation die der Sekundärstrahlung nach der Kurve A der Fig. 3 zuzuschreibende Ionisation und die der γ-Strahlung in Abzug gebracht wurde.

Bei dem großen Spektralbereich, über den gemessen werden mußte, war es natürlich nicht möglich, die ganze Kurve mit einem einzigen Präparat aufzunehmen. Da die Aktivität bei verschiedenen Präparaten nicht genau dieselbe war, mußten die Werte der einzelnen Messungsreihen aufeinander umgerechnet werden. Um einen genauen Anschluß zu erhalten, wurden bei Beginn jeder neuen Reihe die letzten fünf bis sechs Messungen des vorhergehenden Tages wiederholt. Damit war das Verhältnis der Intensitäten an derselben Stelle des Spektrums für die anschließenden Messungen bekannt, und alle Messungsreihen konnten auf eine von ihnen bezogen werden.

Das Ergebnis der Messungen wird durch die Kurve der Fig. 4 dargestellt. Wurde der Strom langsam von Null an gesteigert, so behielt die Ionisation zunächst den Wert, den sie ohne Erregung des Feldes besaß. Etwa vorhandene β-Strahlen, die bei diesen kleinen Feldstärken in die Ionisationskammer gelangen müßten, würden eine zu geringe Energie besitzen, als daß sie den die Kammer abschließenden Glimmer durchdringen könnten. Erst bei 0,6 Amp. zeigte eine Zunahme der Ionisation den Eintritt von β-Strahlen in die Kammer an. Beim weiteren Steigen des Stromes stieg die Intensität schnell an, bei 1,47 und 1,88 Amp. besaß sie zwei große Maximalwerte, außerdem an anderen Stellen einige kleine Maxima. Zwischen 2,4 und 4,8 Amp. blieb die Intensität fast konstant, dann nahm sie langsam ab, bis bei 8 Amp. nur noch die Ionisation durch die sekundären und die γ-Strahlen gemessen wurde.

Bevor auf die Einzelheiten der Meßresultate eingegangen wird, seien kurz die nach der photographischen Methode erhaltenen Befunde erwähnt. Die photographische Aufnahme des Spektrums von ThB läßt fünf Linien

erkennen[1]). Die stärkste von ihnen ist durch $H \cdot \varrho = 1385$ definiert, die nach dem Grade der Schwärzung an zweiter Stelle stehende Linie gehört zu $H\varrho = 1750$. Diesen beiden Strahlengruppen sind die Maxima bei 1,47 und 1,88 Amp. zuzuordnen (Fig. 4, *A* und *B*). Die entsprechenden Feldstärken betrugen nämlich 488 und 620 Gauß, so daß man aus den beiden Werten von $H \cdot \varrho$ für den Radius der Bahn die Werte $\varrho = 2{,}84$ cm bzw. $\varrho = 2{,}82$ cm erhält, die miteinander und mit dem aus den Dimensionen des Apparats sich ergebenden Wert in guter Übereinstimmung stehen. Mit diesen beiden Linien wurde das Feld endgültig geeicht. (Skale der Werte von $H \cdot \varrho$ in der Fig. 4.) Die Lage der starken Gruppe $H \cdot \varrho = 1385$ wurde vor jeder Messungsreihe kontrolliert. In die Fig. 4 wurden nunmehr die photographisch auf-

[1]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **11**, 35, 1922.

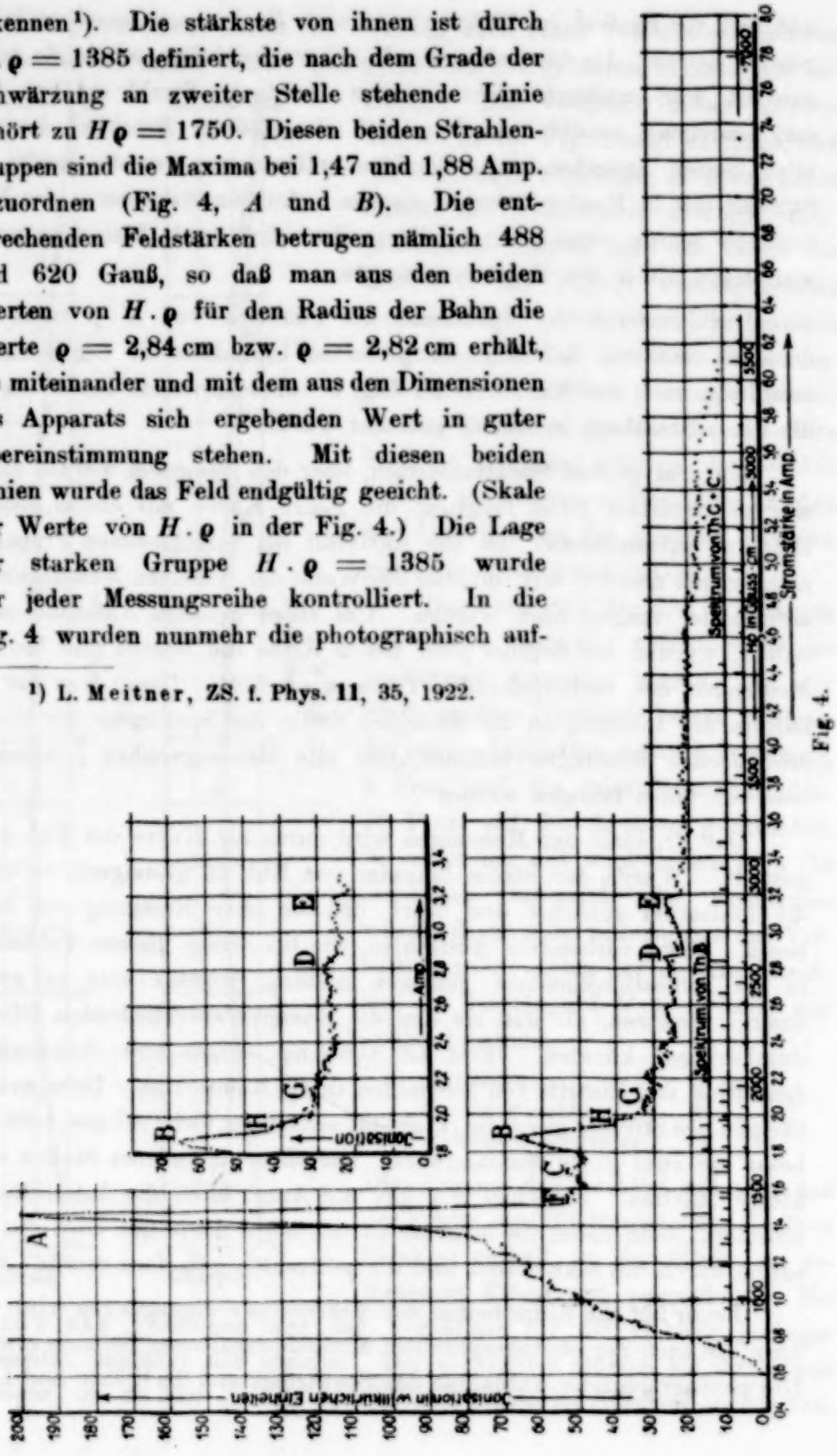


Fig. 4.

genommenen Spektra von ThB und ThC + C″ schematisch eingetragen; für das Spektrum von ThB wurden die letzten Messungen von L. Meitner[1]), für das von ThC + C″ die von C. D. Ellis[2]) benutzt. Die Länge der einzelnen Linien entspricht der von den beiden Autoren angegebenen Stärke der Linien auf der Platte.

Starke homogene Gruppen läßt die Kurve bei $H\varrho = 1385$ und $H\varrho = 1750$ erkennen (Fig. 4, *A* und *B*). Im ersten Falle zeigt sich eine Zunahme auf das 2,5 fache der bei etwas kleineren Werten von $H.\varrho$ gemessenen Intensität. Nach dem Überschreiten des Maximums geht die Intensität auf den vierten Teil herab. Für $H\varrho = 1750$ beträgt die Zunahme 40 Proz., auch hier fällt die Intensität nach dem Maximum schnell auf die Hälfte. Auch den starken Linien des ThC + C″, die bei $H\varrho = 1584$, 2610 und 2896 liegen, entsprechen deutliche Erhebungen der Kurve (Fig. 4, *C*, *D*, *E*). Nach den photographischen Aufnahmen von ThB + C + C″ sind diese Gruppen im Vergleich mit den starken Gruppen von ThB als schwach anzusprechen. Dementsprechend sind die zugehörigen Maxima viel kleiner; sie ließen sich jedoch sicher reproduzieren. Die Fig. 4a stellt das Ergebnis einer Kontrollmessung dar. Man sieht in beiden Kurven bei 2,86 Amp. (*D*) und 3,18 Amp. (*E*) den schnellen Abfall der Intensität nach Überschreitung der in flachem Anstieg erreichten Maximalwerte.

Noch an anderen Stellen ist ein Einfluß von Strahlengruppen des ThC + C″ zu erkennen, so zwischen 1,5 und 1,6 Amp. (*F*), wo die Gruppen $H\varrho = 1456$ und 1482, bei 2,1 Amp. (*G*), wo die Gruppen $H\varrho = 1919$ und 1973, vielleicht auch bei 1,95 Amp. (*H*), wo eine Gruppe des ThB und mehrere des ThC + C″ in die Kammer eintreten. Auf Zufälligkeiten der einzelnen Messung ist der Kurvenverlauf an diesen Stellen nicht zurückzuführen. Die fraglichen Gebiete sind wiederholt aufgenommen worden, nicht nur mit dem oben beschriebenen, sondern auch bei vorbereitenden Messungen mit einem anderen Apparat von kleineren Dimensionen und kleinerer Ionisationskammer. Die Kurve zeigte im wesentlichen dieselbe Gestalt, wie sie die in Fig. 4 wiedergegebenen endgültigen Messungen ergaben.

Der Vergleich dieser Messungen mit den endgültigen macht es wahrscheinlich, daß bis zu $H\varrho = 2000$ das Intensitätsverhältnis richtig wiedergegeben wird. Da nämlich der Wert desselben für entsprechende

---

[1]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **11**, 35, 1922.
[2]) C. D. Ellis, Proc. Roy. Soc. (A) **101**, 1, 1922.

Stellen bei der Verwendung der kleineren Kammer derselbe ist wie bei der Messung mit der größeren, so dürfte die ionisierende Wirkung dieser Strahlen in beiden Kammern noch voll ausgenutzt worden sein. Ob die Kurve dagegen die Intensität der schnellen im Vergleich zu den langsamen Strahlen richtig wiedergibt, erscheint sehr zweifelhaft; denn die schnellen Strahlen werden auch in der größeren Kammer nur zu einem kleinen Teil ausgenutzt, da sie immerhin noch klein ist gegenüber den Ionisationsgefäßen, in denen sonst β-Strahlen gemessen werden.

Vergleicht man unsere Kurve mit den Kurven von Chadwick für Ra B + C, so findet man eine Übereinstimmung darin, daß starke homogene Gruppen nur im Bereich der langsamen Strahlen auftreten. Zwei wesentliche Merkmale unterscheiden jedoch unsere Ergebnisse von denen Chadwicks. Erstens gelangen in unserer Kurve nicht nur starke, sondern auch schwächere Gruppen zum Ausdruck, zweitens erheben sich die großen Maxima über einem relativ schwachen Untergrund, während bei Chadwick die maximalen Intensitäten die ihrer näheren Umgebung um höchstens 60 Proz. übertreffen. Dementsprechend ist die Bedeutung, die wir dem kontinuierlichen Untergrund zuschreiben, eine andere.

Es läßt sich zunächst zeigen, daß eine ganz beträchtliche Verbreiterung der Linien und damit Verwischung einander nahe liegender Linien zu einem kontinuierlichen Untergrund durch die Versuchsanordnung bedingt ist. Das Auflösungsvermögen des Apparats hängt hauptsächlich von der Breite des Spaltes im Boden der Ionisationskammer relativ zum Krümmungsradius der Strahlen ab. Je enger er ist, desto besser ist die Auflösung. Denkt man sich in der Fig. 1 statt der Wand E des Kastens eine photographische Platte, so würden, wie eine einfache geometrische Untersuchung zeigt, die Strahlen einer homogenen Gruppe an der Stelle des Spaltes S_2 eine Linie von etwa 0,7 mm Breite erzeugen. Gäbe man dem Spalt S_2 dieselbe Breite, so würde die von den β-Strahlen herrührende Ionisation sehr klein werden, und da sie durch Differenzbildung bestimmt werden muß, würde der prozentuale Fehler jeder einzelnen Messung sehr groß sein. Bei den vorliegenden Messungen war die Spaltbreite dieselbe wie bei Chadwicks Versuchen, nämlich 2 mm. Sie betrug also ungefähr 3,6 Proz. des Abstandes der beiden Spalte S_1 und S_2. Liegen nun zwei homogene Gruppen so eng beieinander, daß die bei S_2 entstehenden Schnittpunkte ihrer Bahnen um weniger als 3,6 Proz. des Spaltabstandes differieren, so können beide Gruppen gleichzeitig in die Kammer gelangen. Da ferner die Durchmesser ihrer Bahnen nur wenig größer sind als der Spaltabstand und gegen die Ebene

der beiden Spalte nur schwach geneigt sind, so werden sie sich und damit auch die Radien nur um einen wenig kleineren Prozentsatz unterscheiden. Dasselbe gilt dann von den zugehörigen Werten von $H\,.\,\varrho$. Es ergibt sich also, daß Gruppen, deren $H\,.\,\varrho$-Werte um weniger als 3,5 Proz. voneinander abweichen, nicht mehr getrennt werden können.

Eine weitere Verminderung des Auflösungsvermögens wird dadurch hervorgerufen, daß die Strahlenquelle sowohl wie der Spalt S_2 eine nicht unbeträchtliche Längsausdehnung haben, so daß die durch den Blendenspalt S_1 austretenden Strahlen unter verschiedenen Winkeln zum magnetischen Feld verlaufen. Es ist leicht einzusehen, daß β-Teilchen, die schräg zum Feld verlaufen, eine Schraubenbahn beschreiben, derart, daß sie besonders an den Enden des Spaltes S_2 schon bei kleineren Feldstärken in die Kammer treten als die senkrecht auf den Spalt treffenden Strahlen gleicher Geschwindigkeit. Sie veranlassen daher eine Verwaschung der Maxima nach der Richtung der kleineren Werte von $H\varrho$. Die Kurve zeigt deutlich den Einfluß dieser Strahlen, da fast bei allen Erhebungen der Anstieg flacher ist als der Abfall.

Es ist klar, daß unter diesen Umständen eine sorgfältige Zentrierung der Versuchsanordnung die Vorbedingung dafür ist, daß man die den schwächeren Gruppen zugehörigen Maxima erhält. Es wurden daher Versuche angestellt, ob man durch Verwendung von sehr dünnen oder sehr kurzen Drähten als Strahlungsquellen die Zentrierung verbessern könnte. Als Maß für die Güte der Zentrierung diente dabei das Verhältnis der bei $H\,.\,\varrho = 1385$ gemessenen maximalen Intensität der β-Strahlen zu der gesamten Ionisation an dieser Stelle. Es gelang jedoch nicht, durch Verringerung der Dimensionen der Strahlungsquelle die Ausbeute an maximaler β-Strahlintensität merkbar zu erhöhen oder das Maximum noch schärfer herauszubringen. Dagegen zeigte sich eine erhebliche Abnahme und zugleich eine Verwaschung des Maximums nach der Seite der kleineren Geschwindigkeiten, wenn man den Draht so einsetzte, daß das stärker aktive Ende etwas mehr als sonst aus der Mittelebene des Kastens herausgerückt war. Bei dieser Stellung wurde die Zahl der schräg zum Feld verlaufenden Strahlen stark vermehrt. Die Breite der Linie $H\,.\,\varrho = 1385$ wurde dabei an der Stelle, an der die Intensität zwei Drittel der maximalen betrug, um 80 Proz. größer als im normalen Falle.

Nach allem Gesagten ist es klar, daß die gewählte Anordnung β-Strahlgruppen, deren $H\,.\,\varrho$-Werte sich um weniger als 3 Proz. unter-

scheiden, sicher nicht mehr zu trennen gestattet. Um so weniger können daher die zahlreichen schnellen Linien von ThC'' und RaC getrennt werden, deren $H.\varrho$-Werte sich um weniger als 1 Proz. unterscheiden. Und da die Chadwicksche Anordnung nicht günstiger als die hier verwendete war, konnte auch er die schnellen RaC-Linien nicht nachweisen.

Es treten aber auch außerdem noch direkte sekundäre Verwaschungen der Linien ein. Zunächst ist zu berücksichtigen, daß die von der drahtförmigen Strahlenquelle austretenden β-Strahlen im Draht selbst Geschwindigkeitsverluste erlitten haben können. Sie stammen ja nicht nur von der Unterseite, sondern auch von der Oberseite des Drahtes; sie müssen also je nach ihrem Ausgangspunkt verschiedene Schichten des Drahtes durchlaufen und verlieren dabei mehr oder weniger ihrer ursprünglichen Energie. Das trifft besonders für die schnellen Strahlen zu, die vermöge ihrer größeren Energie den Draht durchdringen können und so bereits beim Verlassen der Strahlenquelle nicht mehr vollständig homogen sind.

Die schnellen β-Strahlen werden ihre ursprüngliche Homogenität aber noch aus einem anderen Grunde verlieren, der nicht mit der Versuchsanordnung, sondern mit sekundären Vorgängen in den strahlenden Atomen selbst zusammenhängt. Die β-Strahlen werden nämlich, wie von L. Meitner ausführlich begründet worden ist[1]), aus der Elektronenhülle des eigenen Atoms Elektronen ablösen, so wie es bei der Anregung von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen geschieht. Da die Strahlen hierbei je nach den zufälligen Stoßbedingungen ganz verschiedene Energiebeträge abgeben, so besitzen sie, auch wenn sie ursprünglich einer Gruppe von ganz bestimmter Energie angehörten, nach dem Austritt aus dem Atom nicht mehr alle die gleiche Geschwindigkeit.

Nach alledem muß sich der Einfluß einer bestimmten Gruppe in einem gewissen Bereich der Veränderlichen $H.\varrho$ geltend machen. Ein Maß für diesen Bereich liefert der Verlauf der Kurve in der Umgebung des großen Maximums bei 1,47 Amp. Der Anstieg der Intensität bei 1,36 Amp. ist zweifellos schon der Gruppe $H\varrho = 1385$ zuzuschreiben, der Abfall ist bei 1,52 Amp. noch nicht beendet, das Gebiet des Maximums erstreckt sich also über Werte von $H.\varrho$ zwischen 1290 und 1430, d. h. über 10 Proz. des der Gruppe zugehörenden Wertes von $H\varrho$. Hiervon kommen 7 Proz. auf den Anstieg, 3 Proz. auf den Abfall. Nun liegen

[1]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **11**, 35, 1922.

aber, wie das Bild der Linienspektra zeigt, die einzelnen Gruppen so dicht beieinander, daß ihre Wirkungsbereiche sich teilweise überdecken. Daher werden sich die Erhebungen der Kurve, die durch benachbarte Gruppen hervorgerufen werden, überlagern und so den kontinuierlichen Untergrund entstehen lassen, über den sich deutliche Maxima nur dann erheben werden, wenn die Intensität der betreffenden Gruppen sich von der der benachbarten beträchtlich unterscheidet. Nur so ist es zu verstehen, daß der Untergrund zwischen den beiden großen Spitzen die doppelte Intensität zeigt als für größere Werte von $H\varrho$. In diesem Bereich findet sich eine große Anzahl dicht benachbarter Gruppen, deren Wirkungen sich addieren. Ein etwas größerer von homogenen Gruppen freier Bereich liegt zwischen $H \cdot \varrho = 2000$ und 2300. Dort aber zeigt die Kurve einen deutlichen Abfall der Intensität.

Die schnellste von Ellis angegebene Gruppe gehört zu $H \cdot \varrho = 4030$. Darüber hinaus hatten früher schon v. Baeyer, Hahn und Meitner β-Strahlgruppen festgestellt, die Ellis nicht gefunden hat[1]). L. Meitner konnte nun zeigen[2]), daß diese Gruppen photographisch als ein nach der Seite der schnellen Strahlen scharf begrenztes Band nachweisbar sind, wenn man das Spektrum nach der ursprünglichen von Rutherford zuerst angewandten Methode aufnimmt, daß sie sich jedoch der Beobachtung bei Anwendung der Danyszschen Versuchsanordnung entziehen, da bei ihr das Band weit auseinandergezogen und damit die Schwärzung der Platte stark herabgesetzt wird. Diese Gruppe liegt zwischen $H\varrho = 5600$ und 6200. Unsere Kurve zeigt in diesem Gebiet eine langsam abnehmende Intensität an. Sie erreicht die Abszissenachse erst bei 8 Amp., doch sind die zuletzt gemessenen Intensitäten schon so klein, daß die Korrektur auf die γ- und sekundären Strahlen, vermittelst der die Intensität aus der gesamten Ionisation berechnet wird, bei 7,3 Amp. 95 Proz., bei 7,7 Amp. 96 Proz. der ganzen Ionisation ausmacht. Berücksichtigt man, daß die Meßfehler sowohl bei der zu korrigierenden Ionisation wie bei der Korrektur selbst bis zu 1,6 Proz. betragen, daß also auf die Differenz, die in diesem Gebiet nur 5 bzw. 4 Proz. ausmacht, ein Fehler von 3,2 Proz. entfällt, berücksichtigt man weiter, daß, wie oben ausgeführt, keine Sicherheit besteht, daß die sekundäre Strahlung vollständig erfaßt wurde, so darf man wohl die hier gefundene Intensität nicht auf die Existenz noch schnellerer β-Strahlen zurückführen. Aber

[1]) C. D. Ellis, Proc. Roy. Soc. (A) **101**, 1, 1922.
[2]) L. Meitner, ZS. f. Phys. **11**, 35, 1922.

auch wenn man dies tun wollte, so läge die Grenze des Spektrums höchstens bei $H\rho = 7000$. Die Resultate stehen in Übereinstimmung mit den Befunden von v. Baeyer, Hahn und Meitner. Strahlen von so großer Geschwindigkeit, daß $H.\rho = 14000$ wird, wie sie Chadwick für RaB + C aus seinen Zähl- und Ionisationsmessungen erschloß, sind beim ThB + C + C'' nach den Befunden der Ionisationsmethode ebenso wenig vorhanden wie nach den photographischen Aufnahmen.

In den vorangehenden Darlegungen ist gezeigt worden, daß ein gewisser kontinuierlicher Untergrund durch das mangelnde Auflösungsvermögen der Versuchsanordnung und durch die bereits im Zerfallsatom sekundär hervorgerufene Verwaschung der Linien auftreten muß. Daß außerdem noch äußere sekundäre Einflüsse wie Streuung und Geschwindigkeitsverringerung in der Strahlenquelle selbst eine Rolle spielen, ist auch bereits erwähnt worden und findet eine experimentelle Stütze in einer Arbeit von J. Chadwick und C. D. Ellis[1]). Die Verfasser haben das Spektrum von RaB + C genau wie seinerzeit J. Chadwick in der oben zitierten Arbeit aufgenommen und bestätigen die früher erhaltenen Ergebnisse. Sie geben ihre Resultate in einer Kurve wieder, allerdings ohne die wirklich gemessenen Werte einzuzeichnen, so daß sich nicht erkennen läßt, ob tatsächlich im Gebiet der schwachen Linien ein glatter Kurvenverlauf vorliegt, oder ob sich ähnlich wie bei dem hier gemessenen Spektrum bei genügend genauer Durchmessung schwächere Linien bemerkbar gemacht hätten. Das wesentliche an dieser Arbeit scheint aber ein Versuch zu sein, der auf eine direkte Prüfung der Frage hinzielt, ob das kontinuierliche Spektrum durch sekundäre Einflüsse wie etwa Streuung in der Strahlenquelle selbst mitbedingt sein kann. Um diesen Punkt zu entscheiden, verfahren die Verfasser folgendermaßen. Bei ihren gewöhnlichen Versuchen diente als Strahlungsquelle eine schmale Messingplatte, auf deren Oberseite RaB + C niedergeschlagen war. Um zu prüfen, ob die β-Strahlen durch Streuung an der unteren Seite der Messingplatte inhomogen werden und dadurch zu dem kontinuierlichen Untergrund beitragen, machen die Verfasser einen Kontrollversuch, bei dem das RaB + C auf der Unterseite einer ganz dünnen Silberfolie niedergeschlagen war. Die β-Strahlen müssen nun zwar vor Eintritt in den Spalt die dünne Silberfolie durchdringen, wegen der geringen Dicke erwarten aber die Verfasser, daß die Beeinflussung durch diese sehr gering sein wird. Da-

[1]) J. Chadwick und C. D. Ellis, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. **21**, Part III, Nov. 1922.

gegen kann keine Rückstreuung stattfinden, da sich ja unterhalb des RaB + C jetzt keine streuende Substanz befindet. Der Unterschied zwischen den so erhaltenen Resultaten und den früher mit der aktivierten Messingplatte erhaltenen ergibt also ein Maß für die Streuungswirkung der Messingplatte. Die Messungen ergeben nun folgendes. An Stellen der Kurve, die weit weg von Linien ablagen, war der kontinuierliche Untergrund um etwa 20 Proz. geringer als vorher, dagegen waren die Linien selbst etwas verbreitert und der Untergrund in der Nähe der Linien etwa ebenso stark wie vorher. Die Verfasser sehen in dem letzten Umstand einen Beweis, daß der kontinuierliche Untergrund nicht durch sekundäre Verbreiterung der Linien hervorgerufen sein kann, da sonst bei diesem zweiten Versuch, bei dem die Streuungsmöglichkeiten sehr viel geringer sind, die Maxima der Linien viel stärker über dem Untergrund hätten hervortreten müssen.

Dieser Schluß ist aber nicht zulässig. Denn da die Verfasser selbst angeben, daß die Linien durch die Geschwindigkeitsverringerung in der Silberfolie verbreitert waren, so ist ja klar, daß diese Verbreiterung eine Steigerung des kontinuierlichen Untergrundes erzeugen wird. Außerdem ist, wie auch aus den vorstehenden Versuchen mit ThB + C hervorgeht, mit der Verbreiterung der Linie eine Herabsetzung der Intensität des Maximums verknüpft. Dadurch erklärt es sich, daß in der Nähe der Linien der Untergrund relativ zur Intensität der Linien etwa ebenso stark erschien wie vorher. Die Herabsetzung der Streuung wird eben durch die Verbreiterung ungefähr kompensiert, und das Ergebnis dieses Versuches beweist gerade wieder, daß Unschärfe der Linien, Streuung und andere Sekundäreffekte eine wesentliche Rolle für das Entstehen des kontinuierlichen Spektrums spielen. Daher können diese Ergebnisse keinesfalls zugunsten der Ellisschen Auffassung angeführt werden, wonach die den Zerfall bedingenden primären β-Strahlen aus dem Kern nicht mit einer einheitlichen Geschwindigkeit austreten.

Zusammenfassung.

1. Das β-Strahlenspektrum von ThB + C wird durch Ionisationsmessungen im Magnetfeld untersucht.

2. Neben den zwei stärksten Linien von ThB bei $H\varrho = 1385$ und 1750 wurden auch die stärkeren Linien von ThC + C″ bei $H\varrho = 1584$, 2610 und 2896 einwandfrei nachgewiesen. Außerdem machte sich zwischen $H\varrho = 1456$ und 1973 der Einfluß mehrerer schwacher Linien von ThB und ThC + C″ deutlich bemerkbar.

3. Die gefundene Begrenzung des Spektrums nach der Seite der schnellsten Strahlen bestätigt die früheren Befunde von v. Baeyer, Hahn und Meitner.

4. Die Intensität der beiden stärksten ThB-Linien ist groß gegenüber dem kontinuierlichen Untergrund.

5. Es wird durch Experimente sowie durch Diskussion der Versuchsbedingungen gezeigt, daß der kontinuierliche Untergrund auf sekundäre Einflüsse zurückzuführen ist und nicht als Beweis gegen die Annahme dienen kann, daß die primären β-Strahlen den radioaktiven Kern mit definierter Geschwindigkeit verlassen.

Berlin-Dahlem, August 1924.

Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Abteilung Hahn-Meitner.

Über die Absorptionsgrenzen der K-Reihe.

Von **Felix Joachim v. Wiśniewski** in Lazin (Polen).

(Eingegangen am 16. August 1924.)

Es wird hier auf Grund besonderer Annahmen über die der Absorption der Röntgenstrahlen zugrunde liegende Struktur der Atome ein Ausdruck für die K-Absorptionsgrenze als Funktion der Atomnummer Z gewonnen und mit den empirischen Zahlen in Übereinstimmung gefunden.

In einer Arbeit: „Über die K-Anregungsgrenze der leichten Elemente“ [1]) habe ich eine mögliche Deutung der K-Absorptionskante von He, Li, Be, B, C gegeben.

Jetzt werde ich zeigen, daß nicht nur die K-Absorptionskante dieser vier Elemente, sondern auch die K-Absorptionskante der schwereren Elemente einem Gesetz folgen, das aus ähnlichen Annahmen über die Struktur der absorbierenden Elemente entsteht, wie das Gesetz der K-Absorptionskante der oben zitierten vier Elemente.

Zuerst werden wir uns mit den Elementen, deren Atomnummern zwischen 1 und 13 liegen, beschäftigen.

Man kann nämlich in Übereinstimmung mit der Erfahrung bleiben, wenn man annimmt, daß die K-Absorptionskante durch Absorption eines Quantums von Energie entsteht, das ausreicht, um eine spezielle Anordnung der Elektronen, die ich K-Anordnung nennen werde, zu zerstören und die Elektronen ins Unendliche zu entfernen.

Bei dieser K-Anordnung sollen die Elektronen auf drei den Kern umkreisende Elektronenringe verteilt sein.

Die zwei äußeren Elektronenringe sollen vierquantig und der innere (erste vom Kern) zweiquantig sein.

Auf dem zweiquantigen Ringe sollen zwei Elektronen, auf dem ersten vierquantigen bis $Z = 6$ keine Elektronen kreisen, und für $Z \geqq 6$ ist die Zahl der kreisenden Elektronen gleich $Z - 5$.

Der zweite vierquantige Ring ist von einem Elektron für $Z = 11$ und durch zwei Elektronen für $Z = 12$ besetzt.

Da die Energie eines Elektronenringes gleich

$$-\frac{R \cdot h}{n_k^2} \cdot p_k \cdot \left(Z - \sum_1^{k-1} p_i - S p_k \right)^2$$

[1]) Phys. ZS. **25**, 1924.

ist, wo p_k die Zahl der Elektronen auf dem Ringe, n_k^2 die Zahl der Quanten und $\sum_1^{k-1} p_i$ die Zahl der Elektronen im Innern des K-Ringes bedeuten, so haben wir für den Ausdruck der totalen Energie T dieser Elektronenanordnung:

$$T = -\frac{2 \cdot Rh}{2^2}(Z - S_2)^2 - \frac{p_4 \cdot R \cdot h}{4^2}(Z - 2 - Sp_4)^2$$

$$-\frac{R \cdot p_4' \cdot h}{4^2}(Z - 2 - p_2 - S'p_4)^2,$$

wo

$$Sp_i = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=p_i-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{p_i}}.$$

Die absorbierte $h\nu$-Energie, welche ausreichen muß, um die Elektronen dieser Anordnung ins Unendliche zu entfernen, muß gleich der totalen Energie T mit dem negativen Vorzeichen sein, so daß

$$h\nu = -T$$

ist. Daraus folgt:

$$\frac{\nu}{R} = \frac{2}{2^2}(Z - 0{,}25)^2 + \frac{p_4}{4^2}(Z - 2 - Sp_4)^2 + \frac{p_4'}{4^2}Z - 2 - p^4 - S'p_4')^2, \quad (\alpha)$$

wo

$$p_4 = Z - 5;\ p_4' = Z - 10,$$
$$S_2 = 0{,}25$$

ist.

Tabelle 1.

Z	beobachtet Volt	$\frac{\nu}{R}$ beobachtet	$\frac{\nu}{R}$ berechnet	p_2	p_4	p_4'
2	20,5 — 21,3	1,52 — 1,57	1,53	2	—	—
3	52,6	3,88	3,78	2	—	—
4	95,0	7,82	7,03	2	—	—
5	145 — 150	10,71 — 11,08	11,28	2	—	—
6	234	17,3	17,53	2	1	0
7	311	22,90	22,78	2	0	0
	350 — 353	25,87 — 26,09	25,60	2	2	0
8	478	35,33	35,54	2	3	0
9	(649)	47,96	47,28	2	4	0
10	—	—	—	—	—	—
11	1039	76,79	77,05	2	5	1
12	—	95,8	95,9	2	6	2

Die numerischen Werte sind einer Arbeit von Holtsmark entnommen (Phys. ZS. **24**, 225, 1923).

In der vorstehenden Tabelle 1 stellen wir die beobachteten Werte von ν/R mit den aus der Formel (α) berechneten zusammen. Unter p_2 ist in der Tabelle die Zahl der Elektronen auf dem zweiquantigen Ringe, unter p_4 die Zahl der Elektronen auf dem ersten vom Kerne vierquantigen und unter p_4' die Zahl der Elektronen auf dem zweiten vierquantigen Ringe angegeben.

Wie wir aus dieser Zusammenstellung sehen, stimmen die nach der Formel (α) berechneten Werte von ν/R mit den beobachteten überein.

Für $Z > 12$ reicht die oben beschriebene K-Anordnung nicht, die Erfahrungsergebnisse wiederzugeben, so daß wir eine andere Struktur suchen müssen.

Die beobachteten Werte der Absorptionskante werden wiedergegeben, wenn in der bei der Absorption vernichteten Struktur die Elektronen auf zwei Ringe verteilt sind.

In dem dem Kerne näher liegenden dreiquantigen Ringe sollen drei Elektronen, und in dem zweiten vom Kerne zehnquantigen Ringe ($Z - 13$) Elektronen kreisen.

Da die totale Energie T dieser Anordnung der Elektronen gleich

$$T = -\frac{3 \cdot N \cdot h}{3^2}(Z - S_3)^2 - \frac{p \cdot N \cdot h}{10^2}(Z - 3 - Sp_{10})^2$$

ist, so haben wir für die Energie $h\nu$, die zugeführt sein muß, um diese Elektronen ins Unendliche zu entfernen,

$$h\nu = -T.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\nu}{N} = \frac{3}{3^2}(Z - S_3)^2 + \frac{p_{10} \cdot N \cdot h}{10^2}(Z - 3 - Sp)^2, \qquad (\beta)$$

wo

$$p_{10} = Z - 13$$

ist.

In der umstehenden Tabelle 2 sind die nach der Formel (β) berechneten Werte von ν/N mit den beobachteten zusammengestellt.

Unter p_3 ist in dieser Tabelle die Zahl der Elektronen auf dem dreiquantigen Ringe und unter p_{10} die Zahl der Elektronen auf dem zehnquantigen Ringe angegeben.

Die Übereinstimmung der beobachteten Werte von ν/R mit den berechneten ist auch hier zufriedenstellend.

Dieselbe Elektronenanordnung liegt der K-Absorptionskante für höhere Atomnummern, also für $Z \geqq 30$, zugrunde.

Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Zahl der $Z - 13$-Elektronen, welche bis jetzt auf einem einzigen Ringe verteilt waren,

jetzt auf zwei konzentrische zehnquantige Ringe verteilt ist. Dies folgt daraus, daß für eine Anzahl von Elektronen, die kleiner ist als $Z - 13$, der absolute Wert der Energie des zehnquantigen Ringes ein Maximum besitzt, dessen Größe nicht ausreicht, um die beobachteten Werte ν/R wiederzugeben.

Tabelle 2.

Z	$\frac{\nu}{R}$ beobachtet	$\frac{\nu}{R}$ berechnet	p_3	p_{10}
12	114,67	115,69	3	—
14	—	—	3	—
15	158,30	158,66	3	2
16	181,80	182,90	3	3
17	207,80	209,00	3	4
18	235,73	236,84	3	5
19	265,30	266,50	3	6
20	297,50	297,96	3	7
21	331,20	331,20	3	8
22	365,43	366,20	3	9
23	402,30	402,70	3	10
24	441,10	441,40	3	11
25	482,40	481,90	3	12
26	523,80	524,10	3	13
27	568,80	568,03	3	14
28	612,00	613,76	3	15
29	661,10	661,28	3	16

Die Zahlen sind nach Sommerfeld, Atombau und Röntgenspektra, zitiert.

Auf dem ersten zehnquantigen Ringe befindet sich eine Zahl von Elektronen, für welche die Energie dieses Ringes ein Maximum wird; die übrigbleibenden Elektronen gehen auf den zweiten zehnquantigen Ring über.

Da die Energie dieser drei Ringe

$$T = -\frac{3 \cdot R \cdot h}{3^2} - \frac{p_{10} \cdot R \cdot h}{10^2}(Z - 3 - S p_{10})^2$$

$$- \frac{p'_{10} \cdot R \cdot h}{10^2}(Z - 3 - p_{10} - S p'_{10})^2$$

ist, so folgt für ν/R, weil die absorbierte Energie $h\nu$

$$h\nu = -T$$

sein muß:

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{3^2}(Z - S_3)^2 + \frac{p_{10}}{10^2}(Z - 3 - S_{10})^2 + \frac{p'_{10}}{10^2} Z - 3 - p_{10} - S p'_{10})^2, (\gamma),$$

wo

$$p'_{10} + p_{10} = Z - 13$$

ist und p_{10} der Forderung genügt, daß

$$p_{10}(Z - 3 - Sp_{10})^2$$

ein Maximum sei, daß also

$$\{n(Z - 3 - S_n)^2\}_{n=p_{10}} = \text{Maximum}.$$

In der Tabelle 3 sind die beobachteten Werte mit den nach der Formel (γ) berechneten zusammengestellt.

Unter p_3 sind die auf dem dreiquantigen Ringe verteilten Elektronen, unter p_{10} die auf dem ersten zehnquantigen, und unter p'_{10} die auf dem zweiten zehnquantigen Ringe verteilten Elektronen hingeschrieben.

Tabelle 3.

Z	$\frac{\nu}{R}$ beobachtet	$\frac{\nu}{R}$ berechnet	p_3	p_{10}	p'_{10}	$p_{10} + p'_{10}$
30	702,89	710,68	3	16	1	17
31	765,63	762,17	3	17	1	18
32	817,57	815,20	3	17	2	19
33	873,28	873,46	3	18	2	20
34	—	—	—	—	—	—
35	992,78	991,61	3	19	3	22
36	—	—	—	—	—	—
37	1119,10	1122,37	3	19	5	24
38	1184,1	1188,60	3	19	6	25
39	1256,1	1258,60	3	19	7	26
40	1326,1	1227,40	3	20	7	27
41	1401,3	1398,38	3	21	7	28
42	1474,5	1474,88	3	21	8	29
43	—	—	—	—	—	—
44	1631,9	1630,92	3	22	9	31
45	1709,7	1710,4	3	23	9	32
46	1795,6	1795,47	3	23	10	33
47	1878,9	1883,01	3	23	11	34

Die Zahlen sind nach Sommerfeld, Atombau und Röntgenspektra, zitiert.

Die Übereinstimmung zwischen den berechneten Werten von ν/R und den beobachteten ist für $Z \geqq 30$ nicht so gut wie für $Z \leqq 29$, was daher rühren mag, daß die für $Z \geqq 30$ beobachteten Absorptionskanten nicht genau bekannt sind.

Prüfung einer spektrometrischen Methode im langwelligen Spektrum

Von **Holjer Witt** in Linköping.

Mit acht Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1924.)

Einleitung. § 1. Eine Verbesserung des Radiomikrometers. § 2. Galvanometer. § 3. Versuche mit Bolometern. § 4. Thermosäule. § 5. Spektrometer mit Rowlandscher Aufstellung. § 6. Spektrum eines Glühkörpers.

Während die Forschung im übrigen Teile des elektromagnetischen Spektrums rasch vorwärts geht, geschieht dies im langwelligen ultraroten Gebiete nur sehr langsam. Die äußerste Grenze, bei welcher Prismen bei spektrometrischen Messungen noch verwendet werden können, liegt bei 23 μ mit Sylvin als Prismensubstanz. Die wesentliche Schwierigkeit ist aber darin zu suchen, daß die Intensität der Strahlung nach größeren Wellenlängen bei den gewöhnlich zu Gebote stehenden Lichtquellen sehr rasch abnimmt. Die Kenntnis des langwelligen ultraroten Spektrums verdanken wir hauptsächlich Rubens und seinen Mitarbeitern, die unter Zuhilfenahme der Reststrahlenmethode und der Quarzlinsenmethode sehr schöne Schlüsse ziehen konnten.

Es wurde vom Verf.[1]) ein Versuch gemacht, das Strahlungsgebiet jenseits des Absorptionsbereiches des Quarzes für eine direkte spektrometrische Methode zugänglich zu machen, die die umständliche und weniger genaue Reststrahlenmethode ersetzen sollte. Die durch Verwendung eines Steinsalzschirmes als Klappschirm und Einsetzung einer 4 mm dicken Quarzplatte in den Strahlungsgang ausgesonderte Strahlung wurde in einem vom Verf. konstruierten Drahtgitterspektrometer zerlegt. Es wurden Einsenkungen in der Energieverteilungskurve des Auerbrenners beobachtet, deren Schwerpunkte bei etwa 135, 123, 106 und 91 μ lagen. In der Nähe von 80 μ waren zwei Einsenkungen vorhanden, welche ich mit einem mit der Reststrahlenmethode von Rubens gefundenen Wasserdampfstreifen bei 79 μ und einem Absorptionsmaximum des ordentlichen Strahles im Quarz in der Nähe von 82 μ identifizierte.

[1]) Phys. ZS. **21**, 374, 1920.

In einer später erschienenen Abhandlung [1]) sind dergleichen Messungen von Rubens beschrieben. Rubens macht auf einen erheblichen Mangel der Drahtgitter aufmerksam. Freilich ist die Intensität der kurzwelligen Strahlung von beispielsweise der Wellenlänge 4 μ im Spektrum 25. Ordnung, welches der Wellenlänge 100 μ im Spektrum erster Ordnung überlagert ist, nach der Theorie der Beugungsgitter (unter Voraussetzung, daß die Drahtdicke $^1/_2$ Gitterkonstante ist) unter Berücksichtigung der Dispersion um den Faktor 25^3 relativ gegen diese geschwächt, so daß die gebeugte kurzwellige Strahlung als Verunreinigung nicht in Betracht kommt, selbst wenn man die Überlagerung einer größeren Zahl Spektren berücksichtigt. Aber Metalldrähte von einigen Zehntel Millimeter Durchmesser wirken bei Wellenlängen von 1 bis 4 μ als zylindrische Konkavspiegel, und ein gewisser Teil der auf das Gitter fallenden kurzwelligen Strahlung wird bei Gittern dieser Art durch einfache oder mehrfache Reflexion an den Drähten zum schrägen Austritt aus dem Gitter veranlaßt. Es ist eine weitere Reinigung der Strahlung nötig, um aus den in den Beugungsspektren beobachteten Ausschlägen sichere Schlüsse auf die Energieverteilung der langwelligen Strahlung ziehen zu können. Bei den Untersuchungen von Rubens wurde eine weitere Reinigung der Strahlung mit einer Quarzlinse und einem in üblicher Weise angebrachten Papierschirm oder durch einmalige Reflexion an einer Flußspatplatte bzw. Steinsalzplatte bewirkt.

Bei meinen fortgesetzten Untersuchungen wurde eine spektrometrische Methode verwendet, welche die bei den Drahtgittern sich vorfindenden Übelstände umgeht.

§ 1. Da es von Bedeutung ist, bei Strahlungsmessungsapparaten die größtmögliche Empfindlichkeit zu erzielen, wurden sowohl mit dem Radiomikrometer von Boy als auch mit Bolometern und Thermosäulen verschiedener Konstruktion in Verbindung mit einem hochempfindlichen Galvanometer Versuche gemacht. Das größte Hindernis für die Erreichung einer sehr großen Empfindlichkeit beim Radiomikrometer ist die Schwierigkeit, das bewegliche System unmagnetisch zu machen [2]). Wenn dies

[1]) Sitzungsber. Akad. d. Wiss. Berlin 1921, S. 8.

[2]) Paschen schreibt: „Es ist mir trotz vieler Mühe nicht gelungen und dürfte unmöglich sein, einen magnetisch indifferenten Kreis herzustellen“ (Wied. Ann. **48**, 276, 1893). Das von H. Schmidt angegebene Modell (Ann. d. Phys. **29**, 1001, 1909) soll von magnetischen Eigenschaften des Materials unabhängig sein, jedoch ist die erhaltene Empfindlichkeit im Vergleich zu der bei meinen Strahlungsmessungsapparaten erreichten nur sehr gering.

nicht gelungen ist, hängt die Ruhelage und die Richtkraft des beweglichen Systems nicht von der Torsionslosigkeit des Aufhängedrahtes ab, sondern ist durch das paramagnetische oder diamagnetische Verhalten des Materials, aus denen der Kreis besteht, bedingt. Auch der Spiegel kann, wenn er magnetische Eigenschaften hat, eine erhebliche Richtkraft besitzen.

In der oben erwähnten Schrift des Verf. wurde eine Methode beschrieben, mittels der man sowohl unmagnetische Drähte für die Schlingen wie auch unmagnetische Spiegel herstellen kann.

§ 2. Bei Versuchen mit Bolometern und Thermosäule wurde ein Panzergalvanometer vom Paschentypus [1]) verwendet. Die Spule wurde mit seidenisoliertem Kupferdraht mit nach außen zunehmender Dicke gewunden. Diese hatte vier Schichten mit Durchmessern des isolierten Drahtes von etwa 0,14, 0,19, 0,25 und 0,35 mm. Die Drähte jeder Schicht wurden einzeln zu den Klemmschrauben geführt. Wenn die Schichten in Serie geschaltet waren, betrug der Widerstand 834 Ω.

Die Empfindlichkeit hängt im wesentlichen von dem aufgehängten beweglichen System ab. Dieses bestand aus einem von mikroskopischem Deckglas ausgeschliffenen kreisrunden Stückchen vom Durchmesser 1,8 mm, welches auf chemischem Wege versilbert war, und auf dessen Rückseite drei Magnete aus gehärtetem Lamellenstahl mit einer Spur Wachs befestigt waren. Dies System war mit einem $^1/_2\,\mu$ dicken Quarzdraht in der Spule des Galvanometers aufgehängt. Die Astatisierung geschah mit dem bei diesem Typus gewöhnlich justierbaren Richtmagneten, welcher hier aus einem schmalen Streifen Lamellenstahl bestand, und einem vor das Galvanometer auf einen Steinklotz gelegten größeren Magnet. Zum Schutz gegen äußere magnetische Störungen wurde der Apparat auf einer in der Wand befestigten 1 cm dicken Platte aus weichem Eisen aufgestellt und darüber 12 ineinander passende Hauben aus $^1/_2$ mm Eisenblech gestellt. Die Rückseite wurde auf dieselbe Weise mit einer Anzahl Eisenplatten geschützt. Man würde wohl einen ruhigeren Platz für die Aufstellung eines empfindlichen Galvanometers als ein Institut, wo den ganzen Tag mit Motoren zum Betrieb von Röntgeninstrumentarien gearbeitet wird, finden können; mit diesem Schutz aber waren die Störungen auch bei Tag nicht groß, die Fluktuationen des 0-Punktes betrugen nur selten über 1 bis 2 Skalenteile bei einem Skalenabstand von 1 m. Wenn es auf die Beobachtung sehr kleiner Ausschläge ankommt, wie es bei den Strahlungsmessungen der Fall war, mußten die Messungen in der Nacht

[1]) Phys. ZS. **14**, 521, 1913.

vorgenommen werden, wo der 0-Punkt des Apparates ruhig blieb. Die Empfindlichkeit betrug 1 Skalenteil Ausschlag bei einem Skalenabstand von 1 m, wenn ein Strom von $1{,}4 \cdot 10^{-11}$ Amp. durch die in Serie geschalteten Schichten der Spule ging. Der Ausschlag war aperiodisch und war nach 7 Sek. beendigt.

§ 3. Das Linearbolometer, wie es für spektroskopische Messungen im kurzwelligen Gebiet des ultraroten Spektrums Anwendung findet, ist von Paschen zu sehr großer Vollendung gebracht worden [1]).

Wer in diesem Gebiet mit Bolometern arbeitet, findet in den Arbeiten Paschens sehr wertvolle Anweisungen über ihre technische Herstellungsweise. Wenn man aber im langwelligen Gebiet arbeiten soll, wo die Schwärzung mit Ruß oder Platinmohr ungenügend ist, und mit Ruß und Wasserglas ausgeführt werden muß, stößt die Verwendung sehr dünner

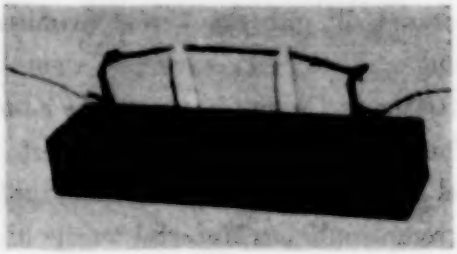


Fig. 1.

Platinstreifen auf Schwierigkeiten, da das Wasserglas beim Trocknen zusammenschrumpft und brüchig wird und die dünnen Streifen zerstören würde.

Es wurden Bolometer anderer Konstruktion versucht. Wenn auch die folgenden Strahlungsmessungen mit Thermosäulen ausgeführt wurden, kann es doch von Interesse sein, zwei der verwendeten Bolometer hier zu beschreiben.

1. Als temperaturempfindliches Material verwende ich hier einen Wolframdraht von 0,016 mm Durchmesser. In einem Ebonitklotz sind zwei umgebogene Nickeldrähte befestigt (Fig. 1). Über den Wolframdraht wurde eine Anzahl Ringe aus dünner Seide gesteckt und diese Ringe alternierend über die Nickeldrähte geschoben, so daß der Wolframdraht in Zickzackform ausgespannt wurde. Die freien Enden des Wolframdrahtes wurden mit Kupferdraht am Nickeldraht befestigt. Die Wolfram-

[1]) Wied. Ann. **48**, 277 u. f., 1893.

drähte wurden durch Aufstellung von zwei Stegen aus Glimmer gespannt, die Lage der Drähte mit der Spitze einer Nähnadel justiert und die seidenen Ringe mit Zaponlack getränkt, wodurch erreicht wurde, daß sie eine zusammenhängende Masse bildeten und die Lage der Drähte fixiert wurde. Auf diese Weise konnten 13 Drähte auf einer Breite von 0,7 mm gespannt werden. Die Streifen wurden durch zwei in der Figur nicht eingezeichnete kupferne Mäntel vor Luftströmungen geschützt. Schwärzung mit Ruß und Wasserglas wurde versucht, die Drähte zerrissen jedoch nach einiger Zeit infolge der ungleichförmigen Trocknung des Wasserglases sehr leicht. Eine Schwärzung durch Auftragen eines Gemenges von Ruß und Ricinusöl wurde probiert, wobei die Drähte haltbar blieben. Zwei solche Linearbolometer von je 79 Ω Widerstand wurden in üblicher Weise in einer Wheatstoneschen Brücke mit zwei Rheostaten als Kompensationswiderstand angeordnet. Es konnte ohne erhebliche Störungen eine Spannung von 4 Volt an die Brücke angelegt werden. Ein 3 m entferntes Kerzenlicht gab bei dieser Spannung in $3^1/_2$ m Skalenabstand einen Ausschlag von 600 Skalenteilen, wenn die Strahlung durch ein Quarzfenster von 0,45 mm Dicke ohne jegliche Konzentriervorrichtung auf einen der Streifen fiel. Die Empfindlichkeit des Galvanometers betrug nur ein Fünftel der später erreichten Empfindlichkeit.

2. Als temperaturempfindliches Material wurde hier Platin verwendet. Das Platin wurde durch Kathodenzerstäubung auf einem Glimmerblättchen zerteilt und von diesem Streifen von 1 mm Breite mit einem Rasiermesser abgeschnitten. Es kommen im Glimmer zwei besonders ausgebildete Richtungen vor, nach denen der Glimmer bei Biegung leichter zerbricht; sie müssen aufgesucht werden und der schmale Streifen nach einer dieser Richtungen geschnitten werden, wenn man die größte Haltbarkeit des Streifens erhalten will. Die Enden des Streifens wurden elektrolytisch verkupfert und ein etwa 0,005 mm dicker Silberstreifen an jedem Ende angelötet. Durch Variierung der Dicke der Platinbelegung wurden Streifen mit 40 bis 1200 Ω Widerstand hergestellt. Um denselben Widerstand in zwei zu Bolometerzweigen dienenden Streifen zu erhalten, wurde ein Pinsel mit in Metall gefaßten Haaren durch einen Leitungsdraht mit dem positiven, der Streifen mit dem negativen Pol eines galvanischen Elementes verbunden; nach Befeuchtung des Pinsels mit Kupfersulfatlösung und Aufsetzen der Spitze auf die Begrenzungslinie des Kupferniederschlags konnte dieser vorsichtig weiter geführt werden, bis der gewünschte Widerstand erreicht war. Durch dieses Verfahren konnten zwei Streifen von genau gleichem Widerstand hergestellt werden. Die

Glimmerstreifen wurden durch Befestigung der Silberstreifen mit Schellack im Glimmerrahmen aufgehängt (Fig. 2). $^1/_2$ mm hinter dem Streifen wurde ein Glimmerblatt befestigt, als Vorderwand diente eine 0,13 mm dicke Quarzplatte. Die Streifen befanden sich je in einem kleinen parallelepipedischen oben und unten offenen Kanal, welcher den durch die Stromwärme verursachten Luftströmungen einen stationären Verlauf gab. Als Kompensationswiderstände dienten zwei aus Rheostatendraht bifilar gewickelte Widerstände, die letzte Ausgleichung konnte mit einem Platindraht mit beweglichem Quecksilberkontakt bewirkt werden. Man kann von einer besonderen Schwärzung absehen, wenn der Glimmer die fragliche Strahlung selbst absorbiert. Die Absorption des Glimmers beginnt bei etwa 4 μ [1]), und er ist für langwellige Strahlung nur in sehr dünnen Schichten etwas durchlässig [2]). Es würde ein großer Vorteil

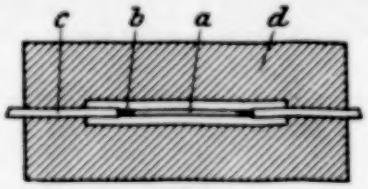


Fig. 2.

a) Platinierter Glimmer, b) Verkupferter Teil, c) Silberfolie.

sein, wenn keine Strahlung unter etwa 4 μ absorbiert würde, was für die Reinheit des langwelligen Beugungsspektrums von Bedeutung sein dürfte. Die Streifen wurden auf der nicht platinierten Seite bestrahlt. Ein Bolometer mit 170 Ω Widerstand jedes Streifens gab bei einer Spannung von 4 Volt an der Brückenkopplung für ein 3 m entferntes Kerzenlicht bei einem Skalenabstand von $3^1/_2$ m einen Ausschlag von 200 Skalenteilen, wenn die Strahlung ohne jegliche Konzentriervorrichtung direkt auf den Streifen fiel. Nachdem das Quarzfenster aufgelegt war, reduzierte sich der Ausschlag bis auf 10 Proz., was ja zu erwarten war, da der größte Teil der vom Glimmer absorbierten Strahlung innerhalb des Absorptionsgebietes des Quarzes fällt.

§ 4. Die aus den Versuchen hervorgegangene Thermosäule für spektrometrischen Gebrauch hat sehr große Forderungen bezüglich Empfindlichkeit und Stabilität erfüllt, so daß sie mit den empfindlichsten Radiomikrometern

[1]) H. Rosenthal, Wied. Ann. **68**, 792, 1899.

[2]) H. Rubens und H. Hollnagel, Berl. Ber. 1910, S. 47.

konkurrieren kann, wenn sie ihnen nicht überlegen ist. Als temperaturempfindliches Material verwende ich hier nach dem Beispiel von Coblentz[1]) Bi und eine Legierung von Bi und 5 bis 6 Proz. Sn. Die Thermokraft dieser Kombination ist 125 Mikrovolt pro Grad. Gezogener Wismutdraht von Kahlbaum von 0,1 mm Dicke wurde mit verdünnter Salpetersäure bis zum Durchmesser von 0,05 mm abgeätzt. Die Drähte wurden zwischen Glasplatten flach gedrückt. Die Drähte aus der Legierung wurden nach dem beim Radiomikrometer beschriebenen Verfahren hergestellt[2]). Als Strahlungsempfänger und als Platten für die „kalten" (Kompensations-) Lötstellen dienten Silberfolien, deren Herstellung an derselben Stelle beschrieben ist. Mit einem Rasiermesser wurden Streifen von 0,7 × 2 mm Fläche ausgeschnitten. Die einzelnen Elemente der Thermosäule wurden zuerst einzeln dargestellt. Silberstreifen wurden auf eine Marmortafel gelegt und an die Stellen, von welchen die Drähte

Fig. 3.

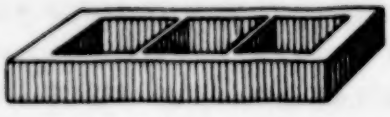


Fig. 4.

ausgehen sollten, sehr kleine mit gesättigter $ZnCl_2$-Lösung befeuchtete Teilchen von Roses Metall gegeben. Durch Nähern der Spitze eines erwärmten Messingdrahtes floß das Lötmetall über eine sehr kleine Fläche der Silberfolie aus. Die Folie wurde mit dem mit Lötmetall bedeckten Teil auf das Ende des Drahtes gelegt, ein Glimmerblatt darüber gelegt, so daß die Lage fixiert war, und die erwärmte Spitze eines Messers gegen das Glimmerblatt gedrückt, wobei die Folie sich mit dem Draht vereinigte. Die fertigen Elemente wurden auf einen Schieferrahmen geleimt (Fig. 3) und die über diesen hinausragenden Teile der Silberfolien der Kompensationslötstellen im Winkel von 90° gedreht und paarweise mit Hilfe einer erwärmten Pinzette zusammengelötet. Ein Ebonitrahmen (Fig. 4, natürl. Größe) wurde über die fertige Thermosäule gelegt. Die

[1]) Phys. Rev. **3**, 59. 1914.
[2]) Vgl. die oben erwähnte Schrift des Verfassers.

Mitte der Drähte wurde mit alkoholischer Schellacklösung auf den in der Figur ersichtlichen Zwischenwänden befestigt, das ganze in Wasser gestellt und der Schieferrahmen entfernt. Durch diese Befestigungsweise wurde erreicht, daß die „kalten" Lötstellen so wenig wie möglich in Verbindung mit dem haltenden Rahmen stehen, was zur Vermeidung eines Kriechens des 0-Punktes sehr wichtig ist. Die Strahlungsempfänger wurden beiderseits mit Ruß und Wasserglas, die Kompensationslötstellen nur mit Ruß geschwärzt.

Die fertige Thermosäule bestand aus 19 Elementen und war 14 mm lang. Sie wurde in ein luftdicht schließendes, dickwandiges Kupferkästchen gebracht, welches im Deckel eine spaltförmige Öffnung von 4 mm Breite besaß. Als Fenster diente eine senkrecht zur optischen

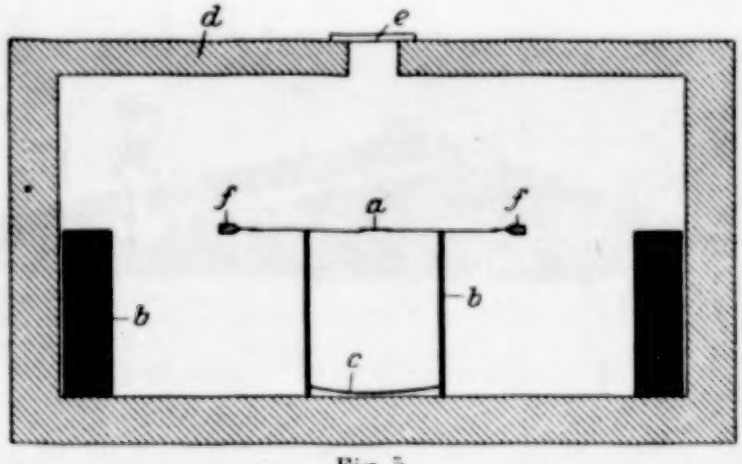


Fig. 5.

a) Strahlungsempfänger. b) Ebonit, c) Zylinderspiegel. d) Kupfer, e) Quarzfenster, f) Kompensationslötstelle.

Achse geschliffene Quarzplatte von 0,45 mm Dicke. Fig. 5 zeigt einen Durchschnitt des Apparates. Ein silberner Zylinderspiegel konzentrierte alle durch den Spalt kommenden etwa parallelen Strahlen, welche nicht direkt auf die Strahlungsempfänger fielen, auf dessen Rückseite. Der Widerstand war 74,5 Ω. Wenn die Thermosäule in Verbindung mit dem Galvanometer benutzt wurde, so wurden die zwei äußersten Drahtschichten des letzteren in Serie und dieses System parallel mit den beiden anderen Schichten verbunden. Der Widerstand im Galvanometer betrug bei dieser Verbindung 90 Ω. Ein 6 m entferntes Kerzenlicht gab einen Ausschlag von 190 Skalenteilen, wenn der Skalenabstand 1 m betrug und die Strahlung durch das Quarzfenster des Spaltes fiel. Der Ausschlag war nach 17 Sek. beendigt, der Rückgang braucht 19 Sek.

§ 5. Auf Grund der in der Einleitung erwähnten Übelstände der Drahtgitter wurde ein neues Spektrometer konstruiert. Es wurde die Rowlandsche Aufstellung verwendet. Das Spektrometer zeigt Fig. 6. Die Schlittenführung geschah mit auf zylindrischen Stahlstangen laufenden Hülsen, die Leitung des beweglichen Spektrometerarmes mit konisch geschliffenen Zapfen. An den vorstehenden Zapfen konnten Halter für das Gitter und die Thermosäule angebracht und diese Apparate einjustiert werden. In der Spitze des rechten Winkels der festen Stangen war auf einem gleichartigen Zapfen der Schirm mit dem Spalt für den Eintritt der Strahlung aufgestellt. Das Ganze war am Boden eines 2,5 cm dicken Holzkastens festgeschraubt. Ein Deckel mit Loch für den Eintritt der Strahlung konnte darüber gestellt werden. Der Kasten wie

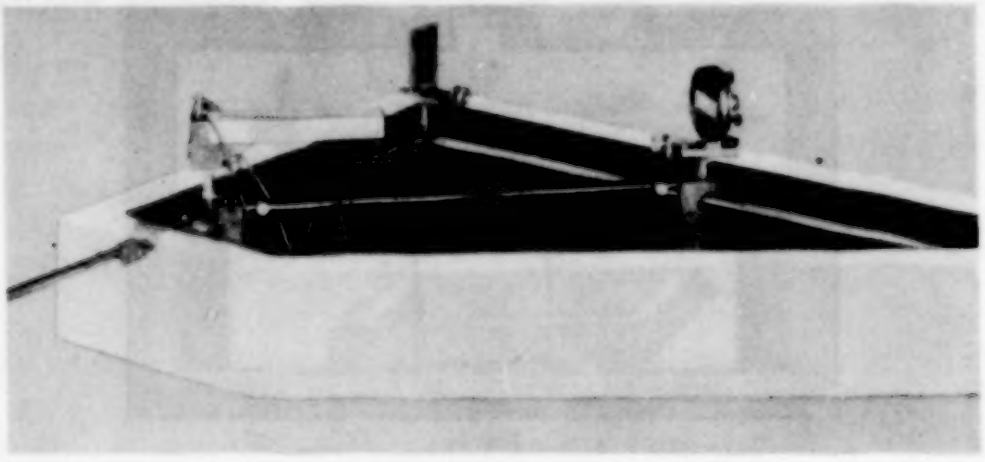


Fig. 6.

auch der Deckel wurden mit einer 5 cm dicken Schicht Watte und einer Schicht Asbestpappe bedeckt und darüber ein Tuch gespannt. Der Boden des Kastens war bei den Messungen mit einer Schicht Watte bedeckt. Der Deckel konnte mit Quecksilberdichtung luftdicht aufgesetzt werden, da aber die Quecksilberdämpfe die Gitter angreifen, mußte auf eine solche Dichtung verzichtet werden. Eine Papphülse und eine vom Loch des Deckels bis zum Schirm laufende metallene Hülse hinderte fremde Strahlung in die Thermosäule einzutreten. Mit einem von außen regulierbaren, auf einem Index ablesbaren in halbe Millimeter geteilten Stab konnte der Apparat für verschiedene Wellenlängen eingestellt werden. Die Gradnierung des Stabes wurde durch geometrische Ausmessung der Dimensionen des Apparates für die verwendeten Gitter in Wellenlängen

kalibriert. Die Leitungsdrähte zur Thermosäule lagen in durch die Wand geführten Gummischläuchen, die Leitungsdrähte bis zum Galvanometer in gläsernen Röhren.

Eine Anzahl von W. G. Pye & Co., Cambridge, geschliffener gläserner Konkavlinsen wurde auf chemischem Wege mit einer Silberschicht überzogen. Es war nicht möglich, mit der Teilmaschine genügend breite Streifen auszuschneiden, weil der Stichel derselben auf Grund der Krümmung des Spiegels schräg schneidet. Es mußte der Ausweg gewählt werden, mit der Teilmaschine sehr dünne Striche in einem Abstand gleich der

Fig. 7.

halben gewünschten Gitterkonstanten anzureißen. Jeder zweite Silberstreifen wurde dann mit einem aus einer Nähnadel geschliffenen Meißel mit der Hand weggekratzt. Es wurden zwei auf diesem Wege hergestellte Gitter von folgenden Eigenschaften bei den Strahlungsmessungen verwendet:

	Krümmungsradius cm	Gitterkonstante mm	Breite der Silberstreifen mm	Anzahl der Striche	Höhe mm
Gitter I	59,7	0,9999	0,4335	71	21
Gitter II . . .	59,7	0,5163	0,1639	134	27

§ 6. Bei sämtlichen Strahlungsmessungen, welche in einem im Institut für diese Zwecke eingerichteten unterirdischen Raum ausgeführt

wurden, wurde das Rowlandspektrometer in Kombination mit der Thermosäule und dem Galvanometer verwendet. Als Strahlungsquelle wurde hier ein Glühkörper von der Art, wie er in zu Erwärmungszwecken dienenden elektrischen Öfen gebraucht wird, verwendet, und bestand aus einem mit Widerstandsdraht umwundenen Hohlzylinder aus gebranntem Ton. Bei einer Stromstärke von 3,5 Amp. wurde er zu heller Rotglut erwärmt. Der Glühkörper wurde so aufgestellt, daß die von ihm kommende direkte Strahlung das Gitter gerade ausfüllte. Zur Reinigung der Strahlung wurde als Klappschirm eine 1,65 cm dicke Steinsalzplatte verwendet, welche mit einer pneumatischen Auslösungsvorrichtung erschütterungsfrei gehoben werden konnte. Die Steinsalzplatte hatte natürliche Spaltflächen, welche geschliffen und poliert waren. Da Steinsalz die Strahlung von Wellenlängen unter etwa 12 μ durchläßt, aber für

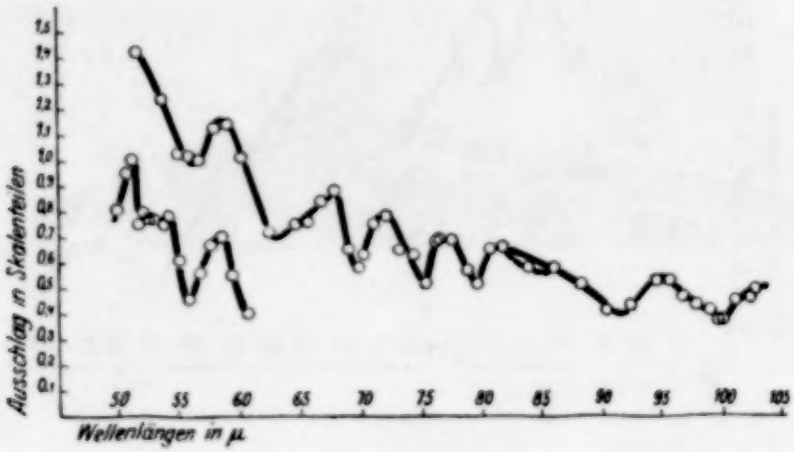


Fig. 8.

größere Wellenlängen in dickeren Schichten undurchlässig ist, rühren die bei Aufhebung eines solchen Schirmes beobachteten Ausschläge, wenn man von der sehr unbedeutenden Reflexion des Steinsalzes absieht, von langwelliger Strahlung her. Beim Austauschen des Steinsalzschirmes gegen einen Metallschirm wurden die im Beugungsspektrum beobachteten Ausschläge nur unbedeutend größer. Eine kleine Wanderung des 0-Punktes, die bei einer mehrere Stunden andauernden Messungsreihe nur einige Zentimeter betrug, ging in die entgegengesetzte Richtung wie die durch die Bestrahlung hervorgebrachte Richtung des Ausschlages und war eine Folge der mit der Zeit fortschreitenden Erwärmung des Apparates und der dabei auftretenden ungleichförmigen Temperaturerhöhung des Kupferkästchens und des Quarzfensters der Thermosäule und wurde durch Ablesungen in konstanten Zeitintervallen eliminiert. Jeder Ausschlag wurde

14 mal im Hin- und Rückgang beobachtet. Die wahrscheinlichen Fehler bei einer solchen Messungsreihe überschritten nur selten 0,03 bis 0,04 Skalenteile. Unter Berücksichtigung der relativ langen Einstellungszeit der Thermosäule und der vielen Beobachtungen, ganz abgesehen davon, daß die Messungen sehr anstrengend waren, konnte jede Nacht nur eine sehr begrenzte Anzahl Punkte bestimmt werden. Jeder Wellenlängenbereich wurde 2- bis 4 mal bestimmt. Die Kurven in Fig. 7 und Fig. 8 stellen die Mittelwerte aller Messungen dar. Die Fig. 7 zeigt die mit Gitter I aufgenommene Energieverteilungskurve im Wellenlängenbereich 95 bis 180 μ, wobei der Eintrittsspalt eine Breite von 5 mm hatte. Fig. 8 zeigt die Energieverteilung zwischen 50 und 105 μ, die obere Kurve für eine Breite des Eintrittsspaltes von 5 mm, die untere zwischen 50 und 60 μ liegende Kurve für eine von 3 mm. Der Strahlengang vom Glühkörper zur Thermosäule betrug 1,6 m und variierte natürlich ein wenig mit der Einstellung des Apparates. Die absolute Luftfeuchtigkeit schwankte während der Messungen zwischen 5 und 6 mm. Die beobachtete Energieverteilung könnte natürlich von besonderen Eigenschaften der Methode, wie selektive Eigenschaften der Strahlungsquelle und der Schwärzungsmittel der Thermosäule, abhängig sein.

Wellenlänge in μ	Minima bei Rubens	
167	175,6	Im Spektrum der Quarzquecksilberlampe
(150) [1]		
131,8	132,2	Spektrum des Auerbrenners
116,8		
108,9	105,8	
99,5 [2]		
90,9	(92)	
(83) [3]	(83) [3]	
79,3	78	
74,5		
69,6	72,2	
63,7	65,8	
56,6	57,7	
52,5		
(50)	49	

[1]) Dritte Ordnung des Minimums 50 μ?
[2]) Zweite Ordnung des Minimums 50 μ?
[3]) Absorptionsmaximum des Quarzes?

Durch die Gipfel der Maxima kann man sich eine gleichmäßige Kurve gelegt denken. Es erscheint angemessen, anzunehmen, daß diese Kurve die Energieverteilung für den Fall angibt, daß kein Wasserdampf vorhanden ist. Unter dieser Voraussetzung kann man aus den Ordinaten für die so gedachte Kurve und der beobachteten berechnen, ein wie großer Bruchteil der einfallenden Strahlung für verschiedene Wellenlängen absorbiert wurde, und eine Kurve für die Absorption im absoluten Maß herstellen. Die vorstehende Tabelle stellt die auf diese Weise berechneten Absorptionslinien nebst den von Rubens in diesem Wellenlängengebiet beobachteten Minima im Spektrum des Auerbrenners und der Quarzquecksilberlampe zusammen.

Über Serien im Absorptionsspektrum des Wasserdampfes.

Von **Holjer Witt** in Linköping.

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 14. August 1924.)

Auf Grund der Dreiatomigkeit des Wassermoleküls sollte man erwarten, im Absorptionsspektrum des Wasserdampfes drei Serien zu finden, die den drei Haupträgheitsmomenten im Molekül entsprechen. Innerhalb des kurzwelligen, trotzdem zum Rotationsspektrum gehörenden Gebietes zwischen 9 und ungefähr 25 μ, worin exakte Messungen keine größeren Schwierigkeiten bieten, kann man, wie Bjerrum[1]) und Eucken[2]) nachgewiesen haben, die Linien ziemlich gut in Serien von äquidistanten Linien einordnen. Ganz besonders auffallend ist eine Serie zwischen 9 und 18 μ gelegener sehr starker Linien mit einem Abstand zwischen den Linien von ungefähr 56 Schwingungszahl/cm.

Der Verfasser hat eine neuerliche Messung des Rotationsspektrums zwischen 50 und 170 μ mit einem in einem anderen Aufsatze[3]) beschriebenen Apparat vorgenommen. Innerhalb dieses Gebietes und abwärts bis zu 20 μ kann man das Spektrum durch zwei Serien von der Form

$$\nu = a\,(n + \tfrac{1}{2})$$

darstellen, worin ν die Schwingungszahl/cm ist und a die beziehungsweisen Werte 16,83 und 24,55 hat. Tabelle 1 gibt die berechneten Werte für die Absorptionslinien, sowie die gemessenen, ergänzt durch Werte aus den Messungen von Rubens wieder. Die Auflösung ist nicht an allen Stellen vollständig. So sieht man z. B. bei einer Betrachtung der Kurve von Rubens, daß das Minimum bei 40 μ von komplexer Natur sein muß.

Nach der von Bjerrum ausgesprochenen Auffassung des Absorptionsspektrums soll die Serie mit ungefähr gleichen Differenzen wie im Rotationsspektrum auch im Rotationsschwingungsspektrum wiedergefunden werden. Eucken[4]) findet in den von Sleator gemessenen Absorptionsbanden im kurzwelligen Ultrarot, daß man mit Sicherheit die Serie den beiden größeren Differenzen entsprechend legen kann, und nimmt als wahr-

---

[1]) Nernst-Festschrift 1912, S. 90.
[2]) Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **16**, 361, 1920.
[3]) ZS. f. Phys. **28**, 236, 1924.
[4]) ZS. f. Elektrochem. **26**, 377, 1920.

Tabelle 1.

Nr.	Serie I	Nr.	Serie II	Beobachtet	
3	237,5	2	274,2	265,7	Minimum in der Energieverteilungskurve der Hg-Lampe (Rubens)
4	169,7	3	164,5	167	
5	132,0			131,8	
		4	117,6	116,8	
6	108,0			108,9	
7	91,4	5	91,4	90,9	
8	79,2			79,3	Messungen von H. Witt
		6	74,8	74,5	
9	69,9			69,6	
10	62,5	7	63,4	63,7	
11	56,6			56,6	
12	51,7	8	54,9	52,5	
13	47,5	9	48,4	(49)	
14	44,0	10	43,3	44,1	
15	41,0	11	39,2	40,0	
16	38,3				
17	36,0	12	35,8	35,7	
18	33,9	13	32,9	32,9	
19	32,1				
20	30,5	14	30,5	30,6	Aus den Messungen von Rubens
21	29,0	15	28,4	28,9	
22	27,6				
23	26,4	16	26,5	26,6	
24	25,3	17	24,9	25,0	
25	24,2	18	23,5	23,8	
26	23,3	19	22,2	22,9	
27	22,4				
28	21,6			21,6	

scheinlich an, daß auch eine dritte Serie vorkommt. Es ist indessen sehr bemerkenswert, daß man eine Anzahl Linien mit innerhalb der Messungsfehler konstanten Differenzen durch die von Sleator gemessenen Banden bei 6 und 2,6 μ verfolgen kann. Die graphische Darstellung in Fig. 1 zeigt, daß es sehr wahrscheinlich ist, daß es sich hier um eine Serie handeln muß. Die Linien sind auf der Abszissenachse in gleichen Abständen aufgetragen, als Ordinaten sind die Wellenzahlen/cm eingezeichnet. Die gerade Linie I stellt die Serie im Band 6 μ, die Linie II die Serie im Band 2,6 μ dar.

Folgende von Sleator registrierten Minima werden als zu den Serien gehörend angenommen.

Serie im Band 6 μ: Minima 1, 3, 4, 6, 7′, 9′, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17′, 18′ 20, 21, 22, 24, 26, 27′, 30, 31, 32, 34, 36, 39.

Serie im Band 2,6 μ: Minima 5, 7, 9, 12, 16, 18, 22, 25, 27½, 30, 34, 39, 43, 50, 55, 59, 63, 69, 73, 77, 80, 83, 85, 87.

Die Differenzen berechnen sich aus dem Band 6 μ zu 18,1 und aus dem Band 2,6 μ zu 18,8.

Absorptionsgebiet 8820 bis 9150 Å.-E. Band I. Serie 2.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
8899,108	00 *N*	8901,548	11 234,00	
8917,446	0	19,891	210,90	23,10
35,786	000	38,236	187,89	23,01
54,214	1	56,669	164,86	23,03
72,807	0	75,267	141,73	23,13
91,750	7	94,215	118,26	23,47
9010,57 [1])	000	9013,04	095,04	23,22
9029,45 [1])	0	9031,93	071,83	23,21

Serie 3.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
8866,215	0	8868,647	11 275,68	
911,060	000	8913,504	218,93	56,75
956,648	000	8959,104	161,83	57,10
.....				2 . 56,73
9048,62 [2])	000	9051,10	048,38	
95,38 [2])	0	9097,87	10 991,58	56,80
9142,77 [2])	00	9145,28	934,61	56,97

Absorptionsgebiet 7900 bis 8500 Å.-E. Band II. Serie 3.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
8264,917	000	8267,186	12 096,01	
76,491	2—4	78,763	79,10	16,91
88,208	000—0	90,483	62,02	17,08
99,941	000	8302,219	44,97	17,05
8311,738	00—0	14,019	27,88	17,09
.....				2 . 17,16
35,511	0—1	37,799	11 993,57	
.....				2 . 17,23
59,532	00	61,826	59,11	17,00
71,436	000	73,733	42,11	16,92
83,308	000	85,609	25,19	16,74
95,094	000	97,398	08,45	17,24
8407,268	000	8409,575	11 891,21	16,96
19,273	000	21,584	74,25	

[1]) Nach Brackett. Die erste Linie wurde von Brackett mit *S* bezeichnet.
[2]) Nach Brackett.

Band III. Serie 1.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
8053,109	000	8055,321	12 414,15	
64,660	000	66,875	12 396,37	17,78
76,292	00—0	78,511	78,52	17,85
.....				2 . 17,69
99,439	000	8101,663	43,14	
.....				2 . 17,77
8122,832	00	25,062	07,60	
34,504	000	36,738	12 289,94	17,66
46,215	1—2	48,452	72,27	17,67
58,028	3—6	60,268	54,50	17,77
69,995	4—8	72,238	36,55	17,95
81,858	2—6	84,104	18,81	17,74

Serie 2.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
7998,274	000—0	8000,471	12 499,26	
8013,392	000—00	15,593	75,68	23,58
28,551	00—1	30,756	52,13	23,55
43,900	000—00	46,109	28,37	23,76
59,241	000	61,454	04,71	23,66
74,776	00	76,993	12 380,85	23,86
.....				2 . 23,76
8105,877	000	8108,103	33,34	
21,498	0—1	23,728	09,62	23,72
37,155	00	39,389	12 285,93	23,69
53,051	000?	55,290	61,98	23,95
68,822	2—4	71,065	38,31	23,67

Serie 3.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
7956,218	000 *N*	7958,403	12 565,34	
92,368	000—00	94,563	508,50	56,85
.....				2 . 57,01
8065,888	000	8068,103	394,49	
8103,165	000—0	8105,390	337,47	57,02
40,806	00	43,041	280,42	57,05
79,059	2—4 [1])	81,305	222,99	57,43

[1]) Wahrscheinlich Überlagerung von Fe.

Absorptionsgebiet 6900 bis 7400 Å.-E. Band IV. Serie 1.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
7215,549	000—00	7217,534	13 855,15	
25,031	000	27,019	36,96	18,19
34,428	0—1	36,418	18,99	17,97
43,740	3—5	45,733	01,23	17,76
53,244	1—2	55,239	13 783,14	18,09
.....				2 . 17,84
72,072	000	74,072	47,46	17,89
81,545	000	83,548	29,57	18,03
91,120	0—1	93,126	11,54	17,98
7300,694	000	7302,702	13 693,56	18,17
10,396	000	12,407	75,39	

Serie 2.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
7198,462	2—3	7200,443	13 888,03	
7211,237	0—1	13,221	63,43	24,60
24,114	000	26,102	38,72	24,71
.....				2 . 24,93
50,236	1—2	52,230	13 788,86	24,99
63,398	00	65,396	63,87	24,92
76,574	00—1	78,576	38,95	25,01
89,843	000—0	91,848	13,94	25,15
7303,238	1—3	7305,247	13 688,79	

Serie 3.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl cm	Differenz
7155,112	000	7157,081	13 972,18	
84,355	0	86,333	915,30	56,88
.....				2 . 57,01
7243,740	3—5	7245,734	801,22	
73,847	000	75,849	744,10	57,12
7304,134	000—0	7306,144	687,11	56,99

Band V. Serie 1.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl cm	Differenz
7054,756	00	7056,698	14 170,93	
64,154	000	66,099	52,08	18,85
73,613	000	75,560	33,16	18,92
.....				3 . 19,03
7102,302	000—00	7104,257	14 076,07	
11,953	00	13,910	56,97	19,10
21,659	000	23,619	37,81	19,16

Serie 2.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
6911,390	000?	6913,293	14 464,89	
.....				2 . 25,12
35,476	000	37,386	14,65	25,09
47,570	5 *t*?	49,483	14 389,56	25,05
59,681	000	61,597	34,51	25,23
71,930	00	73,850	39,28	25,10
84,158	000	86,081	14,18	
.....				2 . 25,13
7008,760	000	7010,690	14 263,93	24,61
20,875	000	22,808	39,32	
.....				3 . 25,12
.....				
58,233	00	60,176	14 163,95	24,71
70,571	000 *N*	72,517	39,24	

Serie 3.

Wellenlänge in Luft	Intensität	Wellenlänge auf Vakuum reduziert	Wellenzahl/cm	Differenz
6992,190	000	6994,115	14 297,73	57,05
7020,204	000?	7022,137	240,68	56,68
48,257	000	50,197	184,00	
.....				3 . 56,91
.....				
7134,125	000—0	7136,087	013,28	56,88
63,201	000	65,172	13 956,40	56,83
92,489	1—2	94,468	899,57	

Im Ultrarot und im sichtbaren Gebiet ist eine Anzahl Absorptionsbanden des Wasserdampfes vorhanden, welche im Sonnenspektrum als atmosphärische Linien beobachtet werden. Der Gedanke liegt nahe, daß ein Suchen nach Serien mit gleichen Differenzen wie im Rotationsspektrum bei diesen Banden erfolgreich sein könnte. Beim Durchrechnen der atmosphärischen Linien des Sonnenspektrums wurde eine Anzahl Serien entdeckt. Im Wellenlängengehiet 6500 bis 9000 Å.-E. sind sehr genaue Messungen von W. F. Meggers[1]) angestellt, welche den Rechnungen zugrunde liegen. Die Wellenlängen für die Linien sind nach der Tabelle von W. F. Meggers und C. G. Peters[2]) auf das Vakuum reduziert. Die Serien über 9000 Å.-E. sind durch Werte aus den Messungen von Brackett[3]) ergänzt. Die Nummerierung der Serien und Einteilung

[1]) Publications of the Allegheny Observatory of the University of Pittsburg **6**, 13, 1919; vgl. Astrophys. Journ. **47**, 1, 1918.

[2]) Bull. Bur. Stand. **14**, 731, 1918—1919.

[3]) Astrophys. Journ. **53**, 121, 1921.

in Banden ist natürlich nur eine willkürliche, um die Übersicht zu erleichtern.

In Tabelle 2 sind die Differenzen der Serien zusammengestellt. Ich sehe davon ab, daß die Differenzen in einigen Serien nicht völlig konstant sind.

Tabelle 2.

	Serie 1	Serie 2	Serie 3
Band I	—	23,1	56,8
„ II	17,1	—	—
„ III	17,8	23,7	57,1
„ IV	18,0	24,9	57,0
„ V	19,0	25,1	56,9

Es soll darauf aufmerksam gemacht werden, daß T. Heurlinger[1]) im Ultraviolett Serien des Wasserdampfes mit Differenzen von etwa 34

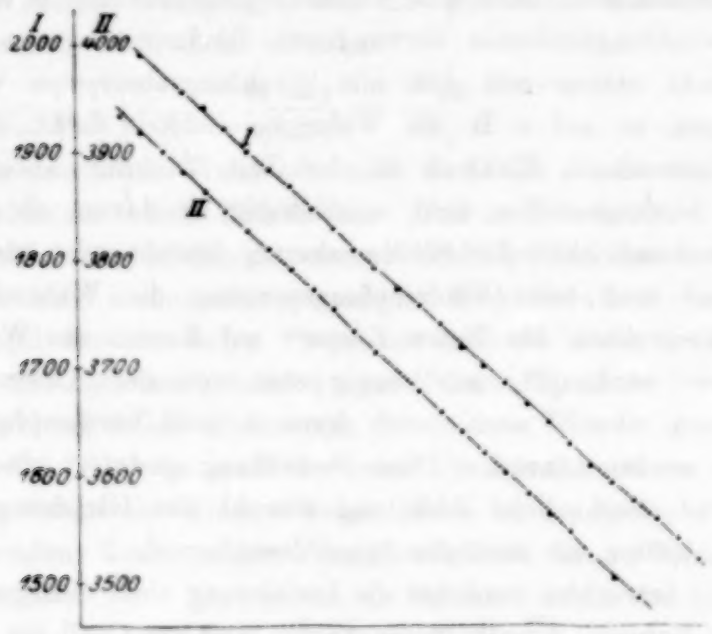


Fig. 1.

geordnet hat. Es ist auffallend, daß die Differenzen nahezu gerade die doppelten Werte haben wie die bei Serie I beobachteten, und der Träger dieser Spektren ein Gebilde darstellt, das etwa das halbe Trägheitsmoment der größten beim Wasserstoffmolekül vorkommenden besitzt. Es liegt nahe, als Träger dieser Spektren ein OH-Ion mit etwa dem halben Trägheitsmoment des größten des Wasserdampfes anzunehmen.

[1]) T. Heurlinger, Untersuchungen über die Struktur der Bandenspektren. Diss. Lund 1918.

Eine einfache kinetische Ableitung der Ionisierungs- und Dampfdruckgleichung.

Von **Richard Becker** in Berlin-Grunewald.

(Eingegangen am 29. August 1924.)

Es wird eine einfache und anschauliche kinetische Ableitung der bekannten Formeln für das Ionisierungs- und Dampfdruckgleichgewicht angegeben. Der für den Dampfdruck wesentliche Mechanismus wird charakterisiert durch die Annahme, daß die Zahl der Kondensationspunkte, die der feste Körper den Dampfatomen darbietet, übereinstimmt mit der Zahl seiner Oberflächenatome.

1. Für die Existenz eines thermischen Gleichgewichtes in einem teilweise ionisierten Gas genügt es bekanntlich nicht, daß die Zahl der pro Sekunde erfolgenden Bindungsprozesse gleich ist der Zahl der Ionisierungsprozesse. Man muß vielmehr [1]) darüber hinaus fordern, daß die mit Strahlungsemission verbundenen Bindungsvorgänge allein im Gleichgewicht stehen mit den mit Strahlungsabsorption verknüpften Ionisierungen, so daß z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmtes gebundenes Elektron in der Zeit dt unter Absorption von Strahlung herausgeworfen wird, unabhängig ist davon, ob gleichzeitig eine Wahrscheinlichkeit für Stoßionisierung besteht oder nicht. Ganz entsprechend muß beim Verdampfungsvorgang die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom des festen Körpers auf Kosten des Wärmeinhalts des Körpers verdampft, unabhängig sein von der Anwesenheit von Dampfatomen, obwohl auch durch deren Anprall Verdampfungsprozesse erzwungen werden können. Diese Bemerkung gestattet eine besonders einfache und anschauliche Ableitung sowohl der Gleichung der thermischen Ionisation wie auch der Dampfdruckformel.

2. Wir betrachten zunächst die Ionisierung eines einzigen, in einem Gefäß vom Volumen V enthaltenen Atoms, und zwar soll ein bestimmtes Elektron desselben die Möglichkeit haben, entweder frei oder in einer bestimmten Quantenbahn gebunden zu sein. p_1 sei das statistische Gewicht dieser Bahn, Q_1 die zugehörige Ionisierungsarbeit. Andere Zustände sollen vorerst nicht in Frage kommen. Wir vergleichen die Wahrscheinlichkeit $W(v)dv$ dafür, daß das Elektron frei ist und eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit besitzt, mit der Wahrscheinlichkeit W_1 dafür, daß es in der erwähnten Quantenbahn gebunden

[1]) Vgl. etwa R. Becker, ZS. f. Phys. **18**, 325, 1923, sowie Fowler, Phil. Mag. **47**, 257, 1924.

ist. Der Größe $W(v)dv$ entspricht ein Phasenvolumen $\int dx \dots dp_z$, wo $\int dx\,dy\,dz = V$ und $\int dp_x\,dp_y\,dp_z$ gleich dem Volumen einer Kugelschale vom Radius mv und der Dicke $m\,dv$ ist. Andererseits kommt der Quantenbahn ein Phasenvolumen $p_1 h^3$ zu, so daß [1])

$$\frac{W(v)\,dv}{W_1} = \frac{e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi V m^3 v^2\,dv}{e^{\frac{Q_1}{kT}} p_1 h^3}.$$

Durch Integration nach v von 0 bis ∞ folgt daraus

$$\frac{W_{\text{frei}}}{W_1} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{p_1 h^3} \cdot V e^{-\frac{Q_1}{kT}} \tag{1}$$

für das Verhältnis der durchschnittlichen Lebensdauern des freien und des gebundenen Zustandes. Bezeichnet $\alpha_{f \to 1}\,dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß das in Freiheit befindliche Elektron in der Zeit dt gebunden wird, und $\alpha_{1 \to f}\,dt$ diejenige, daß das gebundene Elektron in dt in Freiheit gesetzt wird, so ist offenbar

$$\frac{\alpha_{1 \to f}}{\alpha_{f \to 1}} = \frac{W_{\text{frei}}}{W_1}. \tag{2}$$

Jetzt seien anstatt des einen sehr viele derartige Atome in V enthalten und außerdem noch freie Elektronen. Und zwar sei:

N_1 = Zahl der neutralen Atome = Zahl der für eine Ionisierung in Betracht kommenden gebundenen Elektronen;

N_i = Zahl der ionisierten Atome = Zahl der Stellen, an denen ein freies Elektron gebunden werden kann;

N_f = Zahl der freien Elektronen.

Die Zahl der sekundlich unter Strahlungsemission erfolgenden Bindungsprozesse ist dann offenbar gleich $\alpha_{f \to 1} N_i N_f$, diejenige der entsprechenden Ionisierungen dagegen gleich $\alpha_{1 \to f} N_1$, so daß im Gleichgewicht

$$\alpha_{f \to 1} N_i N_f = \alpha_{1 \to f} N_1,$$

oder nach (2) und (1)

$$\frac{N_1}{N_i N_f} = \frac{p_1 h^3}{V(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot e^{\frac{Q_1}{kT}}. \tag{3}$$

[1]) Dieselbe Gleichung wird von Kramers (Phil. Mag. **46**, 836, 1923) benutzt, um einen quantitativen Zusammenhang herzustellen zwischen dem Absorptionsvermögen des Atoms für Strahlung der Frequenz $h\nu = Q + mv^2/2$ einerseits und dem elektronenabsorbierenden Querschnitt des Ions für Elektronen der Geschwindigkeit v andererseits. Der gleiche Zusammenhang wurde unabhängig auf etwas weniger elegante Weise kurz vorher vom Verf. (l. c.) und kurz nachher von Milne (Phil. Mag. **47**, 209, 1924) abgeleitet.

3. Das Ionisationsgleichgewicht in einer elektrisch neutralen Gasmasse folgt aus (3) durch die Bedingung der elektrischen Neutralität

$$N_i = N_f, \tag{4}$$

d. h. Zahl der Ionen gleich Zahl der freien Elektronen.

Alsdann wird, wenn x den Ionisationsgrad, P den Gesamtdruck und $N = N_1 + N_i$ die Gesamtzahl der Atome bezeichnen:

$$N_f = N_i = xN; \quad N_1 = (1-x)N; \quad PV = N(1+x)kT. \tag{5}$$

Damit geht (3) über in die bekannte Sahasche Gleichung:

$$\log \frac{x^2}{1-x^2} P = -\frac{Q_1}{kT} + \frac{5}{2}\log T + \log \frac{(2\pi m)^{3/2} \cdot k^{5/2}}{p_1 h^3}. \tag{6}$$

4. Die Dampfdruckformel. Die Resultate des 2. Abschnitts über die verschiedenen Zustände eines Elektrons lassen sich unmittelbar übertragen auf diejenigen eines Atoms, welches die Wahl hat, sich entweder als Dampfatom frei zu bewegen oder aber an einer ganz bestimmten Stelle der Oberfläche eines aus gleichen Atomen bestehenden festen Körpers zu kondensieren, wo es in einem Zustand mit der Verdampfungswärme Q_1 und dem statistischen Gewicht p_1 quantenhaft gebunden werden kann. m ist in diesem Falle natürlich die Masse des betreffenden Atoms. Genau wie im Falle des Elektrons geben jetzt die Formeln (1) und (2) das Verhältnis der Verweilzeiten im freien und gebundenen Zustand, sowie das Verhältnis $\alpha_{1 \to f} : \alpha_{f \to 1}$ für die Wahrscheinlichkeit der Verdampfung des gebunden zu der Wahrscheinlichkeit der Kondensation des freien Atoms. Somit bleibt auch die zur Gleichung (3) führende Überlegung unverändert in Geltung, wenn wir sinngemäß setzen:

N_1 = Zahl derjenigen Atome des festen Körpers, welche in einem bestimmten Augenblick für eine Verdampfung in Frage kommen, also gleich der Zahl der Oberflächenatome;

N_i = Zahl der Stellen, welche die Oberfläche des Körpers den Dampfatomen zur Kondensation darbietet;

N_f = Zahl der Dampfatome.

Jedoch müssen wir jetzt an Stelle der „Neutralitätsgleichung" (4) eine andere einführen, welche dem spezifischen Charakter des Verdampfungsvorgangs Rechnung trägt. Dazu nehmen wir an, daß

$$N_i = N_1 \tag{7}$$

ist. Da N_1 offenbar gleich der Zahl der an der Oberfläche befindlichen Atome des festen Körpers ist, so besagt die Hypothese (7): Die Zahl

der „Kondensationspunkte", welche der feste Körper seinem Dampf bietet, ist gleich der Zahl der Oberflächenatome des Körpers.

Bedeutet $p = k N_f T/V$ den Dampfdruck, so liefert (3) mit (7) sogleich die bekannte Formel von Sackur-Stern-Tetrode

$$\log p = -\frac{Q_1}{kT} + \frac{5}{2}\log T + \log \frac{(2\pi m)^{3/2} \cdot k^{5/2}}{p_1 h^3}, \tag{8}$$

wenn man, wie es die elastische Bindung der Atome verlangt, in der untersten Quantenbahn $p_1 = 1$ setzt.

5. Die Gleichungen (6) und (8) gelten nur bei Temperaturen, welche so tief sind, daß in Gleichung (6) angeregte Zustände der Atome, in Gleichung (8) die spezifische Wärme des Kondensats vernachlässigt werden können. Sobald diese Vernachlässigungen nicht mehr erlaubt und demnach außer dem Quantenzustand 1 auch die übrigen Zustände 2, 3, 4 usw. zu berücksichtigen sind, hat man für jeden Anregungszustand eine Gleichung vom Typus (3) aufzustellen, indem man den Index 1 durch den Index n der betreffenden Bahn ersetzt.

Im Falle der Ionisierung ist dann die zweite Gleichung (5) zu ersetzen durch $\sum_n N_n = (1 - x) N$. Im Falle des Dampfdruckes muß man jetzt anstatt (7) annehmen, daß

$$\sum_n N_n = N_i \tag{7a}$$

ist. In beiden Fällen ändern sich dadurch die Gleichungen (6) und (8) nur insofern, als auf der rechten Seite das Glied

$$-\log \sum_n \frac{p_n}{p_1} e^{-\frac{Q_1 - Q_n}{kT}}$$

additiv hinzutritt, welches bekanntlich im ersten Falle der Anregungsenergie der Atome [1]), im zweiten dagegen der spezifischen Wärme des Kondensats [2]) quantitativ Rechnung trägt.

6. Es muß bei der im 4. Abschnitt gegebenen Ableitung der Dampfdruckformel auffallen, daß die in physikalischer Hinsicht ungemein charakteristische Hypothese (7) bzw. (7a) eingeführt werden mußte, obwohl diese in keiner der sonst bekannten Ableitungen auftritt. Das ist zwar nicht weiter verwunderlich im Hinblick auf diejenigen Methoden, bei denen die Gleichung (8) gewonnen wird durch Einführung eines Absolutwertes

[1]) Vgl. z. B. R. Becker, l. c.

[2]) Vgl. etwa Herzfeld, Enc. math. Wissensch. V, 1, S. 974.

für die Entropie des Dampfes, weil alsdann der Verdampfungsprozeß als solcher in der Betrachtung überhaupt nicht vorkommt[1]). Aber auch diejenigen Ableitungen, welche auf die Berechnung eines Absolutwertes der Entropie verzichten und dementsprechend den Verdampfungsvorgang direkt zum Gegenstand der kinetischen Betrachtung machen, erreichen ihr Ziel, ohne die Gültigkeit von (7) vorauszusetzen[2]).

Die Notwendigkeit, bei der oben gegebenen Ableitung die Annahme (7) einzuführen, entsteht dadurch, daß hier — wenn auch in idealisierter Weise — die wirklichen Vorgänge an der Oberfläche in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, während insbesondere der statistische Ansatz von Tetrode sich auf das ganze Volumen des festen Körpers bezieht. Gegenüber der Zahl der im festen Körper überhaupt enthaltenen Atome ist aber die Zahl seiner Oberflächenatome verschwindend klein, so daß sie trotz ihrer Bedeutung für die wirkliche Kinetik der Verdampfung bei dem allgemeinen statistischen Ansatz vernachlässigt werden können[3]).

[1]) Es sind das die Ableitungen von Sackur, Nernst-Festschrift 1912, S. 405; Tetrode, Ann. d. Phys. **38**, 434 und **39**, 255, 1912; Planck, Wärmestrahlung, 4. Aufl., S. 222; Brody, ZS. f. Phys. **6**, 79, 1921.

[2]) Vgl. insbesondere Stern, ZS. f. Elektroch. **25**, 66, 1919; Tetrode, Proc. Amst. **17**, 1167, 1915; Ehrenfest und Trkal, Proc. Amsterdam **23**, 162, 1920; Herzfeld, Phys. ZS. **22**, 186, 1921 und Enc. math. Wissensch. V, 1, S. 1037.

[3]) An die Behandlung des Dampfdrucks in Abschnitt 4 läßt sich diejenige der Adsorption eines Gases an der Oberfläche eines festen Körpers unmittelbar anschließen, solange es sich um höchstens monomolekulare Schichten und um tiefe Temperaturen handelt. Dann ist natürlich N_1 gleich der Zahl der adsorbierten und N_f gleich der Zahl der freien Gasmoleküle; dagegen ist (7) jetzt zu ersetzen durch die Abschirmungsgleichung $N_f = Z - N_1$, wo die Konstante Z etwa die Zahl der bei völliger Bedeckung der Oberfläche adsorbierten Moleküle bedeutet. Für $N_1 \ll Z$ resultiert dann genau die für tiefe Temperaturen kürzlich von Frenkel angegebene Adsorptionsgleichung (ZS. f. Phys. **26**, 117, 1924, insbesondere Gl. 3c).

Zur Systematik der Bandenspektra.

Von **R. Mecke** in Bonn.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 23. August 1924.)

Die Untersuchung der zweiten positiven Stickstoffgruppe führt auf ein Quintettsystem, dessen einzelne Terme mittels der Kombinationsbeziehungen isoliert werden können und die sich durch eine von den bisherigen abweichende Formel darstellen lassen. Ein Vergleich mit dem Funkenspektrum des Moleküls, den negativen Banden, gestattet dann auf Grund von gewissen Intensitätsanomalien, den einzelnen Termen innere Quantenzahlen zuzuordnen. — Es wird gezeigt, daß die Linien- und Bandenspektren nach gleichen Gesichtspunkten durch die Angabe der drei Quantenzahlen K, J, R charakterisiert werden können. Der Wechselsatz, die Auswahl- und Strukturregeln können dann auch an dem vorliegenden Material über Bandenspektra erneut bestätigt werden.

Die Erkenntnis von der Multiplettstruktur der Serienterme hat bekanntlich bei den Linienspektren zu einer einheitlichen, vorläufig allerdings noch rein formalen Systematik dieser Spektra geführt, die aber immerhin schon wichtige Rückschlüsse über den Aufbau der Atome gestattet hat. Eine derartige Systematik fehlte nun leider bei den Bandenspektra noch gänzlich. Gemeinsame Züge im Aufbau der Atom- und Molekülspektren und der formale Charakter der Systematik ließen zwar vermuten, daß hier nach denselben Gesichtspunkten vorzugehen wäre. Versuche aber, die in dieser Richtung unternommen wurden, scheiterten zunächst vollständig; denn bei dem Linienreichtum und der Kompliziertheit der Bandenspektra, die an die Spektralapparate und die Experimentierkunst stets die höchsten Anforderungen stellten, stieß eine eingehende Analyse auf die größten Schwierigkeiten. Das vorliegende experimentelle Tatsachenmaterial erwies sich dann auch meistens als ungeeignet zur Durchführung einer derartigen Aufgabe. Immerhin ist, gerade in den letzten Jahren, durch Arbeiten von Hulthén, Kratzer und einer Reihe von Untersuchungen am hiesigen Institut das brauchbare Material wesentlich ergänzt worden, so daß ein Versuch in dieser Richtung jetzt mehr Aussicht auf Erfolg bieten dürfte. Den entscheidenden Fortschritt dürfte hier vielleicht die uns geglückte vollständige Analyse der zweiten positiven Stickstoffgruppe[1]) im Zusammenhang mit einer zu dieser parallel

[1]) R. Mecke und P. Lindau, Phys. ZS. **25**, 277—278, 1924. Inzwischen ist auch eine Arbeit von E. Hulthén und G. Johansson (ZS. f. Phys. **26**, 308—322, 1924) über dasselbe Spektrum erschienen, die im wesentlichen zu denselben Ergebnissen gelangen, doch nur fünf Banden untersuchen.

laufenden Untersuchung über die negativen Stickstoffbanden[1]) bringen. Solange wir aber noch bei den Bandenspektra mit dem Mangel an umfangreichen Material zu kämpfen haben, sollen auch die folgenden Ausführungen nur einen Beitrag zur Lösung der Frage darstellen, inwieweit wir berechtigt sind, die von der Systematik der Linienspektren her bekannten Regeln auf die Bandenspektren zu übertragen. Die Berechtigung einer derartigen Übertragung von Regeln, die immerhin auf relativ gut fundierten Atommodellen basiert sind, auf Molekülspektra, ist keineswegs von vorherein gegeben; es ließen sich sehr wohl eine Reihe von Bedenken dagegen anführen. Stellen wir aber bei dem rein formalen Charakter einer derartigen Systematik diese Bedenken zunächst zurück, so wollen wir doch an der Hand des vorliegenden Materials zeigen, daß hier die Analogie zwischen Linien- und Bandenspektren sehr weit durchgeführt werden kann. Denn auch hier soll ein Spektrum stets durch die Angabe der drei Quantenzahlen R, J und K charakterisiert sein mit den bekannten Deutungen von K als Drehimpuls des Molekülkernes, der hier ja die Lichtenergie $-h\nu-$ emittiert, von R als Impuls des Elektronenrumpfes und von J als totales Impulsmoment. An die Spitze unserer Ausführungen stellen wir deshalb im engen Anschluß an Landé die bekannten Struktur- und Auswahlregeln nebst Einführung einer zweckmäßigen Terminologie und bringen dann als Beispiel für die Systematik den Aufbau der zweiten positiven und der negativen Stickstoffgruppe, die beide wegen ihrer charakteristischen Eigenschaften eine eingehende Untersuchung ihres Aufbaues erforderlich machen. Daran anschließend soll denn auch das andere vorliegende Material zur Prüfung herangezogen werden. Da ferner die negative Stickstoffgruppe uns sichere Anzeichen für einen Wechsel von ungerader zu gerader Multiplizität beim Übergang vom Bogen- zum Funkenbandenspektrum bringt, wollen wir die Analogie in der Systematik zwischen Linien- und Bandenspektra sogar noch auf den Wechselsatz ausdehnen, möchten aber hierin, solange nicht vollständigeres Material vorliegt, nur eine vorläufige Vermutung erblicken.

1. Die Landéschen Struktur- und Auswahlregeln. Für die Systematik wählen wir die Bezeichnungsweise von Landé[2]): Zunächst ist einleuchtend, daß die Stelle der sogenannten Hauptquantenzahl n hier die Oszillationsquantenzahl übernimmt, die wir ja bereits gewohnt sind

[1]) M. Fassbender, Diss. Bonn, erscheint in ZS. f. Phys.
[2]) A. Landé, ZS. f. Phys. 15, 189, 1923.

mit demselben Buchstaben zu bezeichnen. Die Numerierung der einzelnen Bandenlinien erfolge nun stets nach der Quantenzahl des Kernimpulses K, der immer halbzahlig zu nehmen ist, d. h. wir setzen $K = k - {}^1/_2 = m - {}^1/_2$; es ist also im folgenden stets

$$K = m^* = m - {}^1/_2. \tag{1}$$

Für den Gesamtimpuls aber, welcher bisher meistens mit m bezeichnet wurde, wählen wir jetzt lieber den Buchstaben j und nehmen mit Landé bei geraden Multipletts $J = j$, bei ungeraden Multipletts hingegen $J = j + {}^1/_2$ an. Ferner sei wieder $R = r/2$, wo r die permanente Vielfachheit des Multiplettsystems darstellt und somit eine für das ganze Bandensystem charakteristische Größe ist. Wir koordinieren also hier zu den drei Zahlen K, J, R die entsprechenden Quantenzahlen m, j und r. Die Komplexstruktur einer Bande ist dann eindeutig festgelegt durch K (bzw. m) und die innere Quantenzahl J (bzw. j), welche in ganzzahligen Schritten der Strukturregel

$$|K - R| + {}^1/_2 \leqq J \leqq |K + R| - {}^1/_2 \tag{2}$$

zu folgen hat. Daneben gelten dann noch die drei Auswahlregeln

$$K \begin{cases} K+1 \\ K-1 \end{cases} \qquad J \begin{cases} J+1 \\ J \\ J-1 \end{cases} \qquad R \begin{cases} R+1 \\ R \\ R-1 \end{cases}, \tag{3}$$

und zwar liegt speziell bei dem Quantensprung $J \longrightarrow J - 1$ ein positiver oder R-Zweig vor, für $J \longrightarrow J + 1$ ein negativer oder P-Zweig und schließlich für $J \longrightarrow J$ ein Null- oder Q-Zweig, somit ändert sich die Laufzahl K also auch bei den Q-Zweigen stets um eine Einheit. Als Termbezeichnung führen wir ferner die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} R(J) &= F_i(J) - f_i(J-1) \\ P(J) &= F_i(J) - f_i(J+1) \\ Q(J) &= F_i(J) - f_i(J) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ein, hierbei soll der Index i stets die (konstante) Differenz $J - K$ angeben, so daß es jetzt ein leichtes ist, von der Zählweise nach J zu der nach K bzw. m überzugehen. Bemerkt sei schon hier, daß für die Q-Zweige wegen der Auswahlregeln i des Anfangstermes stets verschieden vom i des Endtermes ist, worauf ich weiter unten noch zurückkommen werde. Ferner ist i bei geraden Multipletts halbzahlig, bei ungeraden aber ganzzahlig.

2. Die Kombinationsbeziehungen der zweiten positiven Stickstoffgruppe. Wie bereits erwähnt, kann die Analyse dieser Bandengruppe, wenigstens soweit die Kombinationsbeziehungen in Betracht

kommen, im wesentlichen als abgeschlossen gelten. Sie hat uns bisher drei verschiedene Anfangsterme ($n' = 0, 1, 2$) und sechs Endterme ($n = 0$ bis 5) geliefert. Inzwischen ist auch die ausführliche Arbeit von Herrn Lindau[1]) veröffentlicht worden und die Ausdehnung auf die beiden anderen Anfangsterme ($n = 3$ und 4) in Angriff genommen. Um hier den Zusammenhang herzustellen, seien nochmals die für das folgende in Betracht kommenden Resultate der Analyse kurz zusammengestellt.

Bekanntlich bestehen die nach Violett abschattierten Banden dieser Stickstoffgruppe aus zwei Serien von Tripletts, die wir als P- und R-Zweige deuten konnten und die von Violett nach Rot mit R_1, R_2, R_3 bzw. P_1, P_2, P_3 bezeichnet wurden. Diese Bezeichnung der Indizes wollen wir auch hier zunächst beibehalten und ändern sie erst am Schluß im obigen Sinne der allgemeinen Systematik um. Der P_1- und R_1-Zweig bestehen nun ihrerseits wieder aus Dubletts verschiedener Intensität und abwechselnder Intensitätsfolge, indem abwechselnd die nach Violett oder die nach Rot zu gelegene Komponente die stärkere ist. Beim R_2- und P_2-Zweig macht sich infolge von mangelnder Auflösung der Komponenten dieser Intensitätswechsel nur durch eine alternierende Schwerpunktsverschiebung der Linien bemerkbar[2]). Der R_3- und P_3-Zweig hingegen scheinen einfach zu sein und zeigen keine Intensitätsschwankungen. Lassen wir diese Aufspaltung vorläufig noch unberücksichtigt, so gehorchten bekanntlich die drei Triplettkomponenten den folgenden Kombinationsbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned} R_i(m+1) - P_i(m-1) &= F_i(m+1) - F_i(m-1) = \Delta F_i(m) \\ R_i(m) \quad\; - P_i(m) \quad\; &= f_i(m+1) - f_i(m-1) = \Delta f_i(m) \end{aligned}\right| \quad (5)$$

welche unmittelbar aus den beiden Ansätzen für den R- und P-Zweig (Gl. 4) folgen.

Die Richtigkeit dieser Beziehungen wurde ferner noch erhärtet durch eine Reihe von Störungen, die der Anfangsterm für gewisse Werte von m erfuhr, und die daher bei sich entsprechenden Linien des P_i- und R_i-Zweiges gleichzeitig auftreten müssen. Die Kombinationsbeziehungen legen nun das Bandensystem und gleichzeitig auch die richtige Numerierung der Bandenlinien fest. Besonders schließen sie die naheliegende Deutung

---

[1]) P. Lindau, ZS. f. Phys. **26**, 343—370, 1924.

[2]) Gestützt wird diese Annahme durch zwei Störungen, R_2 (16), P_2 (17) und R_2 (21), P_2 (22), der zweiten Längsserie, die anomale Aufspaltung in zwei Komponenten verschiedener Intensität zeigen. Die von P. Lindau, l. c. 352 als große Störung von R_1 (21), P_1 (22) aufgefaßte anomale Aufspaltung ist nämlich als Störung von R_2 (21), P_2 (22) zu deuten. Es folgt dies sofort aus den Kombinationsbeziehungen für Δf_1 und Δf_2.

aus, wegen des eigenartigen Intensitätswechsels der Komponenten durch Überschlagen jeder zweiten Linie drei weitere P- und R-Zweige einzuführen.

Es erhebt sich nun aber die Frage, wie die einzelnen Komponenten einander zuzuordnen sind. Zu diesem Zwecke greife ich aus dem vorliegenden Zahlenmaterial eine beliebige Bande heraus, und zwar die Bande λ 3710, weil hier die einzelnen Serien am weitesten bis zur Kante verfolgt wurden[1]). Abgesehen von den Störungen, die für alle Banden

Bande 3710.

m	ΔF_1	ΔF_2	ΔF_3	ΔF_2 [2]) ber.	ΔF_3 [2]) ber.	Δf_1	Δf_2	Δf_3
2			11,7		11,6			9,6
3			19,6		19,4			16,6
4			27,4		27,2			23,5
5		31,5	35,1	31,5	34,8			30,4
6		38,5	42,9	38,5	42,8			37,0
7		45,4	50,2	45,6	50,3			43,5
8		—	57,6	52,7	57,7		46,2	50,1
9		59,6	65,1	59,7	65,0	49,7	52,4	56,6
10	62,6	66,8	72,4	66,8	72,3	55,7	58,5	63,0
11	69,5	73,8	79,7	73,8	79,5	61,5	65,0	69,5
12	76,1	81,1	86,8	80,9	86,7	68,1	71,1	75,8
13	83,5	88,1	94,0	87,9	93,9	73,5	77,5	82,2
14	89,8	95,3	101,3	95,0	101,3	79,6	83,6	88,7
15	96,8	102,2	108,5	101,1	108,4	85,5	89,8	94,9
16	103,6	109,3	115,6	109,1	115,4	91,9	95,9	101,2
17	110,3	116,2	122,7	116,2	122,5	97,5	102,3	107,5
18	117,3	123,5	—	123,3	129,7	103,6	108,2	113,6
19	—	130,3	136,9	130,3	136,8	109,6	114,4	—
20	131,4	137,3	—	137,4	143,0	—	120,7	126,2
21	—	144,7	151,1	144,5	151,1	122,1	127,0	132,5
22	145,5	151,7	158,3	151,5	158,1	128,6	133,2	138,8
23	—	158,6	165,1	158,6	165,2	134,2	139,4	145,0
24	159,3	165,6	172,3	165,6	172,3	—	145,6	151,6
25	—	172,7	179,2	172,7	179,4	146,2	151,7	157,3

der dritten Längsserie charakteristisch sind, zeigt sie gegenüber den anderen untersuchten Banden keine Besonderheiten. Ferner interessieren uns hier nicht die Werte der Serienkonstanten für die verschiedenen Anfangs- und Endzustände. Vielmehr soll diese ganze Konstantenberechnung einer weiteren Mitteilung vorbehalten bleiben. Tabelle 1 gibt nur im Auszug einige Kombinationsbeziehungen des Anfangs- und

[1]) Auch E. Hulthén und G. Johansson haben ihre Banden soweit verfolgen können. Die Struktur ist hier dieselbe wie bei den Banden $\lambda\lambda$ 3710 und 3942.

[2]) Berechnet nach Formel (16).

des Endzustandes dieser Bande. Hier haben wir jedoch eine Änderung der Numerierung gegenüber früher vorgenommen, indem wir nicht die drei Linien eines Tripletts derselben Laufzahl m zuordnen, sondern wir haben die Zählung für P_3 bzw. R_3 um eine Einheit erniedrigt, für P_1 bzw. R_1 um eine Einheit erhöht, so daß jetzt die Linie P_3 bzw. R_3 des folgenden Tripletts und die Linie P_1 bzw. R_1 des vorhergegangenen Tripletts mit P_2 bzw. R_2 dieselbe Laufzahl besitzen. Die Richtigkeit dieser Zuordnung werden wir weiter unten belegen. Werten wir nun diese Zahlen als Funktion von m aus, so findet man, daß für kleine Werte von m (<9) die Differenzen $P_i - P_i$ sehr gut durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta F_1(m) \cong 6{,}6\ (m-{}^1/_2) & \Delta f_1(m) \cong 5{,}9\ (m-{}^1/_2) \\ \Delta F_2(m) \cong 7{,}06\,(m-{}^1/_2) & \Delta f_2(m) \cong 6{,}17\,(m-{}^1/_2) \\ \Delta F_3(m) \cong 8{,}0\ (m-{}^1/_2) & \Delta f_3(m) \cong 6{,}8\ (m-{}^1/_2) \end{array}\right\} \quad (6)$$

darstellbar sind, für $\Delta F_2(m)$ und $\Delta f_2(m)$ gelten sie sogar noch für große m.

Für größere Werte von m treten aber bei ΔF_1, ΔF_3 bzw. Δf_1, Δf_2 Abweichungen auf in dem Sinne, daß die Differenzen asymptotisch gemeinsamen Werten zustreben, d. h. es wird für sehr große m

$$\left.\begin{array}{l} \Delta F_1(m+1) = \Delta F_2(m) = \Delta F_3(m-1); \\ \Delta f_1(m+1) = \Delta f_2(m) = \Delta f_3(m-1). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Es ist nun schwer, dieses Verhalten der drei Serien durch die bekannten Bandenformeln darzustellen. Die von Kratzer[1]) für diese Art von Spektren, bei denen nämlich die Komponenten mit wachsender Laufzahl zueinander hinkonvergieren, angewandte Formel $b(\sqrt{j^2-\sigma^2}-\varepsilon)^2$ (j totales Impulsmoment), mit einer Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks nach reziproken Werten von $m = j$ stellt zwar obige Beziehungen für große Werte von m gut dar, versagt jedoch bei kleinen Werten gänzlich. Auf Grund der folgenden Überlegungen läßt sich aber eine Formel angeben, die das Verhalten der Serien in ihren Hauptzügen wiedergibt, allerdings bis zu einem gewissen Grade Verzicht darauf leistet, die Konstanten modellmäßig zu erklären. Wir zerlegen nämlich zunächst in erster Annäherung die Energie unseres Moleküls in einen Anteil, der nur die Rotationsenergie enthält, die erfahrungsgemäß die Form Bm^{*2} annimmt, und in einen von Rotation freien Arteil E_0, der neben der Oszillationsenergie auch die Elektronenenergie enthält, für

[1]) A. Kratzer, ZS. f. Phys. **23**, 298—323, 1924; H. Kramers u. W. Pauli, ZS. f. Phys. **13**, 351, 1923.

eine bestimmte Bande also eine Konstante darstellt. Um jetzt in weiterer Annäherung die Wechselwirkungsglieder zwischen beiden Anteilen zu erhalten, wird man störungstheoretisch so vorgehen, daß man die Gesamtenergie [1]) als Potenzreihe von $W_0 = E_0 + B m^{*2}$ darstellt:

$$W = W_0 + \lambda_1 W_0^2 + \lambda_2 W_0^3 \cdots \tag{8}$$

Berücksichtigt man aber, daß bei der Auswertung der Phasenintegrale, die ja die Quantenzahlen festlegen, stets zunächst $\sqrt{W}$ als Funktion der Quantenzahlen auftritt, so liegt die Vermutung nahe, daß eine Reihenentwicklung nach $\sqrt{W_0}$ eine bessere Konvergenz aufweist. Wir machen daher jetzt den Ansatz

$$\sqrt{W} = C_0 + C_1 \sqrt{W_0} + C_2 (\sqrt{W_0})^2 \cdots \tag{9}$$

und nach Quadrieren dieser Reihe erhalten wir für die Molekülenergie den Ausdruck

$$W = \alpha + \beta \sqrt{W_0} + \gamma W_0 \cdots \tag{10}$$

Bei großem E_0 und kleinen Werten der Rotationsenergie $B m^{*2}$ geht die Gleichung durch Reihenentwicklung in die bekannte Bandenformel

$$W = E_0 + \gamma B \left(1 + \frac{\beta}{2\gamma\sqrt{E_0}}\right) m^{*2} \cdots \tag{11}$$

über, aus der nun die Bedeutung der einzelnen Koeffizienten ersichtlich wird. Zunächst enthält γB in bekannter Weise das Trägheitsmoment des Moleküls; der Faktor γ gibt somit den Bruchteil an, wieviel von der gesamten Rotationsenergie auf den Molekülkern entfällt. Es muß also für den Fall eines zweiatomigen Moleküls ohne Elektronenimpuls den Wert 1 annehmen. Ferner müssen wir m^* mit der Impulsquantenzahl des Kernes identifizieren. β ist eine Konstante, auf die weiter unten zurückgekommen wird, sie kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Das Wechselwirkungsglied zwischen Oszillationsenergie und m in der Form $\gamma B = b_0 - b_1 n$ erhält man erst bei Hinzunahme von höheren, hier vernachlässigten Gliedern von W_0. Bilden wir jetzt unser

$$\Delta F(m^*) = 4\gamma B \left(1 + \frac{\beta}{2\gamma\sqrt{E_0}}\right) m^* = 4 b m^*, \tag{12}$$

so zeigt ein Vergleich mit den obigen Serienformeln (6), daß auch beim Stickstoff diese Quantenzahl halbzahlig, $m^* = m - {}^1/_2$, anzusetzen ist; da bisher bei den Elektronenschwingungsspektren, wahrscheinlich auch

[1]) Die Energien sollen hier stets als Frequenzen, Erg/h, gemessen werden.

bei den ultraroten Kernschwingungsspektren, kein Fall[1]) bekannt geworden ist, wo dies nicht zutrifft, so müssen wir jetzt in der Halbzahligkeit des Kernimpulses eine allgemein gültige Regel erblicken.

Quantitative Schlüsse über den modellmäßigen Aufbau des Moleküls lassen sich zunächst aus dem Energieansatz noch nicht ziehen. Wir können nur noch folgern, daß unter Umständen auch das Elektronensystem Beiträge zur Rotationsenergie zu liefern vermag, daß also Bm^{*2} Werte annehmen kann, die jetzt mit E_0 durchaus vergleichbar werden, γ somit eine relativ kleine Größe darstellt. Wir entwickeln daher unsere Gleichung (10) jetzt für große m^* und $Bm^{*2} > E_0$ und erhalten

$$W = E_0 - \beta\sqrt{E_0} + \beta\sqrt{B}\,m^* + \gamma B m^{*2} + \frac{1}{2}\frac{\beta E_0}{\sqrt{B}\,m^{*2}}, \qquad (13)$$

eine Formel, die mit der aus dem Ausdruck $b(\sqrt{j^2-\sigma^2}-\varepsilon)^2$ folgenden formal identisch ist. Für $\Delta F_i = W(m+1) - W(m-1)$ erhält man dann

$$\Delta F_i(m^*) = 4b\left(m^* + \frac{\beta_i}{2\gamma\sqrt{B}}\right) - \frac{\beta_i E_0}{\sqrt{B}\,(m^{*2}-1)} \cdots, \qquad (14)$$

und soll jetzt für große m^* asymptotisch die Bedingung Gleichung (7) gelten, so folgt daraus die Konstantenbeziehung

$$\beta_1 - \beta_2 \cong \beta_2 - \beta_3 \cong 2\gamma\sqrt{B}. \qquad (15)$$

Aus der strengen Gültigkeit der Formel (12) für große Werte von m schließen wir dann weiter auf $\beta_2 \cong 0$, so daß jetzt unser Energieausdruck Gleichung (10) für die drei Terme des Anfangs- und Endzustandes die Form annimmt

$$\left.\begin{aligned} F_1(m) &= E_1 + b\left(\sqrt{m^{*2} + \frac{E_0}{B}} - 1\right)^2 \\ F_2(m) &= E_2 + b\,m^{*2} \\ F_3(m) &= E_3 + b\left(\sqrt{m^{*2} + \frac{E_0}{B}} + 1\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

[entsprechend für $f_i(m)$], die formal wieder mit dem Ausdruck $b(\sqrt{j^2-\sigma^2}-\varepsilon)^2$ übereinstimmt. Beim Stickstoff ist $\sqrt{\frac{E_0}{B}} \sim 9$, so daß Gleichung (12) nur für $m < 9$ gilt.

Soviel nur sei über die anzuwendende Bandenformel mitgeteilt, die als rein empirische Formel zunächst nur die Aufgabe zu erfüllen hat, die Bandenserien mit ihren wesentlichen Eigenschaften darzustellen.

---

[1]) Die Heliumbanden schließen wir zunächst aus, da wir dieselben etwas anders deuten wollen als A. Kratzer.

Wir behaupten nun, daß auch die zweite positive Stickstoffgruppe als Quintettsystem den obigen der Systematik der Linienspektren entnommenen Regeln sich einfügt, und haben jetzt die entsprechende Zuordnung der einzelnen Bandenlinien vorzunehmen. Wichtig ist zunächst der Nachweis, daß J bei geraden Multiplettsystemen ganzzahlig ist, bei ungeraden Systemen jedoch mit K zusammen halbzahlig. Wir können diesen Nachweis aber leicht führen unter Hinzuziehung der negativen Stickstoffbanden zum Vergleich mit den positiven Banden.

3. Die negative Stickstoffgruppe. Nach den Untersuchungen von Wien wissen wir, daß die negativen Stickstoffbanden von positiv geladenen Stickstoffmolekülen ausgesandt werden, die positiven Banden jedoch vom neutralen Molekül. Die negativen Banden stellen also ein Funkenspektrum des Stickstoffmoleküls dar und wir haben, wenn unsere Behauptung richtig ist, auf Grund des Verschiebungssatzes ein System von gerader Multiplizität zu erwarten. Dieses ist nun in der Tat auch der Fall, denn die Analyse zeigt ein Spektrum, das ganz dem Typus des Cyanspektrums entspricht, also ein Dublettsystem [1]) bildet. Sonst scheinen die Einflüsse der Ionisierung, wenigstens die auf den Kern, nicht so einschneidender Art zu sein, wie wir sie von den Linienspektren her gewohnt sind, denn sowohl Oszillations- als auch Rotationsenergie haben sich nur relativ wenig vergrößert, besonders ist aber hier die eigenartige Intensitätsverteilung in den R- und P-Zweigen erhalten geblieben. Bei der einfacheren Struktur des Spektrums war jetzt die Auflösung der Banden bis zur Kante hin eine vollkommene und die wechselnde Intensitätsfolge zeigt sich hier denn auch in besonders schöner Weise, und zwar auf eine Weise, die sofort die andere Zuordnung der Linien erkennen läßt. Wie die Fig. 1 zeigt, besteht jetzt jede Bandenlinie aus zwei starken oder zwei schwachen Komponenten, die abwechselnd aufeinander folgen. Bei der Nullinie tritt aber in der Intensitätsfolge ein Sprung auf, indem auf letzere, die aus schwachen Komponenten bestehen sollt, im P-Zweig eine weitere schwache Linie folgt und dann erst wieder eine starke usw. Auf Grund der Kombinationsbeziehungen sind wir auch hier gezwungen, die Linien durchlaufend zu numerieren. Der Sprung in der Intensitätsfolge erklärt sich dann leicht zusammen mit der unsymmetrischen Lage der Störungen und dem Ausfallen nur einer Linie wie beim Cyanspektrum durch das Übereinandergreifen der Komponenten in dem einen Zweig (P-Zweig). Wir müssen nur die Kom-

[1]) M. Fassbender, Diss. Bonn. Frl. Fassbender schulde ich Dank für die Mitteilung dieser Resultate ihrer Untersuchungen.

ponenten in der angegebenen Weise zusammenfassen, so daß also die beiden Zweige spiegelbildlich zueinander sind und gewissermaßen ein Umklappen der Komponenten stattfindet. Bei dieser Zusammenfassung zählen wir jetzt aber die Bandenlinien nach den inneren Quantenzahlen J, die ja auf Grund der Strukturregel bei einem Dublettsystem durch $J = K \pm {}^1/_2$ gegeben sind, somit also ganze Zahlen darstellen. In der Figur sind diese Quantenwerte von J und K angegeben, die das Molekül jedesmal im Anfangszustand besitzt, die Endzustände unterscheiden sich dann von diesen Zahlen im R-Zweig um -1 und im P-Zweig um $+1$.

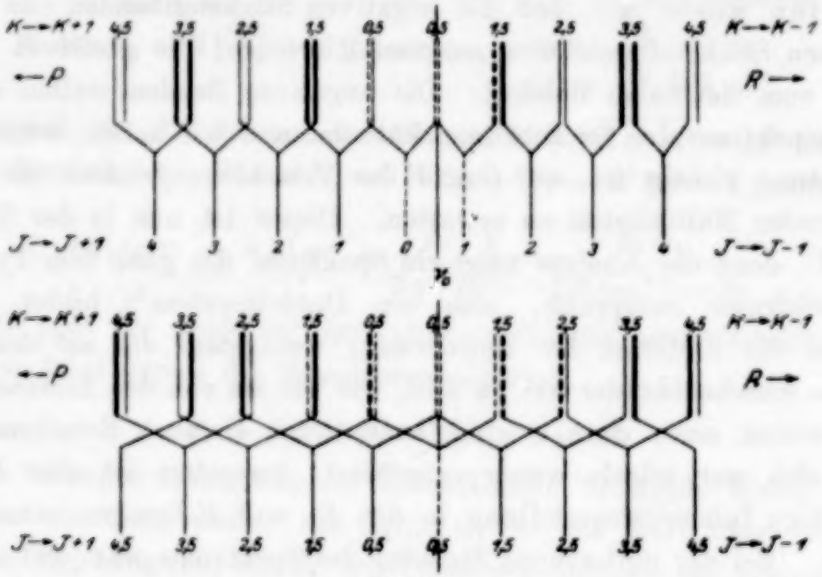


Fig. 1.

Vergleichen wir nun damit die Intensitätsfolge bei den positiven Banden, so finden wir auch hier bei der Nullinie denselben Sprung. Sollen also auch hier die zu derselben inneren Quantenzahl J gehörenden Komponenten stets verschiedene Intensität besitzen, so können sich die J nur um ganze Einheiten von den K unterscheiden ($J = K \pm 1$ oder $J = K \pm 2$), die Zusammenfassung der Komponenten kann nur in der in der Figur angedeuteten Weise erfolgen, die inneren Quantenzahlen bleiben somit zusammen mit den Kernimpulszahlen halbzahlig.

Wir deuten daher jetzt die Aufspaltungen des R_1-, P_1-Zweiges bei den positiven Banden durch den Ansatz $J = K \pm 2$ ($K = m - {}^1/_2$, siehe oben) und den R_2-, P_2-Zweig entsprechend durch $J = K \pm 1$, während beim einfachen R_3-, P_3-Zweig $J = K$ ist[1]). Die Aufspaltungen der Zweige

[1]) Gewisse Anzeichen sprechen auch für die umgekehrte Zuordnung, $R_1 P_1$ zu $J = K \pm 1$ und $R_2 P_2$ zu $J = K \pm 2$. Wir haben die obige Deutung gewählt, wollen aber die Frage noch offen lassen.

wachsen dann mit wachsender Differenz von $J - K$. Fig. 2 [1]) zeigt dann, wie in der Triplettfolge der R-Zweige die Linien in bezug auf gleiches K bzw. gleiches J aneinander zuzuordnen sind, und wir hätten jetzt noch im Sinne unserer Systematik für die Energieterme die folgenden Bezeichnungen einzuführen, um die Analogie mit den Linienspektren voll-

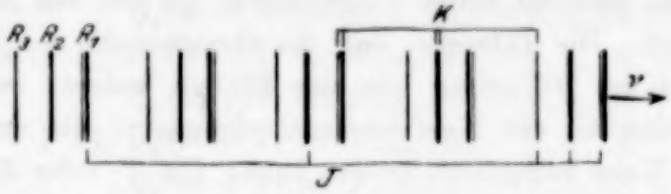


Fig. 2.

kommen durchgeführt zu haben. Für ein Dublettsystem (negative Stickstoffbanden) ist an Stelle von $F_1(m)$ und $F_2(m)$ zu setzen

$$\left.\begin{aligned} F_1(m) &= F_{-1/2}(K) = F_{-1/2}(J + 1/2) \sim E_0 + b(j + 1/2)^2 \\ F_2(m) &= F_{+1/2}(K) = F_{+1/2}(J - 1/2) \sim E_0 + b(j - 1/2)^2 \end{aligned}\right| \quad (17)$$

(Index $i = J - K$), und entsprechend gilt für das Quintettsystem der positiven Banden

$$\left.\begin{aligned} F_1(m) &= F_{+2}(K) = F_{+2}(J - 2) \sim E_1 + b(\sqrt{K^2 + \sigma^2} - 1)^2 \\ F_1'(m) &= F_{+2}(K) = F_{+2}(J + 2) \sim E_1' + b(\sqrt{K^2 + \sigma^2} - 1)^2 \\ F_2(m) &= F_{+1}(K) = F_{-1}(J - 1) \sim E_2 + bK^2 \\ F_2'(m) &= F_{-1}(K) = F_{-1}(J + 1) \sim E_2' + bK^2 \\ F_3(m) &= F_0(K) \quad = F_0(J) \quad\quad \sim E_3 + b(\sqrt{K^2 + \sigma^2} + 1)^2 \end{aligned}\right| \quad (18)$$

[analog für den Endterm $f_i(m)$]. Bei der Konstantenbeziehung Gl. (15) ist dann noch zu berücksichtigen, daß gilt

$$\beta_{+2} \simeq \beta_{-2}, \quad \beta_{+1} \simeq \beta_{-1} \simeq 0, \quad (19)$$

so daß β also in erster Näherung für symmetrische Lagen des Impulsvektors denselben Wert hat, der somit nur vom Absolutwert $|J - K|$ abhängt. Mit demselben Grade der Annäherung kann auch E_0 von $|J - K|$ unabhängig betrachtet werden. Dann gilt aber für kleine Werte von K die Landésche Intervallregel, welche bekanntlich aussagt, daß für ein bestimmtes K die Termaufspaltungen des Multiplettsystems proportional $J^2 - J'^2$ sind. Hier wird diese Regel noch verschärft durch die Angabe des Proportionalitätsfaktors, γB, im Zusammenhang mit dem Trägheits-

[1]) R_3 ist hier einfach gezeichnet, aus der Richtung der Verschiebung läßt sich aber schließen, daß das Aufspaltungsbild dasselbe sein muß wie das von R_1 desselben Tripletts.

moment. Für große Werte von K bzw. J treten allerdings andere Intervallregeln in Kraft, die aber aus obigen Gleichungen leicht abzulesen sind.

4. Auswahlregeln. Wir wollen jetzt dazu übergehen, unsere Regeln an anderen auf Feinstruktur hin untersuchten Banden zu prüfen und betrachten zunächst einige Folgerungen, die aus den Auswahlregeln zu ziehen sind. Die Tatsache, daß die Quantenzahl des Kernimpulses sich auch bei den Q-Zweigen um eine Einheit ändert, zwingt uns zu einer Einschränkung der Kombinationsbeziehungen, die am einfachsten auf folgende Weise formuliert werden kann: Ein P- oder R-Zweig kann nur zwischen Termen auftreten, deren Indizes gleich sind (entsprechend einer gleichgerichteten Änderung von K und J: $K = K \pm 1$, $J = J \pm 1$) oder die sich um zwei Einheiten voneinander unterscheiden (entgegengesetzte Änderung von K und J: $K = K \pm 1$, $J = J \mp 1$), ein Q-Zweig hingegen tritt nur auf zwischen Termen, deren Indizes sich um eine Einheit unterscheiden. Ferner muß der Q-Zweig fehlen bei Singulettsystemen, ein Fall, auf den wir bei den Kupferbanden weiter unten noch zurückkommen werden. Der Fall aber, daß sich Kernimpuls und totales Impulsmoment in entgegengesetzter Richtung ändert, ist bei Bandenspektren bisher noch nicht beobachtet worden, wenigstens fehlen die betreffenden Zweige beim Quintettsystem des Stickstoffs und beim Quartettsystem der C + H-Banden. Sie können selbstverständlich bei einem Dublettsystem nicht auftreten und Triplettsysteme sind noch unbekannt. Da diesem Quantensprung auch bei den Linienspektren nach einer Intensitätsregel von Sommerfeld die geringste Intensität zukommt, müssen wir vorläufig die Möglichkeit derartiger Zweige bei Bandenspektren noch ausschließen. Die Änderung des Termindex aber um eine Einheit konnte nun in sämtlichen Fällen festgestellt werden, wo Q-Zweige auftraten, nämlich bei den Hg-, Cd-, Zn-Banden [1]), bei den C + H-Banden [2]) und bei den Wasserdampfbanden [3]). Er macht sich bei diesen Spektren durch das Fehlen zu erwartender Kombinationen zwischen P- und Q- bzw. R- und Q-Linien oder durch das Auftreten von sogenannten Kombinationsdefekten (H_2O- und λ 3900 der C + H-Banden) bemerkbar.

Die Kombinationsbeziehungen der C + H-Bande λ 4300 scheinen allerdings zufolge der Einordnung von A. Kratzer zunächst den obigen

---

[1]) E. Hulthén, ZS. f. Phys. **11**, 284, 1922; A. Kratzer, ebenda **13**, 82, 1923.
[2]) E. Huthén, ZS. f. Phys. **11**, 284, 1922; A. Kratzer, ebenda **23**, 293, 1924.
[3]) T. Heurlinger, Diss. Lund.

Regeln zu widersprechen, man erzielt jedoch Übereinstimmung, wenn man für die vier R_i-, P_i-, Q_i-Zweige ($i = 1, 2, 3, 4$) die Ansätze macht:

$$\left.\begin{aligned} P_1(m+1),\ R_1(m-1) &= F_{+3/2}(K) - f_{+3/2}(K \pm 1) \\ Q_1(m-1) &= F_{+1/2}(K) - f_{+3/2}(K-1) \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} P_2(m+1),\ R_2(m-1) &= F_{-3/2}(K) - f_{-3/2}(K \pm 1) \\ Q_2(m-1) &= F_{-1/2}(K) - f_{-3/2}(K-1) \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} P_3(m+1),\ R_3(m-1) &= F_{+1/2}(K) - f_{+1/2}(K \pm 1) \\ Q_3(m+1) &= F_{+3/2}(K) - f_{+1/2}(K+1) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$
$$\left.\begin{aligned} P_4(m+1),\ R_4(m-1) &= F_{-1/2}(K) - f_{-1/2}(K \pm 1) \\ Q_4(m+1) &= F_{-3/2}(K) - f_{-1/2}(K+1) \end{aligned}\right\}$$

Die von Kratzer[1]) gefundene, wenigstens für $m \geqq 4$ streng gültige Beziehung

$$\Delta F_1(m) = \Delta F_3(m), \quad \Delta F_3(m) = \Delta F_4(m) \qquad (21)$$

ist dann identisch mit der Bedingung

$$F_{\pm 3/2}(K) + F_{\pm 3/2}(K+1) = F_{\pm 1/2}(K+1) + F_{\pm 1/2}(K+2). \qquad (22)$$

In etwas anderer Schreibweise bestätigt sie nur wieder unsere Konstantenbeziehung Gleichung (15), eine Beziehung, die hier für den Anfangsterm streng, für den Endterm aber nur annähernd gilt. Offen müssen wir jedoch die Frage lassen, weswegen die auf Grund der Auswahlregeln wohl möglichen beiden Q-Zweige

$$Q(K) = F_{+1/2}(K) - f_{-1/2}(K-1); \quad Q(K) = F_{-1/2}(K) - f_{+1/2}(K+1) \qquad (23)$$

bei den C + H-Banden ausfallen.

Die Bande λ 3900 gehört bekanntlich zu einem anderen Bandensystem, dessen einfachere Struktur jetzt durch die Interkombination eines Quartettsystems mit einem Dublettsystem erklärt werden kann. Bei einer derartigen Kombination $R \longrightarrow R + 1$ müssen nämlich alle diejenigen Zweige wegfallen, die die Terme $F_{+3/2}(K)$ und $F_{-3/2}(K)$ enthalten, d. h. die Zweige $P_1(K)$, $R_1(K)$, $Q_3(K)$, $P_2(K)$, $R_2(K)$, $Q_4(K)$. Mit ihnen fallen auch die Kombinationsbeziehungen weg, während die sogenannten Kombinationsdefekte auf die nur angenäherte Gültigkeit der Gleichung (22) für den Endterm zurückzuführen sind. Zusammenfassend läßt sich also aussagen, daß die Auswahlregeln auch bei den Bandensprektren erfüllt sind, daß aber durch das Fehlen der Quantensprünge $K = K \pm 1$, $J = J \mp 1$ und einiger Q-Zweige die Kombinationsmöglichkeiten hier eine weitere Einschränkung erfahren haben.

---

[1]) A. Kratzer, ZS. f. Phys. **23**, 300, 1924.

5. Ausfallende Linien. Die Analogie zu der Systematik der Linienspektra läßt jetzt auch die Frage entscheiden, welche Linien als Nullinien bei den Bandenspektren ausfallen müssen. Man hat nur zu berücksichtigen, daß bei jedem Multiplettsystem (z. B. einem Quintettsystem) der s-Term ($K = {}^1/_2$) stets einfach, der p-Term ($K = {}^3/_2$) dreifach und erst der d-Term ($K = {}^5/_2$) fünffach ist, und daß ferner der Impuls 0 ($K = -{}^1/_2$) auch bei Bandenspektren nicht auftreten kann. Dann folgt aber, daß bei einem Singulettsystem auch nur eine Linie ausfällt, nämlich die Nullinie[1]) R (0,5). Bei einem Dublettsystem fallen aber beide Komponenten dieser Linie aus und ferner noch die Linien R (1,5) und P (0,5) (vgl. Fig. 1). Beim Q-Zweig sind es hingegen die Q (0,5) und Q (— 0,5), die fehlen. Ich übergehe die Aufzählung der ausfallenden Linien bei Triplett- und Quartettsystemen und bei Interkombinationen zwischen Termen verschiedener Multiplizität und nenne nur noch die Linien, die beim Stickstoffmolekül ausfallen müssen. Es sind dieses die folgenden 19 Linien: Im P_2-, R_2-Zweig die drei Linien R (1,5), R (0,5), P (0,5), im P_2-, R_2-Zweig und R_1- P_1-Zweig[1]) je eine Komponente von R_i (2,5) und P_i (1,5) und beide Komponenten der Linien R_i (1,5), R_i (0,5), P_i (0,5), Leider lassen sich beim Stickstoff infolge der vielen Überlagerungen in der Nähe der Kante die ausfallenden Linien nicht mit Sicherheit festellen, so daß eine Prüfung dieser Regeln geeigneteren Spektren überlassen werden muß.

6. Wechsel- und Verschiebungssatz. Zum Schluß dieser Ausführungen wollen wir das vorliegende Tatsachenmaterial noch auf die Folgerungen hin prüfen, die dieser Satz über die Verteilung von geraden und ungeraden Multipletts im periodischem System zuläßt. Zwar wollen wir uns dabei keineswegs die Schwierigkeiten verhehlen, die die Anwendbarkeit des Satzes auf Molekülspektra, insbesondere aber auf heterogene Verbindungsspektra, in Zweifel setzen könnten, nicht zuletzt die Schwierigkeit in der richtigen Bestimmung des Trägers eines Bandenspektrums. Wir möchten deshalb das Folgende auch nur als Vermutung hinstellen. Immerhin fanden wir aber den Verschiebungssatz beim Funkenspektrum des Stickstoffmoleküls erfüllt und hierdurch ermutigt, betrachten wir jetzt einige andere Molekülspektra, wobei wir allerdings Rücksicht auf einheitliche Zusammensetzung der Moleküle nehmen müssen. Das Auftreten eines Quintettsystems bei der zweiten positiven Stickstoffgruppe zeigt zunächst einen Wechsel von gerader und ungerader Multi-

[1]) Vgl. Fig. 1.

plizität beim Übergang vom Atom- zum Molekülspektrum an. Wir können aber noch nicht entscheiden, ob dieses Quintettsystem bereits die höchste Multiplizität des Moleküls darstellt. Zwar vermuten wir in der vierten positiven Gruppe, die mit der zweiten den Endterm gemeinsam hat, eine Interkombination, können aber vorläufig noch nicht feststellen, ob es sich dabei um ein Septett- oder ein Triplettsystem handelt und Analoges gilt auch für die erste positive Gruppe. Mit dem Wechselsatz im Einklang stehen dann ferner die atmosphärischen Sauerstoffbanden mit ihrer offensichtlich geraden Multiplizität, während eine Untersuchung der entsprechenden negativen Banden zum Nachweis des Verschiebungssatzes unternommen werden soll. In der folgenden Gruppe des periodischen Systems läßt nun leider die Unauflösbarkeit der Jodbanden[1]) eine Feststellung über den Multiplizitätscharakter dieser Spektren nicht zu. Auch das Bandenspektrum des neutralen Kohlemoleküls in der vierten Gruppe ist noch gänzlich unbekannt, denn die sogenannten Kohlebanden kommen hierfür nicht in Betracht, da sie nach der Analyse von Heurlinger[2]) als „Triplettserien" weitgehende Anlogien zum Stickstoffspektrum zeigen. Ablehnen müssen wir jedoch jetzt endgültig die Zuordnung des Dublettsystems der violetten Cyanbanden zum neutralen Stickstoffmolekül, da auch keineswegs, wie Heurlinger[3]) annahm, der Anfangsterm der roten Cyanbanden mit dem Endterm der ersten positiven Stickstoffgruppe übereinstimmt. Ein Funkenspektrum des Stickstoffmoleküls kommt ebensowenig in Betracht, so daß die Frage nach dem Träger der Cyanbanden wieder offen gelassen werden muß.

Weitere Bandenspektra, von denen man annehmen kann, daß das einfache Molekül der Träger ist, sind nun nicht analysiert, nur bei den Wasserstoffverbindungsspektren liegt ein umfangreicheres Material noch vor. Allerdings kann auch jetzt nicht die Frage endgültig gelöst werden, ob es sich bei diesen Spektren tatsächlich um eine Wasserstoffverbindung handelt oder ob dem Wasserstoff eine sekundäre Rolle zukommt, auf jeden Fall aber lassen die typischen Eigenschaften aller dieser Spektren, nämlich das Auftreten nur beim Vorhandensein von Wasserstoff, die große Auflösung der Banden, die eine Analyse stets erleichtert hat, das Vorkommen von *Q*-Zweigen u. a. eine gemeinsame Behandlung unter einheitlichen Gesichtspunkten zu. Wie bereits erwähnt, liegt nun beim C + H-Spektrum ein Quartettsystem vor, auch die Inter-

[1]) R. Mecke, Ann. d. Phys. **71**, 1923.
[2]) T. Heurlinger, Diss. Lund.
[3]) T. Heurlinger, ZS. f. Phys. **1**, 82, 1920.

kombination mit einem Dublettsystem ist bei der Bande λ 3900 nachgewiesen. Wir hätten es also bei diesen Spektren mit derselben Multiplizität zu tun, die auch das reine Molekülspektrum des betreffenden Elements aufweisen würde. Leider ist aber das Ammoniakspektrum des Stickstoffs in der fünften Gruppe noch nicht analysiert worden, aber die Wasserdampfbanden der sechsten Gruppe lassen sich wieder durch das Fehlen von Kombinationsbeziehungen in Analogie zu der C + H-Bande λ 3900 als Interkombination eines Dublettsystems mit einem Quartettsystem deuten, wieder in Übereinstimmung mit dem Wechselsatz. In der dritten Gruppe des periodischen Systems sind derartige Wasserstoffverbindungsspektra noch nicht bekannt geworden, doch scheinen sie beim Aluminium und beim Bor zu existieren. Bei den Hg-, Cd- und Zn-Banden und den Magnesiumhydridbanden der zweiten Elementgruppe finden wir die zu erwartenden Dublettsysteme und so hätten wir denn, wenn unsere Vermutung zutrifft, in der ersten Gruppe bei den Cu-Banden ein Singulettsystem vorzufinden. Wohl steht damit im Einklang, daß bei diesen Banden der Q-Zweig plötzlich wegfällt, im übrigen aber zeigt dieses von Frerichs[1]) untersuchte Spektrum ganz den Dublettcharakter der Cyanbanden. Mulliken[2]) hat nun kürzlich diese Aufspaltung der Linien als Isotopieeffekt der beiden Kupferisotopen gedeutet und in bezug auf seine quantitativen Folgerungen ergab eine Nachprüfung der Aufnahmen noch folgendes: Zwar konnten in keinem Falle die mitgeteilten Aufspaltungen direkt gemessen werden, da sie noch in das Auflösungsvermögen des Gitters hineinfielen, doch war durch die zunehmende Verbreiterung der Linien immerhin eine Abschätzung, aber auch nur eine solche, über die mutmaßliche Trennung der Linien möglich; erst von der Linie P (28) λ 4516,7 an macht sich eine Aufhellung der Linien in der Mitte bemerkbar. Die entsprechenden Linien des R-Zweiges waren in all den Fällen, wo sie frei von Überlagerungen waren, deutlich schärfer.

Ferner kann man aus der Abschattierung der Linien schließen, daß die kurzwelligere Komponente die schwächere ist, was ganz mit einem Isotopieeffekt im Einklang steht, da die Abstandsfolge der Linien von der Kante aus für das schwerere Isotop (Cu 65) kleiner sein muß. Dieser Deutung als Isotopieaufspaltung standen nun aber seinerzeit die Bedenken der Analogie zum Cyanspektrum entgegen, insbesondere war es das Fehlen des Q-Zweiges und das Ausfallen nur einer Linie, der Nullinie,

---

[1]) R. Frerichs, ZS. f. Phys. **20**, 170, 1923.
[2]) R. Mulliken, Nature **113**, 489, 1924.

was Schwierigkeiten machte. Da aber jetzt auf Grund der vorliegenden Systematik wegen der Halbzahligkeit der inneren Quantenzahl auch bei einem Singulettsystem nur eine Linie ausfallen darf, so fallen diese Bedenken weg und wir müssen in den Cu-Banden in der Tat den Vertreter eines Singulettsystems erblicken, deren Aufspaltung, als Isotopieeffekt gedeutet, auf eine Wasserstoffverbindung hinweist. Zur quantitativen Entscheidung der Frage reichen aber die Messungen noch keineswegs aus und sollen deshalb mit größerer Dispersion fortgesetzt werden. Hiermit ist das vorliegende Material erschöpft; so gering es auch sein mag, so dürfte es doch die Anwendbarkeit des Wechselsatzes auf Bandenspektra immerhin wahrscheinlich machen. In der vorsichtigen Anwendung desselben hatten wir dann aber ein weiteres Hilfsmittel, die Träger eines Bandenspektrums zu ermitteln.

Zusammenfassung.

Abschließend läßt sich folgendes sagen:

1. Die Untersuchung der zweiten positiven Stickstoffgruppe ergab für das neutrale Stickstoffmolekül einen Quintetterm, während das Funkenspektrum des Moleküls, die negativen Banden, in Übereinstimmung mit dem Verschiebungssatz einen Dubletterm liefert. Zur Darstellung der Serien mußte dann eine neue Serienformel abgeleitet werden.

2. Bei der Klassifizierung der Bandenspektra können dieselben Gesichtspunkte angewandt werden, die zu einer Systematik der Linienspektra geführt haben. Ein Bandensystem stellt dann das gesamte Multiplettsystem dar, das nur durch die Angabe der Rumpfquantenzahlen R charakterisiert ist. Eine Bande ist aber in demselben Sinne wie bei den Linienspektren ein vollständiges Multiplett.

3. Die Auswahlregeln bedürfen bei den Bandenspektren einer weitergehenden Einschränkung, indem noch Kombinationen ausfallen, welche bei Linienspektren noch erlaubt sind.

4. Ein regelmäßiger Wechsel von geraden und ungeraden Multipletts im periodischen System der Elemente, ist auch bei Bandenspektra nachweisbar. Ferner tritt beim Übergang vom Atom- zum entsprechenden Molekülspektrum ein Wechsel in der Multiplizität der Terme ein.

Über den Rückstoßeffekt der zerstreuten γ-Strahlen.

Von **D. Skobelzyn** in Leningrad.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 18. August 1924.)

Die β-Strahlen, die durch γ-Strahlen im Gase erzeugt werden, wurden mittels der Methode von C. T. R. Wilson untersucht, wobei die Wirkung der Wände des Gefäßes durch die Anwendung eines magnetischen Feldes beseitigt war. Die Resultate dieser Untersuchung bestätigen die Theorie von A. H. Compton, nach welcher die von γ-Strahlen sekundär ausgelösten Elektronen die streuenden Elektronen sind.

Die von Debye und A. H. Compton eingeführten Vorstellungen über den „Zusammenstoß zwischen einem Lichtquant und einem Elektron" können in zwei Richtungen experimentell geprüft werden: auf spektroskopischem Wege durch Erforschung derjenigen Erscheinungen, welche die Zerstreuung der γ- und Röntgenstrahlen begleiten, oder durch Beobachtung (z. B. mittels der Methode von C. T. R. Wilson) des „Rückstoßes", welchen ein Elektron infolge der Zerstreuung eines Strahlenquantums erfährt.

Für die Beobachtung des Rückstoßes ist eine möglichst harte Strahlung erwünscht. Wie wir vor kurzem gezeigt haben[1]), sind γ-Strahlen für solche Beobachtungen besonders geeignet.

Eine elementare Theorie des Rückstoßes führt zu folgendem Ausdruck[2]) für die Größe der Energie E, welche an das Elektron abgegeben wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{h\nu} &= \frac{2\alpha \sin^2\frac{\Theta}{2}}{1 + 2\alpha \sin^2\frac{\Theta}{2}} \\ \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} &= -\frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

hier ist ν die Frequenz des ursprünglichen Strahles, Θ der Winkel, welchen die Richtung des Strahles nach dem „Stoß" mit der Richtung des primären Strahles bildet (der Streuungswinkel), und ϑ der Winkel zwischen dieser letzten Richtung und der Richtung des Rückstoßes. $\alpha = \frac{h\nu}{c^2 m} = \frac{0{,}0243}{\lambda}$ (wo λ die Wellenlänge des primären Strahles in Å und m die Masse des

[1]) ZS. f. Phys. **24**, 393, 1924.
[2]) Debye, Phys. ZS. **24**, 163, 1923.

Elektrons ist). Diese Größe α, das Verhältnis der Masse eines Strahlungsquants zu der Masse des Elektrons, ist im Falle gewöhnlicher Röntgenstrahlen viel kleiner als 1, und daher ist die Energie E in diesem Falle immer klein im Vergleich zu $h\nu$. Die Energie, welche im Falle des photoelektrischen Effektes dem Elektron mitgeteilt wird, ist dagegen bekanntlich gleich $h\nu$.

Die mittlere Wellenlänge der γ-Strahlen ist von der Ordnung 0,02 Å [1]); für die Strahlen einer so hohen Frequenz hat die Größe α einen Wert, welcher der Einheit nahe liegt oder sie sogar überschreitet. Die Energie, welche dem Elektron mitgeteilt wird, kann in diesem Falle dem $h\nu$ beinahe gleich sein ($E = \frac{2}{3} h\nu$, wenn $\alpha = 1$ und ein „zentraler Stoß" erfolgt — $\Theta = 180^0$, $\vartheta = 0$); diese Energie kann also der Energie der primären β-Strahlen nahe kommen. Nach der Hypothese von A. H. Compton [2]) ist die sekundäre Strahlung, welche bei Körpern von niedrigem Atomgewicht durch γ-Strahlen erzeugt wird, durch den Rückstoßeffekt der Zerstreuung dieser Strahlen hervorgerufen. Wie oben bemerkt, können die Geschwindigkeiten der Elektronen, welche den Rückstoß erlitten haben, den Geschwindigkeiten der Photoelektronen nahe kommen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Rückstoßeffekt und dem gewöhnlichen photoelektrischen Effekt besteht aber darin, daß im ersten Falle die Geschwindigkeit des Elektrons bei gegebenem $h\nu$ noch von dem Parameter ϑ abhängt und daß, wie die Formeln (A) zeigen, diese Geschwindigkeit alle möglichen Werte zwischen 0 $\left(\text{wenn } \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ und dem Maximalwert $\left(\text{welcher der Gleichung } \frac{E}{h\nu} = \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \text{ entspricht}\right)$ haben kann.

Wenn die Methode von Wilson angewandt wird, so ist zu erwarten, daß neben den Elektronen, deren Weglänge von der Ordnung mehrerer Dezimeter ist, auch sehr kurze β-Strahlenbahnen nachgewiesen werden können.

Bei der Anwesenheit sehr schneller β-Strahlen kann man erwarten, daß die Beobachtung des Effektes mittels der Nebelmethode dadurch erschwert wird, daß in großer Anzahl durch die γ-Strahlen aus den Wänden der Kamera ausgelöste sekundäre Elektronen auftreten werden.

In unserer früheren Mitteilung haben wir Experimente beschrieben, in welchen ein sehr schmales Bündel von γ-Strahlen durch den Nebel-

[1]) Amahd und Stonner, Proc. Roy. Soc. **106**, 17, 1924.
[2]) Phys. Rev. **21**, 496, 1923.

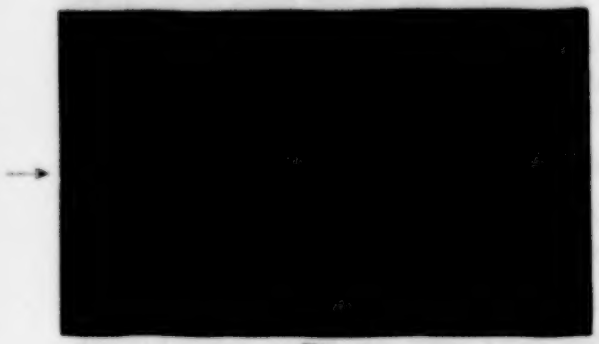


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 1 bis 3. Vergr. 1,08.
Photographiert ohne magnetisches Feld. In den Weg der Strahlen war ein Glasschirm von 6 mm Dicke eingeschaltet.

Fig. 6 bis 7. Vergr. 1,08.
Photographiert mit einem magnetischen Felde von etwa 1000 Gauß Stärke.
In den Weg der Strahlen war ein Bleischirm von 3 mm Dicke eingeschaltet.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 4. Vergr. 1,08.
Photographiert in einem magnetischen Felde von etwa 1200 Gauß Stärke.

Fig. 5. Vergr. 1,08.
Photographiert in einem magnetischen Felde von etwa 1000 Gauß Stärke.
In den Weg der Strahlen war ein Bleischirm von 3 mm Dicke eingeschaltet.

apparat geschickt wurde, und zwar so, daß die horizontalen Wände vollständig gegen die Wirkung der γ-Strahlen geschützt waren. Die Beobachtungen ergaben das Auftreten von sehr kurzen Bahnen (Fig. 1, 2) (photographiert wurde senkrecht von oben).

Neben diesen Bahnen sieht man auch ziemlich zahlreiche geradlinige Bahnen, welche an der Stelle der Seitenwand beginnen, wo das Primärbündel in die Kamera eintritt[1]). Diese Bahnen verlaufen ungefähr in der Richtung der Primärstrahlen und geben auf den Aufnahmen ein schwach divergentes Bündel von Geraden (Fig. 3). (Bei den ersten Aufnahmen waren diese geradlinigen Bahnen übersehen, weshalb in der vorläufigen Mitteilung die irrtümliche Annahme gemacht wurde, daß der Einfluß der Seitenwände bei der Beobachtung des Effektes der γ-Strahlen überhaupt unbedeutend sei.)

Um bei der Beobachtung der Wirkung der γ-Strahlen auf das Gas die Elektronenemission der Seitenwände des Gefäßes zu eliminieren, wurden die Aufnahmen bei Anwesenheit eines vertikal gerichteten genügend starken magnetischen Feldes gemacht (Fig. 4 bis 7).

Auf der Aufnahme (Fig. 4) sieht man eine Reihe von nahezu kreisförmigen Bahnen von β-Strahlen, welche aus der Seitenwand der Kamera entspringen und vom Felde abgelenkt sind [einige Kreisbahnen rechts an der Seite][2]), dagegen sieht man in der Mitte des Gefäßes, wohin unter der Wirkung des Feldes keine an der Wand beginnende Elektronenbahnen gelangen können, zahlreiche Bahnen, welche in dem von γ-Strahlen durchstrahlten Gebiete ihren Ursprung haben. (Die horizontalen Wände des Gefäßes waren gegen die Wirkung der γ-Strahlen geschützt; daß in der Tat die Wirkung dieser Wände beseitigt war und daß die Bahnen im Bündel der γ-Strahlen, d. h. in der Einstellebene des photographischen Apparates, anfangen, konnte durch Verstellung des primären Bündels aus dem Fokus des Apparates geprüft werden.)

Die Photographien zeigen, daß die direkte Wirkung der γ-Strahlen auf das Gas ziemlich bedeutend ist[3]).

---

[1]) Die Elektronen, welche in der Stelle der Seitenwand ausgelöst waren, wo das primäre Bündel aus der Kammer austritt, waren nur in einer sehr geringen Anzahl beobachtet.

[2]) Der Krümmungsradius der Bahn der schnellsten von diesen β-Strahlen ist etwa 3 cm.

[3]) In dieser Beziehung sind unsere Resultate, welche gegen die Annahmen von M. H. Bragg, C. T. R. Wilson und anderen differieren, im Einklang mit den Resultaten von Kleeman (Proc. Roy. Soc. **82**, 358, 1909), welcher sich gleichfalls eines magnetischen Feldes bedient hat, um das Primärbündel der γ-Strahlen,

Auf den Aufnahmen sieht man viele sehr kurze Wege von der Ordnung eines Zentimeters oder noch weniger. Diese Wege können nicht der Wirkung einer weichen sekundären Wellenstrahlung zugeschrieben werden, welche im Radiumpräparat oder in den Wänden der Wolkenkammer entstehen könnte.

In dem ersten Falle könnte der Effekt durch das Einschalten eines absorbierenden Schirmes völlig beseitigt werden. Tatsächlich aber konnten wir gar keine merkliche Änderung des Effektes beobachten, wenn auch ein sehr dicker Schirm in den Weg der Strahlen gestellt wurde. (Die Mehrzahl der Aufnahmen sind in Anwesenheit eines Bleischirmes von 3 mm Dicke gemacht. Die Dicke der Glaswand des Gefäßes betrug 2 mm.)

Wenn die Erscheinung durch weiche Strahlen erzeugt wäre, welche von den Seitenwänden ausgingen, so wären die Anfänge der Bahnen nicht im Bereiche des Primärenbündels[1]) konzentriert (wie die Fig. 4 zeigt), sondern auch in großer Anzahl außerhalb des Bündels vorhanden[2]). Eine geringe Anzahl solcher Bahnen findet sich gewöhnlich auf den Aufnahmen vor; offenbar sind sie durch zerstreute γ-Strahlen hervorgerufen.

Die Beobachtungen des Effektes in einem magnetischen Felde geben uns die Möglichkeit, die Geschwindigkeiten der Elektronen auch dann zu ermitteln, wenn die Reichweite des Elektrons die Dimensionen der Wolkenkammer vielfach überschreitet. In diesem Falle erscheinen auf den photographischen Aufnahmen Bahnen, welche fast vollkommen regelmäßige Kreisbogen sind. Die Krümmung dieser Bogen bestimmt die Geschwindigkeit des Elektrons nach Größe und Richtung.

Die Untersuchung der Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten der Elektronen ist von besonderem Interesse. Die grundlegende Annahme

---

welches die Ionisationskammer passierte, von den in den Wänden des Apparates entstehenden sekundären β-Strahlen zu trennen. Nach Kleemans Angaben beträgt die Ionisation, welche durch die direkte Einwirkung der γ-Strahlen auf das Gas hervorgerufen wird, etwa 70 Proz. der Ionisation, welche gleichzeitig durch die Primärstrahlen und die Kammerwände bewirkt wirkt.

[1]) Das Bündel von γ-Strahlen war durch einen Spalt in einem Bleiblock ausgesondert. Die Lichtweite des Spaltes betrug 0,4 . 1 cm und die Länge (in der Richtung des Strahles) 20 cm. Das Radiumpräparat befand sich unmittelbar vor dem Spalt in einem Abstand von etwa 35 cm von dem Zentrum des Expansionsapparates.

[2]) Die Ursache des beobachteten Effektes in einer K_α-Strahlung der Kamerawände, welche durch die primäre Strahlung erregt sein könnte, zu vermuten, ist schon deshalb nicht möglich, weil die Bahnlänge der Elektronen in diesem Falle unterhalb der Meßgrenze fallen würde.

der Theorie vom Compton besteht darin, daß die Sätze von der Erhaltung des Impulses und der Energie auf den elementaren Akt der Wechselwirkung eines Strahlungsquants und des Elektrons angewandt werden können. Eine unbedingte Folgerung dieser Annahme ist, daß nur solche Anfangsgeschwindigkeiten der Elektronen möglich sind, welche eine positive Komponente in der Richtung des ursprünglichen Strahles haben. Die Anwesenheit einer solchen Komponente ist ein charakteristischer Zug der Erscheinung des Rückstoßes.

Mit völliger Sicherheit läßt sich die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit auf unseren Aufnahmen dann bestimmen, wenn die Geschwindigkeit beträchtlich ist und die Bahn daher als unzerstörter Bogen eines Kreises erscheint.

Aus kurzen und stark gekrümmten Bahnen läßt sich die Anfangsgeschwindigkeit nicht mit solcher Sicherheit bestimmen.

Wie man auf den beigefügten Aufnahmen sehen kann (auf diesen Aufnahmen entspricht die Richtung der Geschwindigkeit des Elektrons einer Bewegung gegen den Uhrzeiger) und wie es in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle auch auf anderen von uns erhaltenen Aufnahmen der Fall war (es wurden etwa 50 Elektronenbahnen untersucht), zeigen die Bahnen immer eine positive Komponente der Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des Primärstrahles [1]).

Wie aus den Formeln (A) folgt, ist die Geschwindigkeit, welche dem Elektron mitgeteilt wird, eine Funktion des Winkels ϑ. Eine Prüfung der Abhängigkeit, welche durch die Formeln (A) ausgedrückt wird, und auch des Ausdrucks, welcher aus der Theorie von Compton für die Wahrscheinlichkeit des Rückstoßes unter einem gegebenen Winkel ϑ folgt, erfordert die Anwendung monochromatischer Strahlen. Mit nicht homogenen Strahlen (wie z. B. unsere γ-Strahlen) ist eine genaue Prüfung nicht möglich. Doch kann eine statistische Betrachtung des Zusammenhanges zwischen der Geschwindigkeit und dem mittleren Winkel ϑ, sowie auch eine Bestimmung der Verteilung der Elektronen über verschiedene Geschwindigkeitsbereiche auch in diesem Falle ein gewisses Interesse darbieten.

---

[1]) Es wurde eine kleine Anzahl von Anfangsrichtungen mit entgegengesetzter Komponente beobachtet; sie fanden sich aber meist außerhalb des γ-Strahlenbündels vor und sind auf zerstreute Strahlung zurückzuführen, welche, wie oben erwähnt, nicht zu beseitigen war, und namentlich vom Spalt, welcher das primäre Bündel aussonderte, herrühren konnten.

Die folgende Tabelle gibt die Zahlen an, welche durch Betrachtung der Elektronenbahnen auf 13 Platten erhalten wurden[1]).

Geschwindigkeit der Elektronen in Kilovolt	< 50	50—200	200—400	400—900	> 900
Anzahl der Elektronen	42	19	8	2	1
Durchschnittlicher Wert des Winkels ϑ		44^0	24^0	$< 10^0$	

Die Aufnahmen der Bahnen erlauben nur die Projektionen der Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten auf die horizontale Ebene zu beobachten. Die Zahlen der letzten Zeile sind als Resultat einer sehr rohen Abschätzung der Winkel, welche diese Projektion mit der Richtung des primären Bündels bildet, erhalten. Doch zeigen diese Zahlen mit voller Eindeutigkeit, daß eine gesetzmäßige Abhängigkeit zwischem dem Winkel ϑ und der Größe der Geschwindigkeit existiert.

Die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons fällt im allgemeinen nicht mit der Richtung des ursprünglichen Strahles zusammen, und in vielen Fällen ist der Winkel zwischen diesen beiden Richtungen beinahe 90^0. Für die Erklärung der beobachteten Erscheinungen kann also die Hypothese von Wilson und Bauer nicht angewandt werden. Nach dieser Hypothese wird das Licht in der Form einer sphärischen Welle zerstreut und der gesamte Impuls des ursprünglichen Strahles $\left(\frac{h\nu}{c}\right)$ an das Elektron abgegeben; es muß also der Rückstoß nur in der Richtung dieses Strahles erfolgen. Wie von Bauer gezeigt wurde[2]), steht diese Hypothese, welche einem nach seinem Ausdruck „halbklassischen" Standpunkte entspricht, im vollen Einklang mit allen Tatsachen, welche bisher bekannt sind. Die Resultate unserer Beobachtungen widersprechen aber dieser Hypothese.

Zusammenfassung. Die γ-Strahlen des Radiums wurden mit Hilfe der Methode von C. T. R. Wilson untersucht. Die Hypothese von A. H. Compton, nach welcher die sekundären β-Strahlen, die von γ-Strahlen im Falle leichter Atome erzeugt werden, „Rückstoßstrahlen" sind, ist durch folgende Tatsachen bestätigt (in dem Falle, daß die sekundäre Strahlung im Gase entsteht):

[1]) Der Wert von $h\nu$, welcher der Wellenlänge von 0,02 Å entspricht, beträgt etwa 600 Kilovolt.

[2]) C. R. **177**, 1211, 1923.

a) Die Energie, welche von harten γ-Strahlen an das Elektron abgegeben wird, ist zwar in einigen Fällen dem $h\nu$ nahe gleich, doch in vielen anderen Fällen ist diese Energie nur ein kleiner Bruchteil von $h\nu$.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen hat immer eine „Vorwärtskomponente".

c) Die Energie, welche ein Elektron erhalten hat, hängt von dem Winkel ϑ ab, welchen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit dem ursprünglichen Strahl bildet, und wird durchschnittlich kleiner bei größeren Werten des Winkels ϑ.

Wenn der beobachtete Effekt der Rückstoßeffekt der Zerstreuung ist, so kann die Hypothese von C. T. R. Wilson und Bauer, nach welcher die Streuung in der sphärischen Wellenform erfolgt und an das Elektron der ganze elementare Impuls der Strahlung abgegeben wird, nicht aufrecht erhalten werden.

Herrn Akademiker A. F. Joffe und den Herren Prof. D. S. Rojdestwensky, W. F. Mitkewic und M. M. Bogoslowsky, die mich wesentlich unterstützt haben, indem sie mir die nötigen Apparate und das betreffende Material zur Verfügung stellten, möchte ich hier meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen. Auch Herrn Prof. W. R. Bursian bitte ich, für die mir geleistete Hilfe bei der Abfassung dieses Artikels und seine wertvollen Anweisungen meinen innigsten Dank entgegenzunehmen.

Leningrad, Physikal. Laborat. d. Polytechn. Institut., August 1924.

Über die elektrische Doppelbrechung von Gasen.

Von **Nikolaus Lyon** in Freiburg i. Br.

Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 23. Juli 1924.)

Zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung stehen zurzeit mehrere Molekulartheorien zur Diskussion. Alle diese Theorien fußen auf den Anschauungen von Langevin[1]), nach dem sich die Moleküle in einem elektrischen Felde polarisieren und richten.

1. Langevin hat die zuerst von Larmor[2]) aufgestellte Hypothese der molekularen Orientierung unter der Annahme durchgerechnet, daß die Moleküle in optischer und elektrischer Beziehung die Symmetrie eines Rotationsellipsoids besitzen. Enderle[3]) hat gezeigt, daß die wesentlichen Folgerungen Langevins auch Gültigkeit behalten in dem allgemeineren Falle der Annahme von dreiachsigen Ellipsoiden. Die von ihm erhaltenen Formeln bieten die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Hypothese, und zwar nach verschiedenen Richtungen.

Aus jenen Formeln ergibt sich für das Verhältnis der absoluten Verzögerung bzw. Beschleunigung des außerordentlichen und ordentlichen Strahles $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ der Wert -2.

Äckerlein[4]) hat nun in der Tat bei Versuchen mit Nitrobenzol diesen Wert gefunden, doch Voigt[5]) hat schon darauf aufmerksam gemacht, daß diese Versuche um des Willen nicht beweisend sind, weil bei ihnen der Einfluß der Elektrostriktion auf die beobachtete elektrische Doppelbrechung nicht berücksichtigt ist. In der Tat fand denn auch Himstedt[6]) bei Schwefelkohlenstoff und anderen gut isolierenden Flüssigkeiten, bei denen er mit konstantem elektrischen Felde arbeiten konnte, den Wert -4 und wies zugleich darauf hin, daß eine Entscheidung auf diesem

[1]) P. Langevin, Le Radium **7**, 249, 1910.
[2]) J. Larmor, Phil. Trans. (A) **190**, 236, 1898.
[3]) Enderle, Zur Theorie der elektrischen und magnetischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten. Diss. Freiburg i. Br. 1912.
[4]) G. Äckerlein, Phys. ZS. **7**, 811, 1906.
[5]) E. Voigt, Phys. ZS. **7**, 811, 1906.
[6]) F. Himstedt, Ann. d. Phys. **48**, 1016, 1915.

Wege erst dann möglich sein würde, wenn es gelänge, den Einfluß der Elektrostriktion auf die Doppelbrechung für sich zu bestimmen, da derselbe von derselben Größenordnung wie der Kerreffekt ist.

Pauthenier[1]) versuchte, ähnlich wie Äckerlein, die Elektrostriktion zu vermeiden. Bei Nitrobenzol und Schwefelkohlenstoff ergab sich der von Langevin geforderte Wert von — 2.

Eine zweite Möglichkeit, die Hypothese der molekularen Orientierung zu prüfen, geben die Langevinschen Formeln dadurch, daß sie zu der Havelockschen[2]) Beziehung führen:

$$C = \frac{B \,.\, \lambda \,.\, n}{(n^2 - 1)^2}, \tag{1}$$

durch welche die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung in Beziehung gesetzt wird zu der Dispersion der Brechung.

Mehrere Forscher haben versucht, nach dieser Richtung hin die Langevinsche Theorie zu verifizieren. Im großen ganzen passen sich die gefundenen Resultate der Theorie gut an, wenn auch Abweichungen vorhanden sind bei Substanzen mit schwacher optischer Dispersion.

Die dritte Möglichkeit, die Langevinsche Theorie zu prüfen, bietet der Einfluß der Temperatur auf die Kerrkonstante. Nach Langevin läßt sich die Kerrkonstante B der elektrischen Doppelbrechung auf die Form bringen:

$$B = C \frac{(\varepsilon + 2)^2 \,.\, (n^2 + 2)^2 \,.\, d}{T \,.\, n}, \tag{2}$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante, n der Brechungskoeffizient, d die Dichte, T die absolute Temperatur ist und wo in C alle von T unabhängigen Größen zusammengefaßt sind.

2. Born[3]) hat diese Temperatur erweitert unter Berücksichtigung der von Reinganum, Debye[4]) in die Theorie der Dielektrika eingeführten Vorstellung von den Dipolen. Diese Dipole sollen durch die äußeren Felder und durch die Temperatur nicht merklich beeinflußt werden. Nach Born kann man schreiben:

$$B = \text{const} \frac{(\varepsilon + 2)^2 \,.\, (n^2 + 2)^2}{n} \left(\frac{\mathfrak{B}}{k \,.\, T} + \frac{M^2}{k^2 \,.\, T^2} \right), \tag{3}$$

oder, wenn wir die Gleichung passend umformen:

$$B_{(\text{Born})} = B_{(\text{Langevin})} \left(1 + \frac{M^2}{k \,.\, T \,.\, \mathfrak{B}} \right). \tag{4}$$

[1]) Pauthenier, Ann. d. Phys. **14**, 239, 1920.
[2]) T. H. Havelock, Proc. Roy. Soc. London (A) **80**, 28, 1908.
[3]) M. Born, Ann. d. Phys. **55**, 177, 1918.
[4]) P. Debye, Phys. ZS. **18**, 97, 1912.

k ist die Boltzmannsche Konstante $k = 1{,}34 \cdot 10^{-16}$. Der Wert von $\mathfrak{B}$ läßt sich nach Born nur schätzungsweise berechnen aus $\mathfrak{B} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu}{d \cdot N}$, wo μ = Molekulargewicht, d = Dichte, N = Avogadrosche Zahl $= 6 \cdot 10^{23}$ ist. M bedeutet das Moment eines Dipols. Bei Anwesenheit von Dipolen muß also die Kerrkonstante mit fallender Temperatur stärker ansteigen, als nach Langevin zu erwarten ist. Das zweite Kammerglied von (4) stellt den Anteil der Dipole an der elektrischen Doppelbrechung dar.

3. Gans[1]) und auf anderem Wege Lundblad[2]) haben den Langevinschen Ansatz weiter entwickelt unter der Annahme, daß die fertigen Dipole durch äußere Felder und Temperatur merklich beeinflußt werden; sie fordern unter bestimmten Voraussetzungen eine noch stärkere Temperaturabhängigkeit der Kerrkonstante als Born. Von verschiedener Seite, wie Bergholm[3]), Lyon[4]), Lertes[5]), Gans und seinen Mitarbeitern, sind in der letzten Zeit Arbeiten erschienen, um nach dieser Richtung hin den Temperaturkoeffizienten der elektrischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten mit den einzelnen Theorien zu vergleichen. Es zeigte sich hierbei, daß die beobachteten Werte, auch der Dipolflüssigkeiten, sich noch am besten der Langevinschen Theorie anpassen. Die nach Langevin berechneten Werte sind, auch bei Dipolflüssigkeiten, fast durchweg größer als die beobachteten, würden also durch Anbringen der Dipolkorrektion erst recht größer werden. Ein Urteil zugunsten einer dieser Theorien zu fällen, ist zurzeit bei der Unsicherheit der in die Formeln eingehenden Konstanten bei tiefen Temperaturen nur sehr schwer. Die Aussicht, auf diesem Wege die verschiedenen Theorien zu überprüfen, ist meines Erachtens nicht sehr groß, da die Temperaturen der für die Untersuchungen in Frage kommenden Flüssigkeiten sich bestenfalls von etwa -75 bis $+75^0$ C, also nur im Verhältnis von 200 : 350 variieren lassen.

Außer der Größenordnungsbestimmung der Kerrkonstanten von einigen Dämpfen und von flüssiger Luft durch Zeeman[6]) und den Messungen mehr qualitativer Art von einigen Gasen von 1 bis 1,5 Atm.

[1]) R. Gans, Ann. d. Phys. **64**, 481, 1921.
[2]) R. Lundblad, Diss. Upsala 1920.
[3]) C. Bergholm, Ann. d. Phys. **65**, 128, 1921.
[4]) N. Lyon und F. Wolfram, Ann. d. Phys. **63**, 739, 1920.
[5]) P. Lertes, ZS. f. Phys. **6**, 257, 1921.
[6]) P. Zeeman, K. Ak. v. Wetenschappen te Amst. S. 558 ff. 1912.

Druck durch Leiser[1]) und Hansen[2]), erstreckten sich fast alle bisherigen Messungen des Kerreffektes auf Flüssigkeiten von zum Teil sehr kompliziertem Molekülbau.

Mehr Aussicht auf Erfolg versprach daher die Untersuchung der elektrischen Doppelbrechung von Gasen von einfachem Molekülbau, bei denen erstens wohlbekannte und definierte Bedingungen herrschen, und zweitens durch Druckänderungen von Atmosphärendruck bis zur Verflüssigung der Zustand in weitesten Grenzen verändert werden kann. Dabei interessiert uns besonders das Verhalten der Gase bei hohen Drucken. Denn sowohl der Bornsche wie auch der Ganssche Ansatz gehen bei hohen Temperaturen und geringen Dichten in die Langevinsche Formel über, da dann der Anteil der Dipole an der Doppelbrechung gleich Null wird. Der Richteffekt der Dipole, dem die ungeregelte Wärmebewegung der Molekel entgegenwirkt, kann sich nur bei großer Annäherung der Molekel, d. h. bei hohen Drucken ausbilden und muß sich dann durch starkes Ansteigen der Kerrkonstante bemerkbar machen, während wir bei geringeren Dichten eine Proportionalität der Kerrkonstante mit der Dichte erwarten müssen. Besondere Aussicht auf Erfolg versprach hierbei als Dipolgas Kohlensäure, einmal, weil es einen hohen kritischen Druck aufweist, sodann aber auch, weil ich hoffen durfte, den Einfluß der Dipole bei höheren Drucken auffinden zu können.

Die Versuche, die Messungen nach einer der bekannten relativen Methoden auszuführen, bei denen der Gangunterschied der zu messenden Substanz durch den entgegengesetzt gleich großen Gangunterschied einer an derselben Spannung liegenden bekannten Vergleichssubstanz kompensiert wird, schlugen bei der Kleinheit des Effekts fehl. Die Kerrkonstante von Kohlensäure ist so klein, daß zur Erzielung eines optisch gut meßbaren Effektes die angelegte Spannung möglichst groß sein muß. Trotz monatelanger Versuche an sorgfältig gereinigten, getrockneten und entstaubten Flüssigkeiten, wie CS_2, Benzol, Hexan und anderen mehr, war es mir nicht möglich, die für die Messungen erforderliche Spannung von etwa 30000 Volt an diesen Flüssigkeiten als Dielektrikum aufrechtzuerhalten. Es fand entweder starkes Schlieren statt, das jede Messung illusorisch machte, oder meistens Funkenentladung durch die Flüssigkeit durch. Ich sah mich daher gezwungen, die Messungen nach einer absoluten Methode vorzunehmen. Als empfindlichste kam hierbei eine modifizierte

[1]) Leiser, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 903, 1911.
[2]) Hansen, Ref. Szivessy, Jahrb. d. Radioakt. **16**, 414, 1920.

Bracesche[1]) Methode in Anwendung. Der Bracesche Halbschattenkompensator ist einer der empfindlichsten Apparate zur Messung kleiner Gangunterschiede; er ist wiederholt in der Literatur beschrieben worden, so von Tool, Hebecker, Peruca, Bergholm und zuletzt zusammenfassend von Szivessy[2]).

Er besteht im wesentlichen aus zwei Glimmerplatten, die zwischen Polarisator und Analysator gebracht sind. Die eine der Platten, die sogenannte Halbschattenplatte, bedeckt nur das halbe Gesichtsfeld und ist fest unter $\pi/4$ gegen die Schwingungsrichtung des Nicols orientiert. Die andere Platte, die sogenannte Kompensatorplatte, nimmt das ganze Gesichtsfeld ein und ist vermittelst Teilkreis drehbar angeordnet. Ist τ die Phasenverzögerung der Halbschattenplatte, φ die der Kompensatorplatte, so muß folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$\tau \leqq 2\varphi.$$

Wenn die drehbare Kompensatorplatte in ein Azimut α gebracht wird, daß die beiden Gesichtsfeldhälften gleich dunkel erscheinen (mit α bezeichnen wir das Azimut der einen Hauptschwingungsrichtung der Kompensatorplatte, bezogen auf die Schwingungsrichtung des Analysators als Nullage), so gilt die Beziehung:

$$\sin\varphi \,.\, \sin 2\alpha = \frac{\tau}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin^2 2\alpha\right), \tag{5}$$

oder, da φ sehr klein oder nahezu $\pi/4$ ist und in diesem Falle α sehr klein wird:

$$\sin\varphi \,.\, \sin 2\alpha = \frac{\tau}{2}. \tag{6}$$

Wird zwischen Polarisator und Analysator außerdem ein schwach doppelbrechendes Medium, dessen unbekannte Phasenverzögerung Δ beträgt, unter $\pi/4$ gegen die Schwingungsrichtung des Nicols gebracht, so muß die Kompensatorplatte aus dem früheren Azimut α in das neue Azimut α' gebracht werden, damit die beiden Gesichtsfeldhälften wieder gleich dunkel werden. Dann gilt:

$$\sin\varphi \,.\, \sin 2\alpha' = \frac{\tau}{2} + \Delta; \tag{7}$$

aus (6) und (7) folgt:

$$\Delta = \sin\varphi\,(\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha). \tag{8}$$

Wenn die Verzögerung der Kompensatorplatte φ als Funktion der Wellenlänge bekannt ist, ist es nur nötig, die Azimute α und α' zu

[1]) D. B. Brace, Phys. Rev. **18**, 70, 1904.
[2]) Szivessy, ZS. f. Phys. **6**, 311, 1921 u. a.

bestimmen. Eine Messung der Verzögerung τ der Halbschattenplatte ist nicht erforderlich, α bedeutet hierbei das Azimut der Nullage des Instrumentes. Nach Hebecker hängt die Empfindlichkeit des Apparates ab von der Verzögerung τ der Halbschattenplatte und Kompensatorplatte φ, sowie der Größe der zu messenden Verzögerung Δ und ergibt sich für denselben kleinen Winkel $\delta\alpha$, um den die Kompensatorplatte aus dem Nullazimut $2\alpha'$ gedreht werden muß, um eine eben merkbare Intensitätsänderung der beiden Gesichtsfeldhälften zu erzielen, als proportional dem Ausdruck:

$$\frac{\varphi}{\tau + 2\Delta}.$$

Ceteris paribus wird die Messung also um so genauer, je kleiner τ, die Verzögerung der Halbschattenplatte, ist. Sie ist so klein zu wählen, als die Intensität der Lichtquelle sowie die Empfindlichkeit des Auges zulassen. Die Verzögerung φ der Kompensatorplatte ist groß zu wählen und jeweils der zu messenden Verzögerung Δ anzupassen. Beide Platten wurden bisher aus Glimmer hergestellt. Dies gelingt auch leicht für die Kompensatorplatte. Für die optimale Empfindlichkeit muß jedoch die Halbschattenplatte eine Verzögerung aufweisen, die zwischen $\pi/360$ und $\pi/750$ liegt. Nun gelingt es nur mit den größten Schwierigkeiten, derart dünne Platten von hinreichender Größe und gleichmäßiger Dicke aus Glimmer abzuspalten. Es bedeutet daher die Anordnung von Szivessy[1]) einen wesentlichen Fortschritt. Er ersetzt die Halbschattenplatte aus Glimmer nach einem Kunstgriff von Leiser[2]) durch ein Glasblättchen, das gespannt wird, um die verschiedenen jeweils erforderlichen Phasenverzögerungen zu erzielen.

So verblüffend genau die jeweilige Einstellung auf Halbschattengleichheit ausgeführt werden kann, so umständlich, zeitraubend und ungenau verläuft die Gesamtmessung der Verzögerung Δ. Die Messung der Azimute α und α' geschieht nach Bergholm am besten in folgender Weise:

Nach (6) gibt es vier Azimute, bei welchen die Gesichtshälften gleich dunkel sind, wenn die Kompensatorplatte stets in demselben Sinne in ihrer Ebene weitergedreht wird, nämlich:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha_3 = \pi + \alpha, \quad \alpha_4 = \frac{3\pi}{2} - \alpha.$$

---

[1]) Szivessy, a. a. O.

[2]) R. Leiser, Elektrische Doppelbrechung der Kohlenstoffverbindungen. Habilitationsschrift, Karlsruhe 1910, S. 14.

Bedeuten die diesen Azimuten entsprechenden Teilkreisablesungen p_1, p_2, p_3, p_4, so folgt:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - (p_2 - p_1) = (p_3 - p_2) - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - (p_4 - p_3) = (p_1 - p_4) - \frac{\pi}{2}.$$

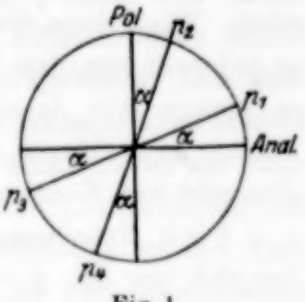


Fig. 1.

Nunmehr wird das Medium mit der zu messenden Verzögerung Δ unter $\pi/4$ zwischen die Nicol gebracht und in derselben Weise die dem Azimut $2\alpha'$ entsprechenden Teilkreisstellungen abgelesen, also:

$$2\alpha' = \frac{\pi}{2} - (p'_2 - p'_1) = (p'_3 - p'_2) - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - (p'_4 - p'_3) = (p'_1 - p'_4) - \frac{\pi}{2}.$$

Es müssen also für die Messung von Δ je vier Ablesungen der Azimute 2α und $2\alpha'$ vorgenommen werden. Selbst wenn durch einen Vorversuch die ungefähren Lagen von 2α und $2\alpha'$ festgelegt sind, sind doch zum mindesten je zwei Teilkreisablesungen erforderlich, die auch bei geschicktestem Arbeiten einige Zeit erfordern. Dies ist aber aus folgenden Gründen äußerst bedenklich.

Setzt sich nämlich die Verzögerung Δ aus zwei Komponenten zusammen, aus der wahren zu messenden Verzögerung Δ_w und einer unkontrollierbar veränderlichen störenden Verzögerung Δ_{st}, wie sie in den folgenden Versuchen dauernd durch thermische und mechanische Einflüsse auftrat, also $\Delta = \Delta_w + \Delta_{st}$, so gelingt es selbst bei raschestem Arbeiten nicht, die störende Verzögerung Δ_{st} auszumerzen, da das Azimut der Nullage sich während der Messung in nicht zu kontrollierender Weise dauernd verlegt und es unmöglich ist, ohne Teilkreisablesung die Nullage des Kompensators zu kontrollieren.

Wir können diese Schwierigkeit in folgender Weise beseitigen. Das Azimut der Nullage muß eindeutig unabhängig von allen Verzögerungen Δ festgelegt werden. Dies geschieht am besten, indem wir das Azimut der Nullage $= 0$ wählen. Es muß also $\sin\varphi \cdot \sin 2\alpha = \frac{\tau}{2}$ der Gleichung (6) $= 0$ werden, dann vereinfacht sich (8) zu

$$\Delta = \sin\varphi \cdot \sin 2\alpha'. \qquad (9)$$

Wir erreichen die Forderung, daß $\frac{\tau}{2} = 0$ wird, ohne Empfindlichkeits-

einbuße in einfacher Weise dadurch, daß wir den Halbschattenglimmer durch ein Halbschattensystem ersetzen, das in passender Weise orientiert wird. Wenn dann der Kompensatorglimmer derart angebracht wird, daß er jederzeit aus dem Lichtweg durch Schwenken entfernt werden kann, so können wir dauernd ohne Teilkreisablesung die einmal festgelegte Nullage kontrollieren und kommen durch Einschwenken des Kompensatorglimmers und Kompensieren mit nur einer Teilkreisablesung aus.

Diese Anordnung führte zu folgender Ausführung des Apparats, der sich bei den äußerst schwierigen Messungen bestens bewährt hat. Der Kompensatorglimmer von etwa $\lambda/40$ Verzögerung für Li-Orangelicht wurde aus einem Glimmerblatt abgespalten und sorgfältig optisch auf gleichmäßige Dicke geprüft; er wurde mit Kanadabalsam zwischen

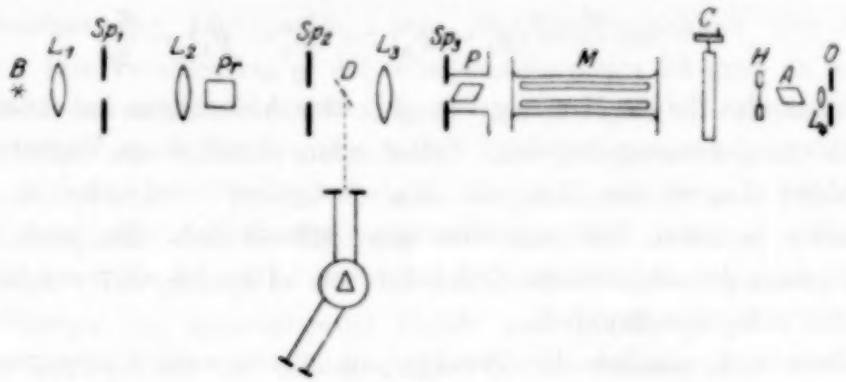


Fig. 2.

zwei spannungsfreie Mikroskopdeckgläser gekittet und mit einer Ecke an einem Teilkreis befestigt, der grob von Hand und fein vermittelst einer Mikrometerschraube gedreht werden konnte. Die Teilkreisablesung erfolgte vermittelst Lichtzeiger an einer gebogenen Skale in 114,5 cm Abstand, etwa 0,75 Minuten Drehung des Kompensatorglimmers konnte bequem abgelesen werden. Unmittelbar hinter dem Kompensatorglimmer war ein Leisersches Halbschattensystem montiert. Bei gespanntem Halbschattensystem ist die Nullage des Kompensators dadurch gekennzeichnet, daß sich an den Gesichtsfeldhälften nichts ändern darf. Durch Ausschwenken des Kompensators kann diese Nullage dauernd kontrolliert und nötigenfalls bei kleinen Änderungen durch Spannen des Halbschattensystems nachjustiert werden. Größere Störverzögerungen mußten durch einen zweiten Drehglimmer kompensiert werden, dessen Verzögerung und Azimut aber nicht bekannt sein brauchen. Dieser zweite Glimmer von möglichst kleiner Verzögerung wurde in einem einfachen Drehgestell vor dem Kompensator in den Lichtweg eingefügt.

Die übrige optische Anordnung ergibt sich aus Fig. 2. Das durch ein System von Linsen, Spalten und ein Prisma parallel und monochromatisch gemachte Licht einer Bogenlampe mit Lithiumkohlen durchsetzt nacheinander Polarisator, Meßtrog und den Kompensator. Der Meßtrog bestand aus einem 52 cm langen dickwandigen Mannesmannstahlrohr von 32 mm innerem Durchmesser mit starken aufgeschweißten Endflanschen. Den Abschluß des Rohrs bewirkten dicke Eisenscheiben, die mit je vier Bolzen und dazwischenliegender Bleidichtung an die Endflanschen geschraubt wurden. Diese Scheiben besaßen zum Lichtdurchlaß in der Mitte eine versenkte Bohrung von 2 mm Durchmesser, die durch mit Rollermasse aufgekittete Gläser verschlossen waren. In dem Rohr

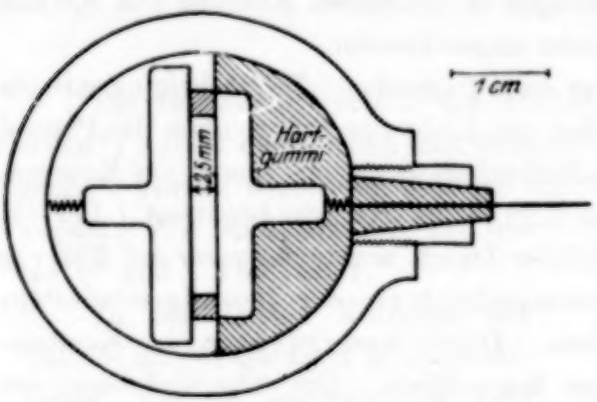


Fig. 3. Querschnitt des Druckrohrs.

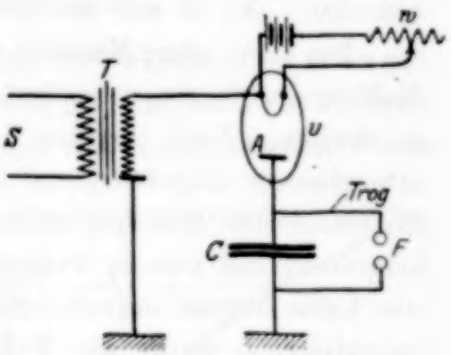


Fig. 4.

befanden sich die beiden 50 cm langen mattvernickelten Elektroden aus T-Eisen, die sorgfältig gehobelt und geschliffen waren.

Die isolierte Platte wurde durch zwei Hartgummistücke in der Mitte des Rohres fixiert. Die andere wurde durch zwei Federn mit der geerdeten Rohrwand leitend verbunden und gegen die isolierte gepreßt. Zwischen den Elektroden befanden sich vier je 2,51 mm dicke Quarzstücke, die den konstanten Abstand bewirkten. Das Rohr enthielt drei Rohransätze. Ein Ansatz diente zum Anschluß an die Bombe, der zweite Ansatz nahm ein Ventil zum Ablassen auf, durch den dritten Ansatz mit konischer Hartgummidichtung wurde die Spannung angeschlossen. Zwischen Bombe und Rohr war eine Kammer eingefügt, die zur Trocknung der Kohlensäure mit Phosphorpentoxyd beschickt wurde. Die Druckmessung erfolgte vermittelst eines Präzisionsmanometers der Firma Schäffer u. Budenberg in Magdeburg, das vor und nach den Messungen an einer Stückrathschen[1]) Druckwage geeicht wurde.

[1]) L. Holborn und A. Baumann, Ann. d. Phys. **31**, 945, 1910.

Zum Aufladen des Trogs benutzte ich zuerst eine Influenzmaschine. Als dann im Sommer infolge der feuchten Kellerluft die Influenzmaschine versagte, verwendete ich einen auf etwa 30000 Volt eff. transformierten Wechselstrom von 1000 Perioden. Dieser Wechselstrom wurde nach folgendem Schema (Fig. 4) gleichgerichtet:

Der eine Pol des Transformators T war geerdet, der andere Pol wurde mit der Kathode einer Glühkathodenventilröhre V verbunden. Mittels Regulierwiderstand w konnte die Temperatur der Glühkathode geregelt werden. Die Anode A des Ventilrohrs war mit der Kapazität C von etwa 1000 cm verbunden, deren anderer Belag geerdet war; parallel zur Kapazität lag die Funkenstrecke F, deren Kugeln von 1 cm Durchmesser sich während aller Messungen in demselben Abstand von 8,8 mm befanden. An A war das Meßrohr angeschlossen.

Der Gang einer Messung war kurz folgender: Der richtig orientierte Meßtrog wurde derart justiert, daß das Licht durchging, ohne die Platten zu streifen. Nach Spannen des Halbschattensystems wurde der Kompensatorglimmer eingeführt und das Azimut der Nullage bestimmt. Der für die betreffende Messung erforderliche Druck wurde langsam im Meßtrog hergestellt und zwecks Temperaturausgleich vor der Messung mindestens eine halbe Stunde aufrechterhalten. Durch Ausschwenken des Kompensatorglimmers wurde die Nullage kontrolliert. Die Abschlußgläser des Rohres wurden namentlich bei höheren Drucken durch mechanische Beanspruchung doppelbrechend: trotz häufigem Auswechseln und sorgfältigem Kitten ließ sich diese Störungsquelle nicht beseitigen. Durch Einfügen des zweiten Hilfsglimmers konnte aber diese Störverzögerung kompensiert und die alte Nullage wieder hergestellt werden. Der Widerstand w der Ventilröhre wurde derart einreguliert, daß sich der Kondensator alle 2 bis 3 Sekunden über die Funkenstrecke entlud. Ein geeignetes Poloniumpräparat, das unter der Funkenstrecke angebracht war, beseitigte den Entladungsverzug. Die dieser Spannung entsprechende Doppelbrechung wurde am Drehkompensator gemessen. Da die Funken mit maschinenmäßiger Regelmäßigkeit übersprangen, konnte diese Messung mit aller nur erwünschten Genauigkeit erfolgen. Vor und nach jeder einzelnen Messung wurde das Azimut der Nullage kontrolliert und gemessen.

Es wurde gelboranges Li-Licht verwendet von $\lambda = 610{,}4\,\mathrm{m}\mu$, für das meine Augen am empfindlichsten waren. Die Temperatur wurde bei den Versuchen möglichst auf 18° gehalten und lag in der Regel zwischen 17,5 und 18,5°.

Die folgende Tabelle und Fig. 5 zeigt die Ergebnisse der Messungen. Die einzelnen Resultate sind Mittelwerte aus je 20 Messungen, die drei voneinander unabhängigen Meßreihen angehören. Die Werte der einzelnen Meßreihen weichen im Mittel nur um 1,5 Proz. voneinander ab.

Druck in Atmosphären	$B \cdot 10^{11}$	Dichte relativ	$C = \frac{B}{d} \cdot 10^{11}$	$B \cdot 10^{11}$ berechnet
10	7,8	10,0	0,78	7,8
20	16,9	21,3	0,79	16,6
30	26,6	34,8	0,77	27,0
40	39,6	51,5	0,77	40,1
45	49,5	61,8	0,80	48,2
47,5	54,3	69,2	0,78	54,3
50	59,6	78,4	0,77	61,0
			Mittel 0,78	

Die relativen Werte d der Dichte für 18° wurden der Amagatschen[1]) Arbeit entnommen und unterhalb von 30 Atm. nach der Sarrauschen[2]) Formel berechnet, die sich vorzüglich den Amagatschen Werten anpaßt. Sie sind bezogen auf die bei 0° und 1 Atm. = 1.

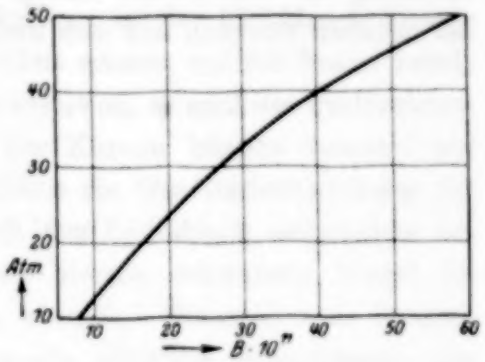


Fig. 5.

In der dritten Kolumne der Tabelle ist der Quotient B/d niedergelegt, um ein anschauliches Bild der Abhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung von der Dichte zu erhalten. Dieser Quotient muß, wenn die Dipole bei steigender Annäherung der Moleküle wirksam werden sollen, bei steigendem Druck ansteigen. Innerhalb der Meßfehler ist aber dieser Quotient konstant, d. h. die elektrische Doppelbrechung ist streng der Dichte proportional. In der letzten Kolumne der Tabelle sind die Werte B der elektrischen Doppelbrechung in der Weise berechnet, daß der Mittelwert von $C = 0{,}78$ mit den jeweiligen dem Druck entsprechenden Dichten multipliziert ist. Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten ist eine ganz ausgezeichnete.

Oberhalb von 52 Atm. war es mir trotz zahlreicher Versuche nicht möglich, sicher reproduzierbare, einwandfreie Messungen auszuführen, da

[1]) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. **29**, 52, 1893.
[2]) Sarrau, C. R. **101**, 941, 1885.

sich die Abschlußgläser optisch sehr stark deformierten und die an sich schon sehr schwierigen Messungen unsicher wurden. Unterhalb von 10 Atm. wurden keine Messungen ausgeführt, einmal weil die Meßgenauigkeit bei den kleinen Drucken zu gering wurde, zweitens aber diese Messungen kein besonderes Interesse hatten, weil der mögliche Einfluß der Dipole nur bei höheren Drucken zu erwarten war. Nehmen wir aber Proportionalität von B mit dem Druck an, die sicher erwiesen ist, so würde für B bei 1 Atm. Druck zu setzen sein:

$$B = 0{,}78 \cdot 10^{-11}.$$

Zusammenfassung.

1. Der Bracesche Halbschattenkompensator wurde vereinfacht und verbessert.

2. Die elektrische Doppelbrechung von Kohlensäure wurde im Druckintervall von 10 bis 50 Atm. gemessen.

3. In diesem Druckintervall erwies sich die elektrische Doppelbrechung als der Dichte streng proportional, ein Einfluß der Dipole bei höheren Drucken ließ sich nicht feststellen.

Über die Existenzmöglichkeit von kosmischem Staube in der Sonnenkorona.

Von **Wilhelm Anderson** in Dorpat.

(Eingegangen am 31. Juli 1924.)

Es wird gezeigt, daß näher als ein Sonnenradius von der Photosphäre keine festen Partikelchen aus Kohlenstoff existieren können, weil sie zu rasch verdampfen würden. Auch können die verdampften Partikelchen nicht rasch genug durch neue ersetzt werden; ein derartiges „statistisches Gleichgewicht" hat sich als unmöglich erwiesen. Ähnliche Resultate ergeben sich auch dann, wenn die Partikelchen nicht aus Kohlenstoff, sondern aus anderen Stoffen bestehen sollten. Die bekannte Theorie von Svante Arrhenius muß deshalb aufgegeben werden.

§ 1. Nachdem die spektroskopische Beobachtung der Korona ein kontinuierliches Spektrum gezeigt hatte, tauchte der Gedanke auf, daß die Korona aus kosmischem Staube, d. h. aus kleinen festen oder flüssigen Partikelchen bestehen muß. Diese Theorie wurde besonders durch die Untersuchungen von Svante Arrhenius populär. Er nahm an, daß in der Korona, dank dem Lichtdrucke, eine Art Zuchtwahl zustande kommt. Für sehr große oder sehr kleine Partikelchen ist der Lichtdruck kleiner als die Gravitation, und diese Partikelchen müssen auf die Sonne herabfallen. Übertrifft der Lichtdruck die Gravitation, so muß das Partikelchen in den Weltenraum wegfliegen. In der Korona können dauernd nur solche Partikelchen existieren, bei welchen die Gravitationswirkung der Sonne genau (oder beinah genau) durch den Lichtdruck aufgehoben ist. Arrhenius hat die Temperatur einer kleinen schwarzen Kugel im Abstande von $\frac{3}{45}$ Sonnenradius (gleich etwa 0,7 Minuten) vom Sonnenrande zu 4620^0 abs. berechnet, wenn die effektive Sonnentemperatur gleich 6000^0 abs. angenommen wird. Arrhenius glaubt, daß diese Partikelchen aus geschmolzenem Eisen bestehen könnten, dessen spezifisches Gewicht er bei so hoher Temperatur gleich 6 annimmt. Damit der Lichtdruck die Gravitation gerade aufwiegen kann, muß der Durchmesser eines jeden Partikelchens gleich 250 $m\mu$ sein [1]). Die Theorie von Arrhenius ist nicht ohne Widerspruch geblieben. So sagt z. B. C. G. Abbot: „Arrhenius computes a possible temperature of 4620^0 at 0,7′ from the limb, and then suggests that the matter there may be liquid drops. How is this possible [2])?" Trotz dieser Widersprüche hat die Theorie von Arrhenius selbst in der neuesten Zeit Anhänger. Sogar noch im vorigen Jahre sagte W. W. Campbell (Direktor des Lick-

[1]) Astrophys. Journ. **20**, 224—231, 1904.

[2]) Lick Bull. Nr. 132, 10. Fußnote zu S. 20, 1908.

Observatoriums): „The spectrographic and polarigraphic observations of the coronal light show clearly that the coronal materials close to the sun are in part gaseous and in part solid or liquid particles . . .“ [1]). Es wäre darum durchaus zeitgemäß, die Frage über die Existenzmöglichkeit von kosmischem Staube in der Sonnenkorona einer ernsten Prüfung vom physikalischen und chemischen Standpunkte zu unterwerfen.

§ 2. Nehmen wir an, daß das Koronapartikelchen kugelförmig ist und klein genug, damit keine merklichen Temperaturdifferenzen entstehen können. Der anfängliche Radius sei r cm; da aber das Partikelchen verdampft, so sei zu einem bestimmten Moment der Radius des Partikelchens gleich x cm. Mag in den folgenden dt sec der Radius sich um dx cm verkürzen; dadurch wird die Kugel $4\pi x^2 \varrho\, dx$ g verlieren, wenn ϱ g . cm^{-3} die Dichte bedeutet. Andererseits wird die Kugel $4\pi x^2 m\, dt$ g verlieren, wenn man durch m die Masse bezeichnet, die 1 cm^2 freier Oberfläche des betreffenden Stoffes in einer Sekunde durch Verdampfung verliert. Wir können also schreiben: $4\pi x^2 \varrho\, dx = 4\pi x^2 m\, dt$ oder $dt = \frac{\varrho\, dx}{m}$. Ist τ sec die ganze Lebensdauer einer Kugel vom anfänglichen Radius r cm, so haben wir:

$$\int_0^{\tau} dt = \int_0^{r} \frac{\varrho\, dx}{m}$$

oder

$$\tau = \frac{\varrho\, r}{m} \text{ sec.} \qquad (1)$$

(Bei dieser Integrierung wurde vorausgesetzt, daß m von x unabhängig ist. Wenn man aber in Betracht zieht, daß sehr kleine Kugeln nicht nur absolut, sondern auch relativ rascher verdampfen als große, so muß in realen Fällen m bei sehr kleinen r größer werden, wodurch die Lebensdauer τ vermindert wird.)

§ 3. Mag das Koronapartikelchen aus Kohlenstoff bestehen. In den „Physikalisch-chemischen Tabellen“ von Landolt-Börnstein sind die Sublimationspunkte des Kohlenstoffs für verschiedene Drucke nach H. Kohn angegeben [2]). Z. B. bei Atmosphärendruck ist der Sublimationspunkt 3917° C. Seit dem Erscheinen der letzten (5.) Auflage der „Physikalisch-chemischen Tabellen“ sind noch einige andere Untersuchungen über das Verdampfen (eigentlich Sublimieren) des Kohlenstoffs veröffentlicht worden. Für uns ist die wichtigste Untersuchung diejenige

[1]) Popular Astronomy **31**, 643, 1923.
[2]) 5. Aufl. 1923, S. 319.

von Wertenstein und Jedrzejewski[1]). Diese Forscher haben folgende Formeln aufgestellt:

$$\log m = 14{,}19 - \frac{47000}{T} - 1{,}25 \log T, \tag{2}$$

$$\log p = 14{,}87 - \frac{47000}{T} - 0{,}75 \log T. \tag{3}$$

Hier bedeutet m die Masse, welche im Vakuum von 1 cm² in einer Sekunde verdampft [also dieselbe Größe, welche wir in der Gleichung (1) ebenfalls durch m bezeichnet haben]; p ist der Sublimationsdruck in mm Hg, T die absolute Temperatur und log ist der Briggsche Logarithmus. Nach (3) ist der Siedepunkt bei 760 mm gleich etwa 5100° abs., also bedeutend höher als ihn H. Kohn gefunden hat (4190° abs.). Die auf den absoluten Nullpunkt bezogene Sublimationswärme des Kohlenstoffs geben Wertenstein und Jedrzejewski zu 216000 cal an; bei höherer Temperatur muß sie natürlich kleiner sein.

Um die Lebensdauer unseres Kohlenstoffpartikelchens nach (1) zu berechnen, muß man die Dichte ϱ kennen. Von allen Modifikationen des Kohlenstoffs hat Diamant die größte Dichte. Aber als Diamant kann Kohlenstoff bei hoher Temperatur nur unter sehr großem Drucke stabil sein, darum ist es ganz ausgeschlossen, daß die Koronapartikelchen aus Diamant bestehen könnten. Nach G. Friedel und G. Ribaud beginnt ein Diamant schon bei 1500° C sich mit einer dunklen Schicht zu bedecken, welche ein Gemisch von Graphit und Diamant darstellt. Etwas über 1885° verwandelt sich der Diamant während einer oder zwei Minuten in Graphit. Bei bedeutend höheren Temperaturen ist diese Verwandlung beinahe momentan[2]). R. Vogel und G. Tammann haben gefunden, daß die ersten Andeutungen einer Umwandlung von Diamant in Graphit schon bei 1000° C auftreten können, daß dieselben aber bei dieser Temperatur vom Zufall abhängen[3]). Was die Dichte des Graphits anbetrifft, so finden wir in den „Physikalisch-chemischen Tabellen" (S. 287) eine Reihe ziemlich verschiedener Angaben. Z. B. nach Rammelsberg soll die Dichte zwischen 2,17 und 2,32 schwanken; nach Moissan (für künstlichen Graphit) zwischen 2,10 und 2,25 (je nach der Darstellung). Natürlich muß bei höheren Temperaturen die Dichte etwas kleiner werden. Sollten wir also annehmen, daß das Koronapartikelchen aus massivem Graphit besteht, so können wir seine Dichte ohne großen Fehler gleich

[1]) C. R. **177**, 316—319, 1923.
[2]) Ebenda **178**, 1126—1129, 1924.
[3]) ZS. f. phys. Chem. **69**, 602, 1909.

$\varrho = 2\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ setzen. Den Durchmesser des Partikelchens wollen wir gleich $2r = 1\,\mu = 10^{-4}\,\mathrm{cm}$ annehmen. Dann ist die Lebensdauer des Koronapartikelchens nach (1) gleich:

$$\tau = \frac{10^{-4}}{m}\,\mathrm{sec}. \tag{4}$$

§ 4. Wenn das Koronapartikelchen (welches wir als absolut schwarz betrachten wollen) nicht verdampfen würde, so wäre es sehr leicht, für verschiedene Entfernungen von der Sonnenoberfläche seine Temperatur zu berechnen. Mag z. B. das Partikelchen in der Entfernung eines halben Sonnenradius von der Photosphäre (deren effektive Temperatur wir gleich 5900° abs. annehmen) sich befinden. Wenn die Photosphärenoberfläche das Partikelchen von allen Seiten umschließen würde, so müßte dessen Temperatur ebenfalls 5900° abs. werden. Dann würde die Photosphäre, vom Partikelchen aus betrachtet, unter einem Raumwinkel von 4π erscheinen. In Wirklichkeit nimmt in unserem Falle die Photosphäre einen etwa 7,8541 mal kleineren Raumwinkel ein; also muß das Partikelchen auch 7,8541 mal weniger strahlende Energie erhalten (und emittieren) als dann, wenn es von der Photosphäre umschlossen wäre. Wenn man die Temperatur des Partikelchens durch T_1 bezeichnet, so kann man auf Grund des Stefanschen Gesetzes schreiben: $5900^4 : T_1^4 = 7{,}8541$, was $T_1 = 3524°$ ergibt (abgerundet). Jedoch kann T_1 nicht als die wahre Temperatur des Partikelchens betrachtet werden: dank dem Verdampfen des Kohlenstoffs muß die wahre Temperatur niedriger sein. Wenn man letztere durch T bezeichnet, so wird immer $T_1 > T$ sein; nur bei unendlich langsamer Verdampfung ist $T_1 = T$. Wenn das Partikelchen nicht verdampfen würde, so müßte es $4\pi x^2 \sigma T_1^4\,\mathrm{erg\,sec^{-1}}$ emittieren (und natürlich ebensoviel absorbieren), wo x den Radius und σ die Stefansche Konstante bedeutet. Wenn das Partikelchen verdampft, so wird es natürlich auch $4\pi x^2 \sigma T_1^4$ absorbieren, aber emittieren wird es $4\pi x^2 \sigma T^4\,\mathrm{erg\,sec^{-1}}$; außerdem wird es noch $4\pi x^2 m s\,\mathrm{erg\,sec^{-1}}$ durchs Verdampfen verlieren, wo s die in erg ausgedrückte Sublimationswärme eines Gramms Kohlenstoff bedeutet. Da die zugeführte Energie gleich der abgeführten sein muß, so kann man schreiben:

$$4\pi x^2 \sigma T_1^4 = 4\pi x^2 \sigma T^4 + 4\pi x^2 m s$$

oder

$$T_1^4 = T^4 + \frac{m s}{\sigma}. \tag{5}$$

Die auf ein Gramm-Atom (= 12 g) bezogene Sublimationswärme des Kohlenstoffs ist etwa 216000 cal gleich (bei höheren Temperaturen

weniger), also auf 1 g kommt 18000 cal $= 7{,}533 \cdot 10^{11}$ erg. Wenn wir also $s = 7{,}533 \cdot 10^{11}$ setzen und

$$\sigma = 5{,}738 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,sec^{-1}\,grad^{-4}},$$

so erhalten wir aus (2) und (5):

$$T_1^4 = T^4 + 1{,}312\,827 \cdot 10^{30{,}19 - \frac{47\,000}{T} - 1{,}25 \log T}. \qquad (6)$$

Diese transzendente Gleichung gestattet T zu berechnen, wenn man T_1 kennt. In unserem Falle ist $T_1 = 3524^0$; durch ein Näherungsverfahren habe ich $T = 3507^0$ gefunden (abgerundet). Setzt man diesen Wert in (2) und (3) ein, so erhält man $m = 0{,}000\,227\,\mathrm{g\,cm^{-2}\,sec^{-1}}$ und $p = 0{,}0645$ mm. Schließlich aus (4) ergibt sich $\tau = 0{,}44$ sec (alle diese Zahlen sind abgerundet). Das ist die Lebensdauer unseres Partikelchens. In der Tabelle 1 habe ich derartige Berechnungen für verschiedene Entfernungen von der Photosphäre durchgeführt. Während in kleinen Entfernungen die Partikelchen beinahe momentan verdampfen müssen, haben sie in großen Entfernungen eine solche Lebensdauer, welche die wahrscheinliche Lebensdauer unseres Planetensystems weit übertrifft. Was die Temperaturen anbetrifft, so ist bei kleinen Entfernungen von der Photosphäre T merklich kleiner als T_1; bei größeren Entfernungen wird der Unterschied unmerklich, was ja auch selbstverständlich ist: je langsamer das Partikelchen verdampft, desto geringer ist die dadurch hervorgerufene Abkühlung, desto geringer also auch der Unterschied zwischen T und T_1.

§ 5. Bei diesen Berechnungen habe ich den Wärmeverlust der Partikelchen durch Wärmeleitung und Konvektion in den Koronagasen (wenn letztere kälter sein sollten als die Partikelchen) ignoriert. Daß ich dazu berechtigt war, kann man aus den Experimenten Irving Langmuirs ersehen. Er brachte einen dünnen Metallfaden durch einen elektrischen Strom zum Glühen und bestimmte die abgestrahlte Energie sowie diejenige, welche durch Konvektion und Wärmeleitung des umliegenden Gases abgeführt wurde. Z. B. bei 2000° abs. verlor 1 cm Metallfaden durch Strahlung 0,62 Watt; durch Konvektion und Wärmeleitung des umgebenden Wasserstoffs, der sich unter einem Drucke von 4,4 mm befand, wurden 1,44 Watt abgeführt, also mehr als das Doppelte. Betrug aber der Druck 0,015 mm, so wurden durch das Gas nur 0,031 Watt abgeführt, also 20 mal weniger als durch Strahlung [1]). Da der Gasdruck in der Korona sicherlich noch sehr viel kleiner als 0,015 mm ist, so kann man den Wärmeverlust, welchen das Koronapartikelchen durch Wärmeleitung und Konvektion erleiden könnte, neben dem Verluste durch Strahlung ruhig ignorieren.

[1]) ZS. f. Elektrochem. **20**, 504, 1914.

Bei den Berechnungen in der Tabelle 1 habe ich angenommen, daß der Partialdruck des Kohlenstoffdampfes in den Koronagasen überall sehr viel kleiner als der Sättigungsdruck ist (sollte der Raum an Kohlenstoffdampf gesättigt sein, so würde unser Partikelchen nicht verdampfen). Ob das für sehr große Entfernungen von der Photosphäre zutreffend ist, vermag ich nicht zu sagen; für nicht zu große ist es aber sicherlich der Fall. Nehmen wir z. B. ein Partikelchen in der Entfernung 0,1 Sonnenradius von der Photosphäre. Wenn das Partikelchen in einer Atmosphäre sich befinden sollte, die an Kohlenstoffdampf gesättigt wäre, so könnte es nicht verdampfen, also auch durch die Verdampfung sich nicht abkühlen. Darum würde seine Temperatur nach Tabelle 1 nicht 3983° abs. sein, sondern 4336° abs. Bei dieser Temperatur ist der Sublimationsdruck des Kohlenstoffs nach (3) gleich etwa 20,077 mm. So groß müßte auch der Partialdruck des Kohlenstoffdampfes dort sein, damit das Partikelchen nicht verdampfen sollte. Es ist nun ganz sicher, daß die Koronagase zum größten Teil nicht aus Kohlenstoff bestehen: Kohlenstoffdampf dürfte wohl schwerlich mehr als 1 Proz. ausmachen; wahrscheinlich bedeutend weniger. Wenn trotzdem der Partialdruck des Kohlenstoffdampfes 20,077 mm betragen sollte, so muß der Gesamtdruck nicht weniger als 2007,7 mm, d. h. über $2^1/_2$ Atmosphären betragen. Natürlich kann von solch einem Drucke in der Korona überhaupt keine Rede sein. Nehmen wir jetzt ein Partikelchen in der Entfernung 1 Sonnenradius von der Photosphäre. Soll dies Partikelchen nicht verdampfen, so muß dort der Partialdruck des Kohlenstoffdampfes $4{,}034 \cdot 10^{-4}$ mm betragen und der Gesamtdruck wohl kaum weniger als 0,04 mm. In Wirklichkeit wird der Druck in der Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre sicherlich viel kleiner sein [1]).

§ 6. Wir haben die Dichte des Partikelchens gleich $2\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ angenommen. Es ist aber denkbar, daß die Partikelchen nicht massiv, sondern porös sein könnten; dann wird ihre Dichte natürlich kleiner sein. Nach (1) ist aber die Lebensdauer eines Partikelchens proportional der Dichte. Daraus folgt, daß ein poröses Partikelchen rascher verdampfen muß als ein gleich großes aus massivem Kohlenstoff.

Ich habe die Zahlen der Tabelle 1 auf Grund der Untersuchungen von Wertenstein und Jedrzejewski berechnet, welche für den Siedepunkt des Kohlenstoffs 5100° abs. gefunden haben. Ganz vor kurzem

[1]) Nach den neuesten Untersuchungen von H. N. Russel und J. Q. Stewart beträgt der Druck an der Basis der Chromosphäre etwa 0,0001 mm (Astrophys. Journ. 59, 208, 1924). Natürlich muß in der Korona der Druck noch sehr viel kleiner sein.

Tabelle 1.

Entfernungen von der Photosphäre in Sonnenradien	Temperaturen einer kleinen schwarzen Kugel aus einem Stoffe, der nicht verdampft	Temperaturen einer kleinen schwarzen Kugel aus Kohlenstoff	Der entsprechende Sublimationsdruck des Kohlenstoffs mm	Lebensdauer einer schwarzen Kugel aus Kohlenstoff von der Dichte = 2 g cm^{-3} und vom Durchmesser = 1 μ
0,1	4336° abs.	3983° abs.	2,343	0,0129 sec
0,5	3524	3507	0,0645	0,44 „
1	3002	3002	$4{,}034 \cdot 10^{-4}$	65 „
2	2426	2426	$9{,}074 \cdot 10^{-8}$	3 Tage
3	2094	2094	$8{,}594 \cdot 10^{-11}$	8 Jahre
4	1870	1870	$1{,}916 \cdot 10^{-13}$	3 423 Jhr.
5	1706	1706	$7{,}874 \cdot 10^{-16}$	795 600 „
10	1258	1258	$1{,}529 \cdot 10^{-25}$	$3{,}519 \cdot 10^{15}$ „
20	914	914	$3{,}6 \cdot 10^{-40}$	$2{,}8 \cdot 10^{29}$ „

hat de Forcrand eine Untersuchung veröffentlicht, wo er zu dem Schluß kommt, daß die bis jetzt gefundenen Werte für den Siedepunkt und für die Sublimationswärme des Kohlenstoffs noch nicht als absolut sicher fixiert betrachtet werden können[1]). Er berechnet die Sublimationswärme nach zwei verschiedenen Methoden: nach einer Methode findet er 180253 cal, nach der anderen 163620 cal; der Mittelwert beträgt 171936 oder abgerundet 172000 cal (also merklich weniger als wir angenommen hatten). Er meint, daß dieser Mittelwert bis auf 5 Proz. sicher sei. Bei diesen Berechnungen nahm er an, daß der Siedepunkt des Kohlenstoffs gleich 4190° abs. sei (wie ihn H. Kohn gefunden hatte). Sollten wir statt der von Wertenstein und Jedrzejewski gefundenen Zahlen diejenigen von H. Kohn und de Forcrand akzeptieren, so müßten wir die Lebensdauer der Koronapartikelchen für bedeutend kürzer halten, als es in der Tabelle 1 angegeben ist.

§ 7. W. König nimmt an, daß ultramikroskopische Teilchen von einer adsorbierten Gasschicht bedeckt sind[2]). Otto Halpern meint, daß im Falle von kleinen Quecksilberkügelchen ein solcher „Gasmantel" das Diffundieren des Quecksilberdampfes stark verzögert[3]). Vielleicht sind auch die Koronapartikelchen von einem ähnlichen „Gasmantel" umhüllt, welcher die Dämpfe schwer durchläßt und dadurch die Verdampfung verzögert? — Ich halte dies für unmöglich: es ist wohl wahr, daß Metalle und andere Stoffe sich mit einer adsorbierten Gasschicht bedecken können, aber nur nicht dann, wenn sie in hohem Vakuum geglüht werden, wie

[1]) C. R. **178**, 1868—1871, 1924.
[2]) ZS. f. Phys. **11**, 259, 1922.
[3]) Ann. d. Phys. (4) **73**, 468, 1924.

es in der Korona der Fall ist. Ganz im Gegenteil: „Kurzes Glühen bringt die dem Metalle aufgelagerte Schicht weg, die Fortsetzung der Entgasung führt zur Austreibung auch zwischen die Metallatome eingelagerter Gasmoleküle ...“ [1]).

§ 8. Könnte man aber nicht vielleicht annehmen, daß die Koronapartikelchen zwar rasch verdampfen, dafür aber ebenso rasch immer durch neue ersetzt werden? — S. Arrhenius weist auf die Experimente von C. T. R. Wilson hin, der gefunden hat, daß negative Ionen die Fähigkeit haben, Dämpfe zu kondensieren (auch positive Ionen haben dieselbe Fähigkeit, aber in geringerem Maße). Da nun die Gase der Korona durch die ultraviolette Strahlung der Sonne stark ionisiert sein müssen, so meint Arrhenius, daß um die negativen Ionen sich kleine Tropfen kondensieren könnten [2]). Für Entfernungen kleiner als 1 Sonnenradius von der Photosphäre kann ich jedoch solche Annahme nicht gelten lassen. Es ist ja wahr, daß negative Ionen Dämpfe kondensieren können, aber nur dann, wenn der Raum an diesen Dämpfen übersättigt ist. Auch der von Arrhenius zitierte C. T. R. Wilson sagt, daß die Kondensation von Wasserdampf durch negative Ionen bei vierfacher Übersättigung erfolgte und durch positive bei sechsfacher [3]). Nun haben wir oben gesehen, daß für Entfernungen kleiner als 1 Sonnenradius von der Photosphäre der Raum unmöglich an Kohlenstoffdampf gesättigt sein kann; natürlich kann von einer Übersättigung erst recht keine Rede sein.

Sollten sich aber die Kohlenstoffpartikelchen in entfernteren Teilen der Korona gebildet haben, so werden sie wieder verdampft sein, noch lange bevor sie in die inneren Teile der Korona vordringen könnten.

Eine etwas andere Ansicht hat E. Öpik geäußert: „... sie [die Korona] besteht wahrscheinlich aus feinstem Staube, welcher sich von der Sonne abgelöst hat und in den Weltenraum getragen wird [4]).“ Auch diese Ansicht kann ich nicht gelten lassen. Die Lebensdauer eines Kohlenstoffpartikelchens für Entfernungen kleiner als 0,1 Sonnenradius von der Photosphäre ist nach Tabelle 1 geringer als 0,0129 sec. Sollte nur der „Sonnenstaub“ sogar mit einer ganz unwahrscheinlichen Geschwindigkeit von 50000 km sec^{-1} sich von der Sonne fortbewegen, so wird er dennoch auf einer Entfernung, die kleiner als $50000 \cdot 0{,}0129 = 645$ km ist, völlig verdampft sein. Der „Sonnenstaub“ könnte sich

[1]) Richard Vieweg, Ann. d. Phys. (4) **74**, 146, 1924.
[2]) Proc. Roy. Soc. London **73**, 496, 1904.
[3]) Ebenda **65**, 289, 1899.
[4]) E. K. Öpik, Die Sonne nach den neuesten Forschungen, Moskau 1922, S. 24 (russisch).

nicht einmal auf 0,001 Sonnenradius von der Sonne entfernen! Wenn also in der Korona Kohlenstoffpartikelchen verdampfen, die weniger als 1 Sonnenradius von der Photosphäre entfernt sind, so können sie weder aus dem Weltenraum noch von der Sonne aus durch neue ersetzt werden.

§ 9. Wir haben gefunden, daß Kohlenstoffpartikelchen in kleineren als 1-Sonnenradius-Entfernungen von der Photosphäre nicht existenzfähig sind, da sie zu rasch verdampfen und auch nicht durch neue ersetzt werden können. Sollte es aber nicht möglich sein, daß die Partikelchen aus irgend einem anderen Stoffe bestehen, der nicht so rasch verdampft wie Kohlenstoff? Wir haben ja oben gesehen, daß Arrhenius Koronapartikelchen aus Eisen annimmt und glaubt, daß sie bei 4620° abs. flüssig sein könnten. In den „Physikalisch-chemischen Tabellen" (S. 316) sind für den Siedepunkt des Eisens zwei Daten angegeben: nach Greenwood siedet Eisen unter Atmosphärendruck bei 2450° C; nach Ruff und Bormann siedet Eisen bei derselben Temperatur unter dem Drucke von 36 mm. Ich glaube, daß Ruff und Bormann recht haben. Sie weisen darauf hin, daß Greenwood das Eisen in einem mit Magnesia gefütterten Graphittiegel erhitzt hatte, und daß die lebhafte chemische Reaktion (bei höheren Temperaturen) zwischen Magnesia und Eisen zur fehlerhaften Bestimmung der Siedetemperatur geführt haben muß [1]). Wenn das Eisen an Kohlenstoff gesättigt ist, so siedet es (nach Ruff und Bormann) unter 36 mm bei etwa 2650° C [2]). Aus diesen Zahlen geht klar hervor, daß Eisen (sowohl reines wie auch an Kohlenstoff gesättigtes) sehr viel flüchtiger ist als Kohlenstoff. Darum müssen Koronapartikelchen aus Eisen bedeutend rascher verdampfen als solche aus Kohlenstoff.

Unter allen Siedepunkten, welche in den „Physikalisch-chemischen Tabellen" angeführt werden, ist der Siedepunkt des Wolframs der höchste: 4830° C (= 5103° abs.) unter Atmosphärendruck (nach van Liempt). Wenn diese Zahl richtig ist, so hat Wolfram beinahe genau denselben Siedepunkt wie Kohlenstoff (nach Wertenstein und Jedrzejewski). Die Siedepunkte von Platin, Molybdän, Nickel, Kobalt, Mangan, Gold, Silber, Kupfer u. a. sind nach den „Physikalisch-chemischen Tabellen" bedeutend niedriger. Was das dem Kohlenstoff so nahe verwandte Silicium anbetrifft, so ist (auf S. 1338) gesagt, daß bei 1205° C der Sublimationsdruck 0,87 mm beträgt und bei 1315° C 2,3 mm; es ist also viel flüchtiger als Kohlenstoff. Leider ist nicht bei allen Elementen der Siedepunkt zahlenmäßig angegeben: bei Iridium, Palladium, Ruthenium, Rhodium,

[1]) ZS. f. anorg. Chem. **88**, 405, 1914.
[2]) Ebenda, S. 404.

Osmium und Titan ist nur vermerkt, daß diese Elemente im Lichtbogen destillierbar sind. Von Uran ist gesagt, daß es im Lichtbogen schwieriger zu destillieren ist als Eisen. Über das Sieden oder Verdampfen von Bor, Tantal, Vanadium, Cer, Thorium u. a. ist überhaupt nichts gesagt. Was die feuerfesten Oxyde anbetrifft, so ist für den Siedepunkt unter Atmosphärendruck von Aluminiumtrioxyd (Al_2O_3) 2210° C angegeben, von Calciumoxyd (CaO) 2850° C, von Siliciumdioxyd (SiO_2) 2230° C und von Magnesiumoxyd (MgO) 2800° C. Nichts ist gesagt über das Sieden oder Verdampfen von Zirkondioxyd, Berylliumoxyd, Cerdioxyd, Thordioxyd, Lantantrioxyd und von anderen feuerfesten Oxyden.

Trotzdem können wir über die Flüchtigkeit dieser Stoffe manches für uns sehr Wichtiges erfahren, wenn wir uns, statt an die „Physikalisch-chemischen Tabellen", direkt an die Originalarbeiten der Forscher wenden. Für uns als besonders wichtig erweisen sich die Untersuchungen von Tiede und Birnbräuer[1]). Diese Forscher haben verschiedene Metalle, Oxyde und Carbide in hohem Vakuum durch Kathodenstrahlen oder durch einen elektrischen Strom erhitzt. Da die Koronapartikelchen ebenfalls in hohem Vakuum glühen, so ist es klar, warum gerade die Untersuchungen von Tiede und Birnbräuer für uns besonders interessant sein müssen. Für Wolfram haben diese Forscher als unterste Grenze einer merkbaren Verdampfung 2390° C (schwarzer Temperatur) gefunden. Deutlich bemerkbar war aber die Verdampfung erst bei 2450° C. Bei Tantal war 2200° C die unterste Grenze der Verdampfung. Bor verdampfte beim Schmelzen; für den Schmelzpunkt wurde 2200° C gefunden[2]). Chrom schmolz bei 1410° C, wobei es stark verdampfte. Calcium verdampfte lebhaft schon bei Rotglut. Von den Oxyden fingen Berylliumoxyd (BeO) und Zirkondioxyd (ZrO_2) kurz vor dem Schmelzen zu verdampfen an (wobei letzteres dissoziierte). Der Schmelzpunkt des ersteren ist 2400° C und des letzteren 2430° C. La_2O_3 und ThO_2 begannen bei 2000° C zu verdampfen (wobei ersteres dissoziierte), CeO_2 bei 1875° C, Al_2O_3 bei 1750° C, CaO bei 1690° C. Einen kleinen Widerspruch habe ich in den Angaben über MgO gefunden: auf S. 155 ist gesagt, daß Magnesiumoxyd bei etwa 1900° heftig zu verdampfen beginnt unter Dissoziation in die Elemente; dagegen in der Tabelle 2 auf S. 166 ist 2000° als Anfangspunkt der Verdampfung angegeben. Strontiumoxyd und Bariumoxyd verdampften

[1]) ZS. f. anorg. Chem. **87**, 129—168, 1914.

[2]) Dies Ergebnis widerspricht der Behauptung Moissans: „Nous avons établi depuis longtemps que ... le bore et le carbone ... passaient de l'état solide à l'état gazeux sans prendre l'état liquide" (C. R. **142**, 674, 1906).

leichter als Calciumoxyd. Was Kohlenstoff anbetrifft, so konnte selbst bei 2500° C nicht die geringste Verdampfung festgestellt werden.

Alle oben angeführten Zahlen von Tiede und Birnbräuer bedeuten nicht die wahren, sondern die sogenannten „schwarzen" Temperaturen. Für Tantal, Wolfram und Kohlenstoff kann man die entsprechenden wahren Temperaturen aus einer Tabelle entnehmen, welche von C. E. Mendenhall und W. E. Forsythe angeführt wird [1]). Nach Tiede und Birnbräuer beginnt Tantal bei 2200° C schwarzer Temperatur zu verdampfen, und dies entspricht einer wahren Temperatur von 2430° C. Bei Wolfram ist 2390° C schwarzer Temperatur (beginnende Verdampfung) gleich 2554° C wahrer Temperatur (durch Interpolation gefunden). Kohlenstoff verdampft noch nicht merklich bei 2500° C schwarzer Temperatur, und dies entspricht einer wahren Temperatur von 2580 bis 2590° C (durch Extrapolation gefunden, weil für Kohlenstoff die Tabelle von Mendenhall und Forsythe nur bis 2000° C schwarzer Temperatur reicht).

Auch A. Knocke hat das Verdampfen verschiedener Metalle im Hochvakuum beobachtet [2]). Er hat gefunden, daß ein sehr schwaches Verdampfen von Platin schon bei 540° C zu konstatieren ist; bei 700° C ist die Verflüchtigung eine reiche und schnelle. Bei Iridium ist 660° C die unterste Grenze der Verdampfung und bei Palladium 735° C. Bei 800° C wurde das Verdampfen von Osmium konstatiert. Knocke drückt seine Überzeugung aus, daß auch die übrigen Platinmetalle (d. h. Ruthenium und Rhodium) bei ähnlichen Temperaturen im Vakuum flüchtig sein müssen.

Die von Knocke erhaltenen Zahlen sind jedoch so niedrig, daß ich einen Zweifel habe, ob man es hier auch mit einem wirklichen Verdampfen zu tun hat und nicht etwa mit einem mechanischen Zerstäuben. Die Beobachtungen von Wertenstein und Jedrzejewski über das Verdampfen von Kohlenstoff sind frei von solchem Verdacht, weil sie den sublimierten Niederschlag mikroskopisch untersucht und gefunden haben, daß wenigstens bei höheren Temperaturen ein wirkliches Verdampfen (richtiger Sublimieren) die Hauptrolle spielt und nicht ein mechanisches Zerstäuben.

Ganz frei vom oben erwähnten Verdacht sind auch die Untersuchungen von A. S. King, welcher das Verdampfen verschiedener Metalle spektroskopisch beobachtet hat. Er hat gefunden, daß Vanadium erst bei 2000° C genügend stark verdampft, um spektroskopisch bemerkbar zu werden. Chrom dagegen zeigt schon zwischen 1700 und

[1]) Astrophys. Journ. **37**. 389. 1913.
[2]) Berichte d. D. Chem. Ges. **42**, 206—210, 1909.

1800° C eine Anzahl Linien im Spektroskop [1]). Kohlenstoff beginnt erst bei etwa 2500° C merklich zu verdampfen [2]); bei 2800° C ist die Verdampfung schon so stark, daß die Lebensdauer der Graphitröhre eine sehr kurze ist [3]). Eine Verdampfung von Titan kann bei etwa 2000° C bemerkt werden; zwischen 2300 und 2400° C sind die meisten Linien zu sehen. Bei 2600° C wird die Beobachtung durch den verdampfenden Kohlenstoff der Graphitröhre erschwert [4]).

Was das eben erwähnte Titan anbetrifft, so haben sich über dessen Feuerfestigkeit phantastische Vorstellungen verbreitet. Nach H. Moissan ist Titan schwerer schmelzbar als Wolfram, Molybdän und andere Metalle, und diese Ansicht ist sogar in neuere Handbücher der Chemie eingedrungen, z. B. in das „Handbuch der anorganischen Chemie" von Gmelin-Krauts [5]). Bei R. Abbegg und F. Auerbach wird ebenfalls diese Meinung Moissans zitiert, dabei aber hinzugefügt, daß wenigstens in bezug auf reines Wolfram Moissan unrecht habe. Was den Siedepunkt des Titans anbetrifft, so liege er sehr hoch [6]). Andererseits glaubt J. F. H. Schulz, daß man die Temperatur in Moissans elektrischem Ofen noch zu sehr unterschätzt habe [7]), und daß Titan tatsächlich feuerfester sei als alle Metalle [8]). Ich muß jedoch darauf hinweisen, daß Moissan keine wirklichen Temperaturmessungen unternahm, sondern die Höhe des Schmelz- oder Siedepunktes nach dem Verbrauch der elektrischen Energie und nach der Quantität der geschmolzenen (oder destillierten) Substanz schätzte: je stärker der elektrische Strom ist und je höher seine Spannung, je länger er wirken muß, und je weniger Substanz dabei geschmolzen (bzw. destilliert) wird, desto höher liegt, nach Moissan, auch der Schmelzpunkt (bzw. Siedepunkt). Das ist aber ein sehr unsicheres Kriterium! Wenn man eine Substanz bis zum Schmelzen erhitzen will, so hängt die dazu notwendige Energiemenge nicht nur von der Höhe des Schmelzpunktes ab, sondern auch von der spezifischen Wärmekapazität der Substanz. Die Quantität der geschmolzenen (oder destillierten) Substanz hängt von der latenten Schmelzwärme (bzw. Ver-

[1]) Astrophys. Journ. **41**, 87, 1915.

[2]) Tiede und Birnbräuer konnten bei 2500° C schwarzer Temperatur keine Verdampfung feststellen, aber sie beobachteten nicht spektroskopisch.

[3]) Astrophys. Journ. **28**, 307, 1908.

[4]) Ebenda **39**, 140, 1914.

[5]) Heidelberg 1912, 3. Bd., 1. Abt., S. 16.

[6]) Handbuch der anorganischen Chemie **3**, 409. Leipzig 1909.

[7]) Vierteljahrsschrift d. Astron. Gesellsch. **43**, 324 f., 1908.

[8]) Ebenda, S. 328.

dampfungswärme) ab, was Moissan ebenfalls außer acht läßt. Was J. F. H. Schulz anbetrifft, so macht er außerdem noch einige andere Fehler, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen werden kann. Nach den neuesten Messungen hat sich Titan als gar nicht besonders strengflüssig erwiesen: in den „Physikalisch-chemischen Tabellen" werden für den Schmelzpunkt (S. 328) Temperaturen angegeben, von denen keine 1850° C übersteigt [1]). Über den Siedepunkt des Titans ist in den „Physikalisch-chemischen Tabellen" leider nichts gesagt. Aber aus den oben erwähnten Experimenten A. S. Kings glaube ich mit Sicherheit schließen zu dürfen, daß Titan und Vanadium bedeutend flüchtiger sind als Kohlenstoff.

§ 10. Man kann also sagen, daß von allen bis jetzt untersuchten Elementen Kohlenstoff und Wolfram am schwersten verdampfen; Tantal, Titan und Vanadium sind flüchtiger, sicherlich auch Bor. Was die feuerfesten Oxyde anbetrifft, so wird man auch wohl kaum zweifeln können, daß CaO, SrO, BaO, MgO, SiO_2, Al_2O_3, La_2O_3, CeO_2 und ThO_2 leichter verdampfen als Kohlenstoff und Wolfram. Nicht so klar ist aber die Sache mit BeO und besonders mit ZrO_2. Nach Tiede und Birnbräuer beginnt ZrO_2 kurz vor dem Schmelzen merklich zu verdampfen, und die schwarze Temperatur des Schmelzpunktes beträgt 2430° C; für uns ist aber wichtig, die wahre Temperatur zu kennen. Emil Prodszus hat für den Schmelzpunkt von ZrO_2 in drei Fällen 2950, 2950 und 3000° C erhalten. Das zur letzten Bestimmung verwandte Material soll das reinste gewesen sein. Bei diesen hohen Temperaturen soll fast gar keine Dampfentwicklung zu beobachten gewesen sein (also eine gewisse kleine Verdampfung wird doch zugegeben). Die Beobachtungen waren so eingerichtet, daß die Strahlung fast als schwarz anzusehen war [2]); dann müssen aber die schwarze und die wahre Temperatur identisch sein! Somit kann man sagen, daß Zirkondioxyd erst bei etwa 3000° C wahrer Temperatur merklich zu verdampfen beginnt, Wolfram dagegen schon bei etwa 2554° C. Die Flüchtigkeit des Berylliumoxyds ist nach Tiede und Birnbräuer von ähnlicher Größenordnung wie diejenige des Zirkondioxyds [3]).

Wenn nach Prodszus ZrO_2 bei 3000° C wahrer Temperatur kaum verdampft, so ist es weniger flüchtig als Wolfram und Kohlenstoff, welche

[1]) Dagegen für den Schmelzpunkt von Wolfram (S. 329 f.) Temperaturen zwischen 2900 und 3357° C.

[2]) ZS. f. angew. Chem. **30**, I, 18, 1917.

[3]) Dem widerspricht aber die Beobachtung von H. Caron, welcher gefunden hat, daß in der Knallgasflamme BeO flüchtiger ist als MgO, und letzteres flüchtiger als ZrO_2. Jahresbericht über d. Fortschritte d. Chemie 1868, S. 979.

bei dieser Temperatur schon stark verdampfen. Dann aber taucht die Frage auf, ob feste oder flüssige Koronapartikelchen nicht vielleicht aus Zirkondioxyd bestehen könnten? Diese Frage muß, wenigstens für die innere Korona, verneint werden, wenn man annimmt, daß in der Sonnenkorona ein Partikelchen aus Zirkondioxyd sich etwa ebenso stark erhitzt wie ein absolut schwarzes. Denn bei allen Körpern steigt der Dampfdruck (und also auch die Verdampfungsgeschwindigkeit) mit der Temperatur sehr rasch. Wenn bei 3000° C (= 3273° abs.) wahrer Temperatur ZrO_2 noch sehr schwach verdampft, so muß z. B. bei 3500° abs. die Verdampfung eine schon recht merkliche sein, und bei 3800° abs. sogar eine sehr heftige. Sollte nun z. B. ein Partikelchen aus ZrO_2 in der Entfernung 0,1 Sonnenradius von der Photosphäre sich befinden und dabei sehr langsam verdampfen, so wird seine Temperatur nicht 3983°, wie bei Kohlenstoff, sondern 4336° abs. betragen. Nach dem eben Gesagten ist es aber ganz ausgeschlossen, daß ZrO_2 bei 4336° abs. sehr langsam verdampft.

§ 11. Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß die Koronapartikelchen absolut schwarz sind. Jedoch Partikelchen aus Metall oder aus einem weißen Oxyd können selbst nicht annähernd als absolut schwarz betrachtet werden! Sollten nicht derartige Partikelchen eine bedeutend niedrigere Temperatur in der Korona annehmen als absolut schwarze, und deshalb in festem oder flüssigem Zustande dort existenzfähig sein? Diese Frage suchte schon J. Scheiner zu beantworten, wobei er als etwas Selbstverständliches betrachtete, daß von allen Körpern die höchste Temperatur der absolut schwarze annehmen muß [1]). Diese Meinung ist aber für Körper, die in hohem Vakuum sich befinden, gar nicht so selbstverständlich. Natürlich wird ein absolut schwarzer Körper mehr strahlende Energie absorbieren als jeder andere, dafür aber auch mehr durch Ausstrahlung verlieren, so daß man a priori gar nicht weiß, welcher Körper die höhere Temperatur annehmen wird. Und in der Tat hat Ch. Fabry gezeigt, daß bei manchen Körpern die Temperatur niedriger, bei manchen aber auch höher sein kann als bei absolut schwarzen [2]). Mag z. B. eine kleine Kugel aus einem Stoff bestehen, welcher vom ganzen Spektrum nur einen schmalen Streifen von der Wellenlänge λ absorbieren (und emittieren) kann, und weiter nichts. Wenn man die Breite des Streifens durch $d\lambda$ und den Absorptionskoeffizienten durch ε

[1]) Astronom. Nachr. Nr. 3647, S. 372, 1900 und Astrophys. Journ. **12**, 28, 1900.

[2]) Astrophys. Journ. **45**, 269—277, 1917. Meine Berechnungen habe ich jedoch nach einer etwas anderen Methode durchgeführt als Ch. Fabry die seinigen.

bezeichnet, so ist die in der Zeiteinheit absorbierte (und emittierte) Energiemenge gleich

$$\frac{K\varepsilon c_1 \lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}.$$

Hier bedeutet K einen Proportionalitätsfaktor, welcher von den Dimensionen des Körpers abhängt. Mag der kleine Körper so weit von der Photosphäre entfernt sein, daß sie unter dem Raumwinkel $= \frac{4\pi}{\alpha}$ erscheint. Wenn der Körper von allen Seiten von der Photosphäre umschlossen wäre, so müßte die Temperatur des Körpers 5900° abs. betragen, und die Photosphäre würde vom Körper aus betrachtet einen Raumwinkel $= 4\pi$ einnehmen. In Wirklichkeit ist aber der Raumwinkel $= \frac{4\pi}{\alpha}$, weshalb der Körper α mal weniger strahlende Energie absorbieren (und emittieren) muß; darum wird auch seine Temperatur (die wir durch x bezeichnen wollen) niedriger als 5900° abs. sein. Wir können also folgende Gleichung schreiben:

$$\frac{K\varepsilon c_1 \lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda 5900}} - 1} = \frac{\alpha K\varepsilon c_1 \lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda x}} - 1},$$

oder:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda x}} - 1 = \alpha\left(e^{\frac{c_2}{\lambda 5900}} - 1\right). \tag{7}$$

Daraus ergibt sich:

$$\log x = \bar{1},793\,1203 - \log\lambda - \log\log\left(\alpha e^{(2{,}4237285 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda^{-1})} - \alpha + 1\right) \tag{8}$$

Hier bedeutet log den Briggschen Logarithmus. Nehmen wir jetzt beispielsweise an, daß $\lambda = 0{,}5\,\mu = 0{,}000\,05$ cm sei, und daß die kleine Kugel in der Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre sich befinde. Dann ist $\alpha = 14{,}928\,203$ zu setzen, und aus (8) erhalten wir: $\log x = 3{,}578\,801\,2$ und also $x = 3791{,}413$; abgerundet: 3791° abs. Wäre unsere Kugel absolut schwarz, so würde ihre Temperatur nur 3002° abs. betragen! In Tabelle 2 habe ich die Rechnung für verschiedene Werte von λ und für verschiedene Entfernungen von der Photosphäre durchgeführt. Je größer λ ist, desto niedriger die Temperatur. Für $\lambda = \infty$ ist jedoch die Gleichung (8) unbrauchbar, weil sie

$$\log x = -\infty + \infty$$

ergibt. Dennoch kann man x auch für diesen Fall berechnen, wenn man sich direkt an die Gleichung (7) wendet und die Entwicklung:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda x}} = 1 + \frac{c_2}{\lambda x} + \frac{c_2^2}{2\lambda^2 x^2} + \frac{c_2^3}{6\lambda^3 x^3} + \cdots$$

Tabelle 2.

Entfernungen von der Photosphäre in Sonnenradien	Absolute Temperaturen einer kleinen Kugel aus einem nicht verdampfenden Stoffe, welcher vom ganzen Spektrum nur ein schmales Band absorbieren und emittieren kann von der Wellenlänge λ								Absolute Temperaturen einer kleinen nicht verdampfenden schwarzen Kugel
	$= 0$	$0{,}3\,\mu$	$0{,}5\,\mu$	$1\,\mu$	$5\,\mu$	$10\,\mu$	$100\,\mu$	∞	
0,01	5900°	5342°	5029°	4446°	3190°	2897°	2576°	2536°	4777°
0,1	5900	5119	4709	3983	2501	2157	1771	1721	4336
0,5	5900	4701	4143	3247	1611	1245	812	751	3524
1	5900	4421	3791	2837	1226	878	458	395	3002
2	5900	4097	3407	2429	914	606	231	169	2426
3	5900	3900	3184	2208	774	492	153	94	2094
10	5900	3343	2595	1680	501	292	56	12	1258

benutzt, welche eine konvergierende Reihe ergeben muß. Wenn wir auch $e^{\frac{c_2}{\lambda\,5900}}$ auf ähnliche Weise entwickeln, so erhalten wir aus (7):

$$1 + \frac{c_2}{\lambda x} + \frac{c_2^2}{2\lambda^2 x^2} + \cdots - 1 = \alpha\left(1 + \frac{c_2}{\lambda\,5900} + \frac{c_2^2}{2\lambda^2\,5900^2} + \cdots - 1\right),$$

oder:

$$\frac{1}{x} + \frac{c^2}{2\lambda x^2} + \cdots = \alpha\left(\frac{1}{5900} + \frac{c^2}{2\lambda\,5900^2} + \cdots\right).$$

Ist $\lambda = \infty$, so werden nur die ersten Glieder nachbleiben, und man erhält:

$$\frac{1}{x} = \frac{\alpha}{5900},$$

oder:

$$x = \frac{5900}{\alpha} \qquad (9)$$

Für die Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre haben wir nach (9):

$$x = \frac{5900}{14{,}928\,203} = 395^0 \text{ abs. (abgerundet)}.$$

Was die Entwicklung von $e^{\frac{c_2}{\lambda x}}$ anbetrifft, so wird man vielleicht einwenden, daß bei wachsendem λ die Temperatur x abnimmt, so daß es nicht klar ist, ob λx wächst oder abnimmt. Jedoch nähere Betrachtungen zeigen, daß λ bedeutend rascher zunimmt als x abnimmt. Zum Beispiel ist in der Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre und für $\lambda = 0{,}3\,\mu = 3{,}10^{-5}$ cm nach Tabelle 2 die Temperatur $x = 4421^0$, also $\lambda x = 0{,}13263$. Für $\lambda = 0{,}5\,\mu$ ist $x = 3791^0$ und $\lambda x = 0{,}18955$. Für $\lambda = 1\,\mu$ erhalten wir $\lambda x = 0{,}2837$; für $\lambda = 10\,\mu$ ist $\lambda x = 0{,}878$; für $\lambda = 100\,\mu$ ist $\lambda x = 4{,}58$. Wie man sieht, steigt mit wachsendem λ auch das Produkt λx, und zwar recht rasch. Ähnliche Verhältnisse werden sich auch für andere Entfernungen von der Photosphäre ergeben.

Für $\lambda = 0$ ist die Gleichung (8) ebenfalls unbrauchbar, weil sie $\log x = \infty - \infty$ ergibt. Wenn wir uns aber an die Gleichung (7) wenden, so sehen wir ein, daß bei genügend kleinem λ das Glied $e^{\frac{c_2}{\lambda x}}$ sehr viel größer als 1 sein muß, so daß man schreiben kann:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda x}} = \alpha e^{\frac{c_2}{\lambda 5900}},$$

oder:

$$x = 5900 - \frac{5900\,\lambda \log \alpha}{c_2 \log e}.$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich $x = 5900^0$ abs. Wenn also ein kleiner Körper nur unendlich kurze Lichtwellen absorbieren und emittieren kann, so wird seine Temperatur gleich der Photosphärentemperatur sein, und zwar für jede beliebig große Entfernung von der Sonne!

In Wirklichkeit gibt es keine solche feste oder flüssige Körper, welche nur einen schmalen Streifen des Spektrums absorbieren: reale Koronapartikelchen werden Licht von jeder Wellenlänge mehr oder weniger absorbieren und emittieren. Jedoch kann man aus Tabelle 2 ersehen, daß, wenn bei einem Körper der Absorptionskoeffizient für kürzere Lichtwellen größer ist als für längere, die Temperatur höher sein muß als im umgekehrten Falle.

Die Tabelle 2 zeigt auch, daß beim Vergleich der Temperaturen eines selektiv absorbierenden und eines schwarzen Körpers die Wellenlänge der „maximalen Strahlung" in hohem Grade maßgebend ist. Zum Beispiel in der Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre ist die Temperatur eines schwarzen Körpers 3002^0 abs. und die Wellenlänge seiner „maximalen Strahlung" nach dem Wienschen Gesetz etwa $0{,}956\,\mu$. Die Tabelle 2 zeigt nun, daß in dieser Entfernung die Temperaturen aller Körper, welche kürzere als 0,956-μ-Wellen selektiv absorbieren, höher sind, welche aber längere als $0{,}956\,\mu$ absorbieren, niedriger sind als die Temperatur eines schwarzen Körpers. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich auch für andere Entfernungen von der Photosphäre. Sollte ein Körper für alle Wellenlängen den gleichen Absorptionskoeffizienten haben („grauer" Körper), so wird er offenbar dieselbe Temperatur annehmen wie ein absolut schwarzer.

Bei allen realen Körpern kann jedoch die Temperatur nur in gewissen Grenzen variieren. Sie kann nie größer als 5900^0 abs. werden, aber auch nie einen bestimmten Grenzwert unterschreiten, welcher für verschiedene Entfernungen verschieden ist. Zum Beispiel in der Entfernung eines halben Sonnenradius von der Photosphäre kann kein reales

Partikelchen (im Strahlungsgleichgewicht) eine niedrigere Temperatur annehmen als 751° abs. (es sei denn, daß genügend starke Verdampfung seine Temperatur unter diesen Grenzwert herabsetzt).

§ 12. Nehmen wir jetzt an, daß die Koronapartikelchen aus Metall bestehen. Wenn man das in Prozenten ausgedrückte Reflexionsvermögen durch R bezeichnet, so ergibt die elektromagnetische Lichttheorie:

$$R = 100 - \frac{36{,}5}{\sqrt{\sigma\lambda}},$$

wo σ die Leitfähigkeit bedeutet, d. h. den reziproken Wert des Widerstandes, gemessen in Ohm, den ein Leiter aus dem betreffenden Material bei 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt haben würde. Diese Formel zeigt, daß bei kleineren λ auch R kleiner ist. Rubens und Hagen haben gefunden, daß die erwähnte Gleichung bei langen ultraroten Strahlen mit den Beobachtungen genügend gut übereinstimmt[1]). Bei kürzeren Lichtwellen erweist sich diese Gleichung als unrichtig, aber immerhin zeigt die Beobachtung, daß auch dann das Reflexionsvermögen mit abnehmender Wellenlänge im großen und ganzen ebenfalls abnimmt, wenn auch nicht selten mit Unregelmäßigkeiten und Schwankungen. Zum Beispiel beim elektrolytisch niedergeschlagenen Gold ist das Reflexionsvermögen für Lichtwellen von 2000 mμ gleich 96,8 Proz., für solche von 500 mμ 47,0 Proz. und von 385 mμ 27,1 Proz.; aber für Lichtwellen von 326 mμ schon 28,6 Proz. und von 251 mμ sogar 38,8 Proz.[2]). Wenn wir aber aus den Werten, die in den „Physikalisch-chem. Tabellen“ angegeben sind, Durchschnittswerte bilden, so erhalten wir für dasselbe Gold im ultraroten Gebiet (zwischen 2000 und 800 mμ) als durchschnittliches Reflexionsvermögen 96,3 Proz.; für das sichtbare Gebiet (zwischen 700 und 420 mμ) 64,1 Proz.; für das ultraviolette (zwischen 385 und 251 mμ) 30,9 Proz. Im Falle von Platin erhalten wir für dieselben Abschnitte des Spektrums: 75,4 Proz., 60,8 Proz. und 40,4 Proz. Im Falle von Stahl: 67,1 Proz., 55,1 Proz. und 39,7 Proz. Überhaupt scheint bei allen Metallen das durchschnittliche Reflexionsvermögen für ultrarote Strahlen bedeutend größer zu sein als für kurzwelligere.

Wenn die Metallschicht undurchsichtig ist, so werden alle nicht reflektierten Strahlen absorbiert. Dann muß aber diese Metallschicht kürzere Lichtwellen in größerer Menge absorbieren (und also auch emittieren) als längere, weil sie ja letztere mehr reflektiert. Und in der

[1]) Phys. ZS. **4**, 727—733, 1903.
[2]) Vgl. „Physik.-chem. Tabellen“, S. 903.

Tat zeigt die Beobachtung, daß die Ausstrahlung eines glühenden Metalls relativ reicher an kurzwelligen Strahlen ist als die Ausstrahlung eines schwarzen Körpers von gleicher Temperatur. Das ist eine der Hauptursachen, weshalb Metallfadenlampen ökonomischer sind als Kohlenfadenlampen.

Wenn aber eine sehr dünne Metallschicht durchsichtig ist, so kann die Sachlage sich ändern. Die Sache ist die, daß bei Metallen der Extinktionskoeffizient für längere Wellen sehr oft größer ist als für kürzere; also ist unsere Metallschicht für kurze Wellen durchsichtiger als für lange. Wenn wir die einfallende Strahlungsmenge durch 1 bezeichnen, den reflektierten Teil durch r, den durchgelassenen durch d und den absorbierten (d. h. in Wärme verwandelten) durch a, so haben wir: $a = 1 - (d + r)$. Mit wachsender Wellenlänge wird r größer, aber d oft kleiner, so daß man a priori nicht wissen kann, wie sich a ändern wird.

Können aber unsere metallischen Koronapartikelchen als undurchsichtig betrachtet werden? Und werden sie nicht, dank ihrem geringen Durchmesser, überhaupt ganz andere optische Eigenschaften aufweisen als größere Metallmassen? F. Ehrenhaft hat beobachtet, daß Goldpartikelchen vom Durchmesser etwa einer Lichtwelle noch denselben goldgelben Glanz zeigen wie größere Massen Goldes; ebenso große Quecksilber- und Silberkügelchen zeigen den bekannten metallischen Spiegelglanz[1]). Karl Lauch hat gefunden, daß die optischen Konstanten sehr dünner Metallschichten andere sind als dickerer. Erst von einer gewissen Dicke an, die für Silber 105, Gold 100, Platin 90 und Kupfer 50 $m\mu$ beträgt, nähern sich die optischen Konstanten den für massives Metall gültigen Werten[2]). Über die Durchsichtigkeit einiger Metalle kann man sich eine Vorstellung machen aus den Extinktionskoeffizienten, welche in den „Phys.-chem. Tabellen" (S. 893) angeführt werden. So habe ich berechnet, daß, wenn auf eine 150 $m\mu$ dicke Goldschicht Strahlen von der Wellenlänge 0,5 μ fallen, nur $\frac{1}{2455}$ von ihnen durchgelassen wird. Bei der Wellenlänge von 1 μ sogar nur $\frac{1}{436\,516}$. Eine ganz ungewöhnliche Durchsichtigkeit besitzt Silber für die Wellenlänge von 0,321 μ, und dennoch würde eine 150 $m\mu$ dicke Schicht Silber nur etwa $^1/_{12}$ dieser Strahlen durchlassen. (Eine solche Durchsichtigkeit ist bei Metallen eine seltene Ausnahme.) Nun ist aber der Durchmesser der Koronapartikelchen bedeutend größer als 150 $m\mu$; z. B. muß er bei Eisenpartikelchen, nach der Theorie von Arrhenius, 250 $m\mu$ betragen (siehe § 1). Man kann also, ohne

[1]) Ann. d. Phys. (4) **56**, 43, 1918.
[2]) Ebenda (4) **74**, 56, 1924.

einen großen Fehler zu begehen, den metallischen Koronapartikelchen die Eigenschaften des massiven und undurchsichtigen Metalls zuschreiben. In diesem Falle muß man aber annehmen, daß die Partikelchen für kürzere Lichtwellen ein größeres Absorptions- und Emissionsvermögen haben als für längere. Dann aber folgt aus dem vorhergehenden Paragraphen, daß die Temperatur der metallischen Koronapartikelchen höher sein muß als diejenige der absolut schwarzen [oder „grauen"][1]).

§ 13. F. Henning und W. Heuse haben gefunden, daß Magnesiumoxyd im sichtbaren Gebiet nur schwach absorbiert und emittiert (Emissionsvermögen 0,02). Aber im Gebiet der langwelligen ultraroten Strahlen (jenseits von $4\,\mu$) emittiert es beträchtlich [Emissionsvermögen $> 0{,}3$][2]). Somit ist beim Magnesiumoxyd das Emissions- und Absorptionsvermögen für langwellige ultrarote Strahlen mehr als 15 mal größer als für sichtbare. Nach § 11 muß die Temperatur eines solchen Körpers niedriger sein als diejenige eines absolut schwarzen (oder „grauen"). Sollte nicht diese Temperatur so niedrig sein, daß Partikelchen aus MgO selbst in der inneren Korona existenzfähig wären? Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir folgende Aufgabe lösen.

Mag ein Körper nicht einen, sondern zwei Absorptionsstreifen haben von den Wellenlängen $\lambda_1 = 0{,}5\,\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ cm und $\lambda_2 = 10\,\mu = 10^{-3}$ cm. Mögen aber beide Streifen die gleiche „Breite" haben, d. h. gleiches $d\lambda$. Im Gebiet des ersten Streifens sei das Absorptionsvermögen des Körpers gleich ε, im Gebiet des zweiten sei es aber 1000 mal größer, d. h. $1000\,\varepsilon$. Mag der Körper in der Entfernung eines Sonnenradius von der Photosphäre sich befinden; es soll seine Temperatur (die wir durch x bezeichnen wollen) bestimmt werden. Wenn wir nach der schon bekannten Methode verfahren, so erhalten wir:

$$\frac{\varepsilon K c \lambda_1^{-5} d\lambda_1}{e^{\frac{c_2}{\lambda_1 5900}} - 1} + \frac{1000\,\varepsilon K c_1 \lambda_2^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda_2 5900}} - 1}$$

$$= 14{,}928203 \left(\frac{\varepsilon K c_1 \lambda_1^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda_1 x}} - 1} + \frac{1000\,\varepsilon K c_1 \lambda_2^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda_2 x}} - 1} \right),$$

oder:

$$\frac{3200}{e^{\frac{28600}{x}} - 1} + \frac{1}{e^{\frac{1430}{x}} - 1} = 1{,}9399071.$$

[1]) Wenn nur nicht durch starke Verdampfung des Metalls die Temperatur zu sehr herabgesetzt wird.

[2]) ZS. f. Phys. **20**, 144, 1923.

Durch ein Näherungsverfahren habe ich $x = 3048^0$ abs. gefunden. Hätte der Körper nur den einen Absorptionsstreifen bei $10\,\mu$, so wäre nach Tabelle 2 seine Temperatur 878^0 abs. Es genügt also, wie man sieht, eine verschwindend kleine Absorptionsfähigkeit bei $0{,}5\,\mu$, damit seine Temperatur um das $3^1/_2$fache steige! Dies verblüffende Resultat kann auf folgende Weise erklärt werden. Im Sonnenspektrum ist die Strahlung von $0{,}5\,\mu$ Wellenlänge etwa 6943mal intensiver als solche von $10\,\mu$. Also wenn die Absorptionsfähigkeit des Körpers für $0{,}5\,\mu$ Wellenlänge auch 1000mal kleiner ist, so wird er dennoch von diesen Strahlen beinahe 7mal mehr absorbieren als von den langwelligen. Natürlich muß dies einen starken Einfluß auf die Temperatur des Körpers ausüben. Aus diesem Grunde kann man annehmen, daß auch beim Magnesiumoxyd sein schwaches Absorptionsvermögen im sichtbaren Spektralgebiet immerhin genügen muß, um die Temperatur bedeutend zu erhöhen.

Wenn aber Magnesiumoxyd ein nur schwaches Absorptions- und Emissionsvermögen für kurze Wellen besitzt, wie ist es dann zu erklären, daß Magnesiumlicht so reich an photographisch wirkenden Strahlen ist? Offenbar nur dadurch, daß bei sehr hoher Temperatur das Absorptionsvermögen seinen Charakter vollständig ändert. Wenn metallisches Magnesium verbrennt, so bilden sich kleine Partikelchen von MgO, welche, dank ihrer hohen Temperatur, intensives Licht ausstrahlen. Der Durchmesser dieser Partikelchen scheint zwischen 1,6 und $0{,}4\,\mu$ zu schwanken[1]), ist also von ähnlicher Größenordnung wie bei den Koronapartikelchen nach Arrhenius. Auch größere Stücke von MgO strahlen, genügend erwärmt (z. B. durch Knallgasflamme), ein an kurzwelligen Strahlen reiches Licht aus. Ähnlich verhalten sich die übrigen feuerfesten Oxyde, wie CaO, ZrO_2 u. a. Nach § 11 muß daraus folgen, daß Partikelchen aus diesen Oxyden, gleich denen aus Metall, eine höhere Temperatur in der Korona annehmen müssen als schwarze oder „graue". Nur ThO_2 scheint selbst bei hoher Temperatur ein an kurzwelligen Strahlen relativ armes Licht zu emittieren. Darum kann es auch nicht in reinem Zustande zu den „Auerstrümpfen" benutzt werden. In der Emission des reinen Thoriumdioxyds fehlt das sichtbare Spektrum fast ganz, und das kurzwellige Ultrarot ist sehr schwach. An keiner Stelle des Spektralgebiets zwischen 0,45 und $5\,\mu$ übersteigt das Emissionsvermögen den Wert 0,02. Aber im Gebiet großer Wellenlängen ist es groß[2]). Das bezieht sich aber nur auf ganz reines ThO_2; jede Verun-

[1]) K. Ångström, Wied. Ann. **36**, 720, 1889.
[2]) Vgl. H. Rubens, Ann. d. Phys. (4) **18**, 736, 1905.

reinigung hat einen großen Einfluß auf die optischen Eigenschaften. Es genügt z. B. eine sehr kleine Beimischung von CeO_2, damit die Emission an kurzwelligen Strahlen sehr reich werde. Zu den Auerstrümpfen wird gewöhnlich eine Mischung von 99,2 Proz. ThO_2 und nur 0,8 Proz. CeO_2 verwendet, und bei solcher Mischung sind nahezu 2 Proz. der Gesamtstrahlung sichtbar. Für einen schwarzen Körper von gleicher Temperatur (etwa 1800° abs.) würde der Anteil an sichtbaren Strahlen nur einige Promille betragen[1]). In der Natur kommen Oxyde in ganz reinem Zustande nicht vor; darum ist es auch sehr unwahrscheinlich, daß die Koronapartikelchen aus chemisch reinem ThO_2 bestehen sollten. Wenn aber die Partikelchen durch verschiedene Beimischungen verunreinigt sind, so können sie wohl kaum ein für kürzere Wellen derart schwaches Absorptionsvermögen haben, daß in der inneren Korona ihre Temperatur sehr niedrig wäre. Wie stark Verunreinigungen auf die optischen Eigenschaften wirken, kann man aus dem Verhalten des MgO ersehen, welches in chemisch reinem Zustande für sichtbares Licht ein Emissionsvermögen von nur 0,02 besitzt; aber in weniger reinem Zustande (so wie es zum Bau elektrischer Öfen verwendet wird) ist nach Henning und Heuse das Emissionsvermögen gleich 0,15, also $7^1/_2$ mal größer[2]).

Man könnte vielleicht noch einwenden, daß unsere Ansichten über die Temperatur der Koronapartikelchen auf der Annahme einer reinen Temperaturstrahlung gegründet sind, daß aber die Ausstrahlung der Oxyde vielleicht eine Lumineszenzerscheinung vorstellt. Diese Frage hat Ch. E. St. John behandelt[3]). Er hat verschiedene Mischungen von feuerfesten Oxyden untersucht, und in allen Fällen gefunden, daß die Ausstrahlung eine rein thermische ist; jedenfalls kann Lumineszenz nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen.

§ 14. Wir haben in § 11 gesehen, daß die Temperatur eines „grauen" Körpers genau gleich derjenigen eines „schwarzen" sein muß. Jedoch kann die schwächere Absorptionsfähigkeit des „grauen" Körpers indirekt auf die Temperatur einwirken, indem die abkühlende Wirkung der Verdampfung mehr zur Geltung kommt. Aus der Tabelle 1 ersehen wir, daß die Lebensdauer des Kohlenstoffpartikelchens in der Entfernung eines halben Sonnenradius von der Photosphäre 0,44 sec beträgt, und seine Temperatur gleich 3507° abs. ist. Dabei wird aber angenommen, daß es „schwarz" sei, also daß sämtliche einfallende Energie absorbiert werde.

[1]) Vgl. R. Rubens, Ann. d. Phys. (4) **18**, 735, 1905.
[2]) l. c. S. 142.
[3]) Wied. Ann. **56**, 433—450, 1895.

Es soll nun berechnet werden, welchen Teil der einfallenden Energie ein „graues" Kohlenstoffpartikelchen absorbieren müßte, damit es in der genannten Entfernung ($\frac{1}{3}$ Sonnenradius) eine Temperatur von 3002° abs. annehmen könnte (also dieselbe wie ein „schwarzes" in der Entfernung 1 Sonnenradius). Nach der Tabelle 1 müßte dann die Lebensdauer unseres „grauen" Kohlenstoffpartikelchens 65 sec betragen, also etwa 148 mal mehr als in derselben Entfernung ($\frac{1}{3}$ Sonnenradius) die Lebensdauer eines „schwarzen". Wenn keine Abkühlung durch Verdampfung stattfinden würde, so müßte die Temperatur des „schwarzen" sowie des „grauen" Partikelchens 3524° abs. betragen; dann würde die ganze absorbierte Energie nur durch Ausstrahlung abgeführt werden. Da aber das „schwarze" Partikelchen verdampft, so ist seine Temperatur 3507° abs., und durch Ausstrahlung wird $\frac{3507^4}{3524^4}$ der absorbierten Energie abgeführt, oder etwa 98,084 Proz.; die übrigen 1,916 Proz. werden zur Verdampfung des Kohlenstoffs verbraucht. Wenn aber das „graue" Partikelchen die Temperatur 3002° abs. annimmt, so wird $\frac{3002^4}{3524^4}$ oder etwa 52,662 Proz. der absorbierten Energie ausgestrahlt und 47,338 Proz. zur Verdampfung verbraucht. Somit verbraucht das „graue" Partikelchen einen etwa 25 mal größeren Teil von seiner absorbierten Energie als das „schwarze" von der seinigen. Wenn trotzdem das „graue" Partikelchen 148 mal langsamer verdampft, so muß es $25 \cdot 148 = 3700$ mal weniger strahlende Energie absorbieren als das „schwarze". Schwerlich werden in der Natur feste oder flüssige Körper vorkommen, die so schwach absorbieren! Und trotzdem ist diese verschwindend kleine Absorptionsfähigkeit noch viel zu groß, denn die Korona kann wohl schwerlich aus Partikelchen bestehen, deren Lebensdauer nur 65 sec beträgt.

§ 15. Bis jetzt haben wir die Temperaturen der Koronapartikelchen berechnet, ohne auf die Diffraktionserscheinungen zu achten. Ich glaube nicht, daß Diffraktion einen direkten Einfluß auf die Temperatur des Partikelchens haben kann, und zwar aus folgendem Grunde. Mag ein Partikelchen von allen Seiten von der Photosphärenoberfläche umschlossen sein. Natürlich wird dann die Temperatur des Partikelchens sowie jedes anderen Körpers gleich der Photosphärentemperatur (d. h. 5900° abs.) werden (sonst könnte man ein „perpetuum mobile zweiter Art" machen). Dabei wird das Partikelchen in der Zeiteinheit genau ebensoviel strahlende Energie emittieren wie es absorbiert (natürlich wird dabei vorausgesetzt, daß das Partikelchen nicht verdampft). Wenn also das Absorptions-

vermögen des Partikelchens durch Diffraktion verändert sein sollte, so muß auch das Emissionsvermögen genau ebenso verändert sein. Also scheinbar ist für eine Veränderung der Temperatur kein Grund vorhanden. Dennoch muß die Temperatur durch Diffraktion indirekt beeinflußt werden, weil bei veränderter Absorption und Emission die abkühlende Wirkung der Verdampfung in verändertem Maße zur Geltung kommt.

Gustav Mie hat Fälle von sehr verdünnten kolloidalen Goldlösungen untersucht, und ist zu dem Schluß gekommen, daß die Farbe der Goldlösungen in erster Linie auf der eigentlichen Absorption des Lichtes in den Goldteilchen selbst beruht[1]). Für uns besonders wichtig ist die Tabelle, wo die „Koeffizienten der reinen Absorption" angeführt sind[2]). Diese Koeffizienten bedeuten den Lichtverlust (in Promille) auf 1 mm Wegs durch eine Lösung von der Konzentration 10^{-6} (1 mm^3 Gold in 1 Liter Wasser). Wenn z. B. der Durchmesser der Goldpartikelchen 180 $m\mu$ beträgt, so ist für Strahlung von 500 $m\mu$ Wellenlänge der erwähnte Absorptionskoeffizient gleich 14,1 Prom. Würden wir die Wirkung der Diffraktion ignorieren und nur den „geometrischen Schatten" in Betracht ziehen, so wäre der Absorptionskoeffizient bei derselben Konzentration 8,3 Prom. (unabhängig von der Lichtquelle)[3]). Somit absorbiert das Partikelchen mehr strahlende Energie, als ohne Diffraktion durch seinen geometrischen Querschnitt durchgehen würde. Doch bei bedeutend kleineren Dimensionen der Partikelchen ist das Verhältnis umgekehrt: die absorbierte Energie wird durch Diffraktion bedeutend vermindert. Sollte es dann aber nicht möglich sein, daß solche kleine Partikelchen in der inneren Korona existenzfähig wären? Bei Goldpartikelchen von 20 $m\mu$ Durchmesser und für Lichtwellen von 500 $m\mu$ ist, nach G. Mies Tabelle, der Absorptionskoeffizient gleich 61,9 Prom. Wenn wir aber nur den „geometrischen Schatten" in Betracht ziehen, so ist der Absorptionskoeffizient 75 Prom. Bei Goldpartikelchen von nur 1 $m\mu$ Durchmesser ist der Absorptionskoeffizient etwa 59,6 Prom.; der auf Grund des „geometrischen Schattens" gefundene aber 1500 Prom. (d. h. es sind mehr Partikelchen vorhanden, als zur völligen Undurchsichtigkeit einer Schicht von 1 mm Dicke notwendig wäre). Somit absorbiert jedes Partikelchen etwa 25 mal weniger strahlende Energie, als ohne Diffraktion durch seinen geometrischen Querschnitt durchströmen würde. Das bezieht sich auf Lichtwellen von 500 $m\mu$. Bei Lichtwellen von 420 $m\mu$ hätten wir nicht 25, sondern etwa 37 erhalten, und bei Wellen von 650 $m\mu$ sogar

[1]) Ann. d. Phys. (4) **25**, 439, 1908.
[2]) Ebenda, S. 440.
[3]) Ebenda, S. 441 f.

etwa 214. Wenn man nicht Gold, sondern andere Stoffe nehmen sollte, so wird man auch andere Zahlen erhalten. Aber immerhin wird man wohl schwerlich hoffen können solche Stoffe zu finden, bei denen die erwähnten Zahlen vieltausendmal größer sein sollten.

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß ein Kohlenstoffpartikelchen in der Entfernung eines halben Sonnenradius von der Photosphäre nur dann 65 sec existieren kann, wenn es etwa 3700mal weniger strahlende Energie absorbiert, als durch seinen geometrischen Querschnitt durchströmen würde. Das bezieht sich aber nur auf Partikelchen von 1 μ Durchmesser. Beim Durchmesser von 20 mμ muß die Absorptionsfähigkeit des Partikelchens noch 50mal kleiner sein, damit es 65 sec existieren könnte; dann werden wir aber nicht, wie oben, 3700 erhalten, sondern 185000. Für Partikelchen von 1 mμ erhalten wir sogar 3700000. Das sind Zahlen, welche die auf Grund der Diffraktion gefundenen weit übertreffen. Somit wird man wohl kaum hoffen dürfen, daß feste oder flüssige Partikelchen, dank der Diffraktion, in der inneren Korona existenzfähig sein könnten. Außerdem könnte bei solchen Partikelchen die Gravitationswirkung der Sonne nicht durch Lichtdruck aufgehoben werden, so daß man hier andere Kräfte (elektrische?) voraussetzen müßte. Also könnte bei solchen Partikelchen die Lichtdrucktheorie von Arrhenius nicht aufrecht erhalten werden.

Aber vielleicht sind die Koronapartikelchen so klein, daß man sie als große Moleküle betrachten muß? Dann hat es ja keinen Sinn, von der Temperatur eines einzelnen Koronapartikelchens zu sprechen. Die Temperatur eines Körpers wird durch die Bewegung seiner Moleküle bedingt; die Temperatur eines einzelnen Moleküls ist ein sinnloser Begriff. Also ist es auch sinnlos zu sagen, daß die Koronapartikelchen „dank ihrer hohen Temperatur" verdampfen müssen. — Dagegen erwidere ich, daß wenn die Koronapartikelchen große Moleküle sein sollten, wir keinen „kosmischen Staub" mehr hätten, sondern ein Gas, freilich von hoher molekularer Polymerisation, also auch von hohem Molekulargewicht. Von der Temperatur eines einzelnen Moleküls kann man natürlich nicht sprechen, wohl aber von der Temperatur des Gases. Nun wissen wir, daß bei fallendem Drucke und steigender Temperatur die molekulare Polymerisation abnimmt: z. B. N_2O_4 dissoziiert nach der Gleichung: $N_2O_4 = 2NO_2$. Darum kann eine hohe molekulare Polymerisation bei den Gasen in der Korona wohl schwerlich angenommen werden; ganz im Gegenteil: man hat Grund anzunehmen, daß dort die meisten Gasmoleküle in einzelne Atome dissoziiert sind!

Schlußfolgerungen.

§ 16. Auf Grund der vorliegenden Untersuchung glaube ich behaupten zu dürfen, daß kosmischer Staub nur in den entfernteren Teilen der Korona existieren kann, schwerlich näher als 1 Sonnenradius von der Photosphäre. Das bezieht sich aber nur auf Partikelchen von der Größenordnung 1 μ oder auf noch kleinere. Dagegen könnte ein Körper von bedeutender Größe sogar im Bereiche der innersten Korona längere Zeit um die Sonne rotieren, ehe er vollständig verdampft wäre. Sollte nicht darum die Korona aus relativ großen Meteorsteinen bestehen, welche um die Sonne rotieren? Natürlich müßte man dann annehmen, daß die verdampften Meteorsteine immer durch neue (aus dem Weltenraume) ersetzt werden. Ich halte jedoch eine solche Hypothese, wenigstens in bezug auf die innere Korona, für unhaltbar. Dann müßte nämlich in der inneren Korona eine so reiche Dampfentwicklung stattfinden, daß es mir unbegreiflich erscheint, warum sich diese Dämpfe nicht spektroskopisch offenbaren. „Bei dem Wellschen Kometen (1882) leuchteten ferner, als er in der Nähe der Sonne war, die Natriumlinien sehr hell auf; dieselben wurden auch bei dem großen Septemberkometen von 1882 beobachtet nebst einigen anderen Linien, die man mit solchen des Eisens identifizierte[1]." Dieser Komet war der Sonnenoberfläche auf 466 000 km nahe gekommen (also auf etwa 0,67 Sonnenradius), und wurde am hellen Tage von Common und Thollon in unmittelbarer Nähe der Sonne gesehen[2]. Dieser Komet war natürlich viel heller als die Korona, weil letztere bei Sonnenschein nicht zu sehen ist. Doch ist bei einer Sonnenfinsternis die innere Korona sicherlich nicht schlechter zu sehen als der erwähnte Komet bei hellem Sonnenlicht. Außerdem muß die Verdampfung in der Entfernung z. B. 0,1 Sonnenradius sehr viel intensiver sein als in der Entfernung 0,67 Sonnenradius, wo der Komet sich befand. Wenn nun die innere Korona aus Meteoriten bestehen sollte, warum sieht man dort nicht dieselben Eisenlinien und Natriumlinien wie beim Septemberkometen von 1882?

Somit halte ich den Schluß für berechtigt, daß das kontinuierliche Spektrum der inneren Korona keinen festen oder flüssigen Körpern (weder kleinen, noch großen) zugeschrieben werden kann.

---

[1]) W. F. Wislicenus, Astrophysik, 3. Aufl., Leipzig 1909 (Sammlung Göschen Nr. 91), S. 97 f.

[2]) Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, 6. Aufl., Leipzig 1921, S. 468.

Über die Existenz des Lichtbogens bei nicht glühender Kathode.

(Bemerkungen zu einer gleichnamigen Veröffentlichung von Helge Stolt.)

Von **A. Günther-Schulze** in Charlottenburg.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 11. September 1924.)

Eine Durchrechnung der Temperaturverhältnisse bei den Versuchen von Herrn Stolt und das Beispiel des Quecksilberlichtbogens ergeben, daß keinerlei Grund dafür vorliegt, daran zu zweifeln, daß auch bei den von Herrn Stolt beobachteten Lichtbögen die für das Zustandekommen eines Lichtbogens als erforderlich angesehene hohe Temperatur des Kathodenflecks vorhanden war.

Es ist Herrn Stolt gelungen, zwischen einer feststehenden Anode und einer rotierenden Messing- oder besser noch Kupferkathode einen Lichtbogen zu erzeugen, was bisher nicht möglich schien. Ein Kathodenfleck war anscheinend nicht zu sehen. Die rotierende Scheibe konnte an Punkten, an denen der Bogen $^1/_{100}$ Sekunde vorher seine kathodische Ansatzfläche gehabt hatte, mit dem Finger dauernd berührt werden. Aus seinen Versuchen schließt Herr Stolt, daß eine weißglühende Kathode (besser wohl Kathodenfleck) keine notwendige Bedingung für den Lichtbogen sei.

Den Einwand, daß die Erhitzung und Wiederabkühlung des Kathodenflecks so schnell vor sich gehen, daß sie der Rotation zu folgen vermögen, hat Herr Stolt nicht geprüft. Das sei hier nachgeholt.

Zwei Fragen sind zu beantworten:

1. Reicht die am ruhenden Kathodenfleck aus der Energie (Kathodenfall × Stromstärke) gebildete Wärme aus, um den Fleck bei sonst kalter Kathodenscheibe auf eine Temperatur von 2000 bis 3000° C zu erhitzen?

2. Vermag sich der Kathodenfleck auf einer hinreichend hohen Temperatur zu halten, wenn er über die Kathodenscheibe schnell hingleitet?

Überschlagsrechnungen müssen genügen, da für Präzisionsrechnungen die Wärmeleitung und Wärmekapazität bei hohen Temperaturen nicht hinreichend bekannt sind.

I. Nach Versuchen von mir [1]) ist die Größe des Kathodenflecks eines Lichtbogens um so geringer, je höher das Wärmeleitvermögen der Kathode ist. Bei einem Eisenbogen in Luft hat der Kathodenfleck eine Oberfläche von etwa $1{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm^2/A}$, bei 5 A also $7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm^2}$.

[1]) Die Vorgänge an der Kathode des Quecksilbervakuumlichtbogens. ZS. f. Phys. **11**, 74, 1922.

Eisen ist von Herrn Stolt nicht untersucht worden, dagegen Messing, das etwa das gleiche Wärmeleitvermögen von 0,15 cal/cm grad sec bei 18° C hat wie Eisen. Also ist für Messing die gleiche Größe des Kathodenflecks anzunehmen wie für Eisen. Das Wärmeleitvermögen fester Körper nimmt mit zunehmender Temperatur etwas ab. Für die hier in Frage kommenden hohen Temperaturen läßt es sich zu etwa 0,12 cal/cm grad sec schätzen.

Bei einer Messing- oder Kupferkathode bildet ein Lichtbogen in Luft momentan eine geschmolzene Oxydschicht von sehr viel geringerem Wärmeleitvermögen. Wird also mit dem angegebenen Warmeleitvermögen gerechnet, so ergibt sich eine viel zu niedrige Temperatur.

Der Kathodenfall an nicht gekühltem Messing beträgt in Luft rund 10 Volt. Läßt man den Bogen rotieren, so wirkt das wie eine extrem starke Kühlung. Nach früheren Versuchen von mir [1]) steigt jedoch der Kathodenfall mit der Stärke der Kühlung. Ein Kathodenfall von etwa 15 Volt dürfte bei den Versuchen von Herrn Stolt zum mindesten vorhanden gewesen sein. Das gibt bei 5 A eine Wärmeabgabe von 75 Watt oder 18 cal/sec an den Kathodenfleck.

Fig. 1 a.

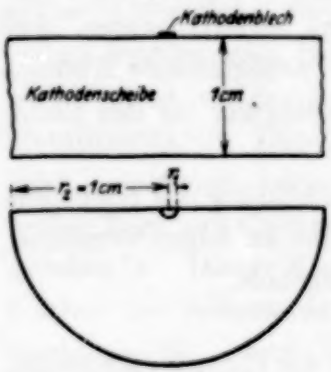


Fig. 1 b.

Um die Wärmeleitung aus dem Fleck in das Innere der Kathode berechnen zu können, werde der ebene Kathodenfleck auf der 1 cm dicken rotierenden Messingscheibe der Fig. 1 a durch eine Halbkugelfläche gleicher Größe, umgeben von einer Halbkugel (Messing) von 1 cm Radius, gemäß Fig. 1 b ersetzt, deren äußere Oberfläche auf Zimmertemperatur gehalten werden möge. Der Radius der kleinen, den Kathodenfleck ersetzenden hohlen Halbkugel ist dann $1{,}05 \cdot 10^{-2}$ cm. Die Vereinfachung ergibt eine etwas zu geringe Temperaturerhöhung. Die Wärmewiderstandskapazität der an der inneren Fläche erwärmten Halbkugel ist

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \times r_2} = 15{,}2.$$

Die Temperaturerhöhung wird also bei Vernachlässigung von Strahlung, Schmelzung und Verdampfung am Kathodenfleck

$$\frac{18 \cdot 15{,}2}{0{,}12} = 2300^\circ \text{ C}.$$

[1]) Über den Spannungsverlust im elektrischen Lichtbogen. Ann. d. Phys. **12**, 828, 1903.

Wie angegeben, ist die wahre Temperatur infolge der Oxydbildung wesentlich höher.

Nach den bisherigen Anschauungen ist eine Temperatur von der Größenordnung 3000° C bei Metallen und 2000° C bei Schwermetalloxyden für den Kathodenfleck eines Lichtbogens erforderlich. Bei diesen Temperaturen ist infolge der außerordentlich geringen Größe des Kathodenflecks die Strahlung gegenüber einer Wärmezufuhr von 18 cal/sec zu vernachlässigen. Somit ergibt sich: Bei der außerordentlich geringen Größe des Kathodenflecks reicht die ihm zugeführte Energie von 18 cal/sec aus, um nicht nur die erforderliche Temperatur von 2000° bis 3000° herzustellen, sondern auch noch das Messing im Kathodenfleck zu schmelzen und zu verdampfen.

II. Setzt sich nun der Kathodenfleck in Bewegung, so wirken zwei Einflüsse gegeneinander. Erstens müssen dann nämlich dauernd neue Stellen der Oberfläche erhitzt werden, zweitens dringt aber die Wärme um so weniger tief in das Innere, je schneller der Fleck über die Oberfläche hingleitet. Eine genaue Durchrechnung dieser Verhältnisse stößt auf beträchtliche Schwierigkeiten und hat auch keinen allzu großen Wert, da der Kathodenfleck sich, wie die starken von Herrn Stolt erwähnten Spannungsschwankungen beweisen, nicht kontinuierlich, sondern sprungweise über die Kathodenscheibe bewegt.

Ist in einem unendlich großen Körper die Temperatur überall gleich Null, ausgenommen in einem Punkte, in dem zur Zeit Null die Wärmemenge m entsteht, so ist [1]) die Temperatur ϑ im Abstande r von m:

$$\vartheta = \frac{m \varkappa^2}{k} \frac{1}{(2 \varkappa \sqrt{\pi t})^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4 \varkappa^2 t}},$$

wo t die Zeit, k das Wärmeleitvermögen, $\varkappa$ die Temperaturleitfähigkeit $\left(\frac{\text{Leitvermögen}}{\text{spez. Wärme} \times \text{Dichte}}\right)$ ist.

Werden in diese Gleichung die gleichen Zahlenwerte wie bei I. eingesetzt und $t = 10^{-4}$ sec angenommen, so sind 0,0308 cal erforderlich, damit 10^{-4} sec nach der Zuführung der Wärme im Mittelpunkt der (voll gedachten) Kugel im Abstande $r = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ cm die Temperatur 2500° C herrscht. Von dieser Wärmemenge befinden sich dann 0,0203 cal innerhalb des Radius $r = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ cm. Diese Wärmemenge fällt im vorliegenden Fall weg, da ja die Kugel erst beim Radius $r = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ cm

[1]) Christiansen und Müller, Theoretische Physik, § 141.

beginnt. Es bleiben also 0,0105 cal für die Kugel oder 0,0053 cal für die Halbkugel.

Das heißt, wenn der inneren Oberfläche der Halbkugel der Fig. 1 b zur Zeit $t =$ Null momentan 0,0053 cal zugeführt werden, so ist die Temperatur der inneren Oberfläche nach 10^{-4} sec 2500° C. Wird die Wärme nicht momentan, sondern über die Zeit von 10^{-4} sec gleichmäßig verteilt zugeführt, so ist ein gut Teil weniger Wärme zur Erzielung von 2500° C erforderlich. Ferner ist die Wärmemenge bedeutend geringer, wenn durch Oxydbildung die Wärmeleitfähigkeit stark verschlechtert wird. Zur Verfügung stehen in 10^{-4} sec 0,0018 cal. Also auch hier stimmen die erforderlichen und die zur Verfügung stehenden Wärmemengen der Größenordnung nach überein. Einer Erwärmungsdauer von 10^{-4} sec entspricht eine Fleckgeschwindigkeit von 300 cm/sec.

Daß in der Bahn des Lichtbogenansatzes auf der rotierenden Scheibe zeitweise eine sehr hohe Temperatur herrschte, geht meines Erachtens schon aus der von Herrn Stolt mitgeteilten Beobachtung hervor, daß der Weg der kathodischen Ansatzfläche auf der Scheibe stark angegriffen wurde. Wie eine Glimmentladung zeigt, wird eine kalte Kathode nicht einmal bei einem Kathodenfall von 300 Volt, geschweige denn bei dem hier vorhandenen Kathodenfall von 15 Volt irgendwie angegriffen. Daß sich die Scheibe an einer Stelle, an der $^1/_{100}$ Sek. zuvor der Lichtbogenansatz war, mit dem Finger berühren ließ, ist nicht verwunderlich. Nach den vorstehenden Rechnungen kühlt sich der Kathodenfleck infolge seiner außerordentlich geringen Größe innerhalb dieser Zeit nahezu vollkommen wieder ab. Daß bei den Versuchen kein Kathodenfleck zu sehen war, liegt erstens an der großen Helligkeit des Lichtbogens, zweitens an der geringen Größe des Kathodenflecks und drittens an seinem offenbar sehr unruhigen Hin- und Herirren.

Meines Erachtens ist der Quecksilberdampflichtbogen, bei dem der Kathodenfleck sich infolge der geringen Helligkeit des Bogens sehr scharf abhebt, der beste Beweis dafür, daß der Kathodenfleck eines Lichtbogens sich mit sehr großer Geschwindigkeit über die Kathode hinweg bewegen und doch stets die erforderliche hohe Temperatur besitzen kann. Nach meinen Versuchen ist die Größe des Kathodenflecks des Ag-Lichtbogens $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ cm²/A, der Kathodenfall nur 5,3 Volt und die mittlere Geschwindigkeit des Kathodenflecks etwa 10^3 cm/sec.

Die Vieldeutigkeit in der Relativitätstheorie.

Von **G. v. Gleich** in Ludwigsburg.

(Eingegangen am 2. September 1924.)

Das Nachfolgende enthält die für den Physiker wichtigsten Ergebnisse aus meinem Aufsatz „Die relativistische Perihelstörung“ in den Astronomischen Nachrichten **222**, 49 ff., 1924, auf den für nähere Begründung des Gesagten verwiesen wird.

In dem Aufsatz „Zur Kritik der Relativitätstheorie usw.“ (diese ZS. **25**, 230 ff., 1924) habe ich (S. 239, Fußnote 4) in Aussicht gestellt, eingehend zu zeigen, daß der Spielraum, den die allgemeine Relativitätstheorie für die Festsetzung der Koeffizienten g_{ik} läßt, von wesentlichem Einfluß auf den Betrag der Perihelbewegung ist. Die betreffende Arbeit ist, weil vorwiegend astronomischen Inhalts, inzwischen in den Astronomischen Nachrichten erschienen.

Der springende Punkt des Problems ist, welche Werte man den g_{ik} als Funktionen der Koordinaten in der quadratischen Differentialform (14) (diese ZS. **25**, 237) gibt, die wir hier kurz schreiben:

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k \left\{ \begin{array}{l} i, k = 1, 2, 3, 4 \\ g_{ik} = g_{ki} \end{array} \right\} \qquad (1)$$

A. Einstein setzt[1]) bekanntlich, ohne Angabe der Gründe, weshalb er gerade diese Substitution gewählt hat:

$$\left. \begin{array}{l} g_{11} = -\left(1 + \dfrac{\alpha x_1^2}{r^3}\right),\ g_{22} = -\left(1 + \dfrac{\alpha x_2^2}{r^3}\right),\ g_{33} = -\left(1 + \dfrac{\alpha x_3^2}{r^3}\right), \\ g_{12} = -\dfrac{\alpha x_1 x_2}{r^3}, \qquad g_{13} = -\dfrac{\alpha x_1 x_3}{r^3}, \qquad g_{23} = -\dfrac{\alpha x_2 x_3}{r^3}, \\ g_{44} = -\left(1 - \dfrac{\alpha}{r}\right), \qquad \text{alle übrigen } g_{ik} = 0 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Dabei ist $\alpha = 2A^2$, wenn A die Aberrationskonstante bedeutet; x_1, x_2, x_3 sind die rechtwinkligen Koordinaten des Planeten, bezogen auf den Sonnenmittelpunkt, r der Radiusvektor. Dieser Ansatz ist nichts weiter als ein Probeansatz, derart beschaffen, daß er der Kugelsymmetrie des R_3 genügt und daß er, eingesetzt in die von A. Einstein und M. Grossmann mit Hilfe der Tensoranalysis, der Theorie der geodätischen

[1]) Vgl. Einstein, Berliner Sitzungsberichte 1915, S. 831 ff. Nur g_{44} ist astronomisch begründet; die übrigen g_{ik} sind lediglich zu Kompensationszwecken eingeführt, um die Relativitätshypothese zu stützen.

Linie und der Relativitätshypothese aufgestellten Bewegungsgleichungen[1]) des Planeten in erster Näherung die rein elliptische Bewegung liefert, also bis auf sehr kleine Abweichungen dem Newtonschen Gesetz entspricht. Erreicht wird dies damit, daß im Ausdruck für g_{44}:

$$\frac{\alpha}{r} = 2\frac{A^2}{r} = 2\frac{k^2}{c^2 r} = 2\frac{U}{c^2}$$

ist, wo U das Newtonsche Potential $= \frac{k^2}{r}$, k die Gaußsche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Relativitätstheorie läßt hierbei zunächst noch die Frage offen, ob U streng $= \frac{k^2}{r}$ ist, oder ob noch Glieder höherer Ordnung in $\frac{1}{r}$ hinzutreten, weshalb wir allgemeiner ansetzen

$$g_{44} = -(1 + q_1\varrho + q_2\varrho^2 + \cdots), \tag{3}$$

worin $\varrho = \frac{\alpha}{r} = 2\frac{A^2}{r}$, q_1 wegen des Newtonschen Gesetzes $= -1$ und q_2 ein vorläufig unbestimmter Faktor ist.

Die g_{ik} bilden bekanntlich eine symmetrische Determinante, deren Wert $|g_{ik}| = D$ in der ursprünglichen Theorie Einsteins gleich der Einheit sein sollte, aber allerdings nicht streng war, wie sich aus (2) durch die Ausrechnung ergibt. Die späteren Relativisten[2]) ließen dann auch Werte von D zu, die verschieden von 1 und Funktionen von $\frac{\alpha}{r} = \varrho$ sind, weshalb ich wiederum setze

$$|g_{ik}| = D = 1 + \delta\varrho + \varepsilon\varrho^2 + \cdots, \tag{4}$$

worin $\delta, \varepsilon \ldots$ später zu erörternde Zahlenfaktoren sind, die $= 0$ oder $\neq 0$ sein können. Bei Einstein ist $\delta = 0$, $\varepsilon = -1$. Wegen der Kleinheit von ϱ bzw. α konvergieren die Reihen (3) und (4) sehr rasch. Herr de Sitter[3]) wählt, um Einsteins Lösung zu verbessern, statt (2) die folgende Substitution:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right), \quad g_{44} = -\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{2r^2}\right), \\ \text{übrige } g_{ik} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Vgl. A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie 1916, S. 30, Formel (22). Für die Rechnung bequemer ist die von Fr. Kottler, Encykl. d. Math. Wiss. VI, 2 B, 205 gegebene Transformation.

[2]) Z. B. de Sitter, vgl. Kottler a. a. O, S. 209.

[3]) Kottler, a. a. O., S. 209.

Damit wird in (4) $\delta = 2, \qquad \varepsilon = {}^{13}/_{8}$.

Da nun de Sitter mit dieser ganz anders gearteten Substitution genau denselben Wert für die Perihelverschiebung fand, wie Einstein selbst, lag der Trugschluß nahe, dieser Wert sei, unabhängig von der gewählten Substitution („Koordinatenwahl" nach relativistischer Ausdrucksweise), eine „zwingende Folge" der Einsteinschen Hypothese.

Nun ist im Anschluß an Fr. Kottler[1]), also streng auf dem Boden der Relativitätstheorie bleibend, erlaubt, statt (1) zu setzen:

$$ds^2 = -q_{44}\,dx_4^2 - \lambda \sum_1^3 dx_i^2 - l\Big(\sum_1^3 x_i\,dx_i\Big)^2. \tag{6}$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks lassen sich die Substitutionen Einsteins und de Sitters gemeinsam und gleichzeitig behandeln, indem man λ und l als rasch konvergierende Potenzreihen in ϱ ansetzt, nämlich

$$\lambda = 1 + h\varrho + \cdots, \qquad l = \frac{j}{r^2}\varrho\,(1 + \cdots). \tag{7}$$

wobei $h \ldots, j \ldots$ Zahlenfaktoren sind. In der Natur des Problems liegt es[2]), daß in dem erforderlichen Grade der Annäherung höhere Glieder als die in (7) angeschriebenen nicht benötigt werden. Vermöge (3) und (7) einerseits und (2) und (5) andererseits hat also

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Einstein} \ldots & q_1 = -1, & q_2 = 0, & h = 0, & j = 1 \\ \text{de Sitter} \ldots & q_1 = -1, & q_2 = {}^1/_2, & h = 1, & j = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Durch Einsetzen von (7) in (6) und von (4) und (6) in die Einstein-Grossmannschen Bewegungsgleichungen[3]) ergibt eine ziemlich weitläufige[4]) Rechnung auf Grund der astronomischen Störungstheorie als Perihelverschiebung während eines Planetenumlaufs zunächst

$$\Delta\tilde{\omega} = \frac{\alpha\pi}{p}\,(1 - 2q_2 - \delta + 5h + 2j). \tag{9}$$

worin $\alpha = 2A^2$, $p = a(1 - e^2)$, $a =$ Halbachse, $e =$ Exzentrizität ist.

Aus Gründen der Determinanten-Theorie ist aber, wie ich a. a. O. näher ausgeführt habe, δ abhängig von h und j, d. h. es ist stets $\delta = 3h + j - 1$. Folglich ist die endgültige Perihelformel, die Einsteins und de Sitters Lösung gleichzeitig in sich schließt:

$$\Delta\tilde{\omega} = 2\,\frac{A^2\pi}{p}\,(2 - 2q_2 + 2h + j). \tag{10}$$

---

[1]) Kottler, a. a. O., S. 207.

[2]) Vgl. den Originalaufsatz.

[3]) Vgl. oben S. 330, Fußnote 1.

[4]) Sie ist im wesentlichen in meiner Arbeit in den Astr. Nachr. **222**, 51 ff. wiedergegeben.

Wie (8) zeigt, gibt diese Formel sowohl mit Einsteins Substitution (2) als auch mit der von de Sitter (5) den bekannten Wert[1])

$$\Delta\tilde{\omega} = 6\frac{A^2\pi}{p} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}. \tag{11}$$

Aus den Einzelheiten der Rechnung a. a. O. geht hervor, daß q_2 keinen Einfluß auf h oder j hat. Somit verträgt sich jeder beliebige Wert von q_2 (sogar ein sehr großer, wenn auch natürlich nicht unbeschränkt großer) ohne weiteres mit der Relativitätstheorie. Die mitunter geäußerte Ansicht, man könne q_2 (d. h. hypothetische höhere Glieder des Gravitationspotentials) mit Hilfe der Einsteinschen Theorie ermitteln, ist also unbedingt hinfällig. q_2 bleibt vielmehr innerhalb sehr weiter Grenzen völlig unbestimmt und kann daher gemäß (10) den Betrag der Perihelverschiebung ganz erheblich ändern. Setzt man z. B. bei Zugrundelegung der Einsteinschen „Lösung" $q_2 = {}^3/_2$ oder bei der von de Sitter $q_2 = 2$ (statt 0 bzw. ${}^1/_2$), wogegen die Relativitätstheorie an sich nichts einwenden kann, denn sie setzt ja auch h bzw. j selbst durchaus willkürlich an, so steht das Perihel überhaupt still. Mit noch größeren Werten von q_2 wird es sogar rückläufig.

Umgekehrt ist für jeden vorgegebenen Wert der Perihelverschiebung, z. B. auch für die Werte von E. Grossmann[2]), ohne weiteres derjenige Wert von q_2 zu ermitteln, der sich mit der Relativitätstheorie „verträgt". Zusatzglieder zum klassischen Potential ohne physikalische Begründung sind indes altbekannte Verlegenheitsaushilfen, die der Astronom aus praktischen Gründen, wie z. B. die Newcombschen Korrektionen der Mondbewegung, hinnehmen kann, der Physiker aber ablehnen muß.

Aber auch mit $q_2 = 0$, d. h. dem genauen Newtonschen Potential, kann die Relativitätstheorie keinen stichhaltigen Grund dagegen vorbringen, daß z. B. in der Form der Einsteinschen Lösung neben $h = 0$, $j = -2$ statt $j = +1$ gesetzt wird, d. h. statt (2)

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2\alpha x_1^2}{r^3}\right)\cdots, \qquad g_{12} = +\frac{2\alpha x_1 x_2}{r^3}\cdots$$

Und hiermit bleibt das Perihel ebenfalls fest. Ebenso, wenn in der de Sitterschen Form neben $j = 0$, $q_2 = 0$, $h = -1$ gesetzt wird. Der Newcombsche Wert von 42″ bis 43″ säkular für den Merkur

[1]) ZS. f. Phys. **25**, 238, Formel (15) und (16), 1924. Sie ist bekanntlich zuerst von Gerber aufgestellt worden, um den Newcombschen Wert darstellen zu können.

[2]) Astron. Nachr. **214**, 41, 1921: 29″ bzw. 38″ säkular, statt 43″ (Newcomb-Leverrier).

ist also mit nichten eine „zwingende" Folgerung aus der „Theorie" [1]), noch viel weniger aber ein Beweis für ihre „Richtigkeit". Vielmehr entpuppt sich die vielbesprochene Metrik des R_4 als unendlich vieldeutig [2]), als eine wirkliche „Molluske", die mit den Beobachtungen überhaupt nicht verglichen werden kann.

Wäre endlich die Lichtgeschwindigkeit keine Konstante, sondern, wofür sogar eine gewisse Wahrscheinlichkeit besteht und was ja auch Einstein im Gegensatz zum Ausgangspunkt seiner Hypothese später [3]) angenommen hat, im Gravitationsfelde eine Funktion von r, d. h. eine Funktion der jeweiligen Entfernung des Lichtquants von dem Massenzentrum, da ja die Elastizität des Äthers in verschiedenen Entfernungen von einem solchen verschieden sein könnte, also etwa

$$c = c_0(1 + b\varrho + \cdots), \tag{12}$$

wo b eine Konstante ist, so zeigen die von mir a. a. O. verwendeten Formeln [4]), daß die Wirkung von (12) darin bestände, daß in (9) und (10) $q_2 - b$ an die Stelle von q_2 treten würde. Damit bekäme man

$$\Delta\tilde{\omega} = 4\frac{A^2\pi}{p}\left(1 - q_2 + b + h + \frac{j}{2}\right).$$

Durch eine solche Hypothese läßt sich also jedes beliebige q_2 wieder aus den Formeln herausschaffen oder umgekehrt jedes angenommene b durch ein entsprechendes q_2 wieder kompensieren. Ich halte dies jedoch für rechnerische „Schiebungen".

Nimmt man aber eine von der Gravitation abhängige Lichtgeschwindigkeit nach Formel (12) an, so muß, was, soviel mir bekannt, bis jetzt noch nicht bemerkt wurde, die Einsteinsche Perihelbewegung nach ihrer eigenen Theorie noch ein Zusatzglied $= 4\frac{A^2\pi}{p} \cdot b$ erhalten. Mit $b = \frac{1}{2}$ wäre dies für Merkur ein Zusatzglied von rund 14″, so daß die Gesamtbewegung damit etwa 56″ betragen würde. Mit $b = \frac{1}{2}$ würde aber (12) identisch mit (22) (ZS. f. Phys. **25**, 244, 1924); denn es würde

$$b\varrho = \frac{1}{2}\varrho = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r} = \frac{A^2}{r}.$$

---

[1]) Naturwissenschaften **11**, 910, 1923.
[2]) Im landläufigen Sinne natürlich, nicht in dem der Funktionentheorie.
[3]) Vgl. Lenards Kritik in Äther und Uräther, S. 51.
[4]) Astr. Nachr. **222**, 55, 1924.

Dies würde, überlagert von der Soldnerschen Hypothese[1]), als Ablenkung der streifend an der Sonnenoberfläche vorübergehenden Lichtstrahlen $L = 1{,}756''$ liefern.

Zusammenfassung: Die allgemeine Relativitätstheorie[2]) an sich liefert überhaupt keinen bestimmten Wert einer Perihelverschiebung, sondern erst die willkürliche Festsetzung gewisser Parameter, die in die Formeln eingehen. Diese lassen sich ohne Verstoß gegen die Grundlagen der Theorie derart ansetzen, daß das Perihel sogar stillsteht oder rückläufig wird.

Ludwigsburg, 30. August 1924.

Nachtrag bei der Korrektur. Inzwischen ist mir die Arbeit von S. Mohorovičić über die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Gravitation (Astr. Nachr. **222**, 69 ff., 1924) zur Kenntnis gekommen, aus der überdies hervorgeht, daß die anläßlich der Sonnenfinsternis vom 22. September 1922 beobachteten Sternverschiebungen größtenteils gar nicht radial waren, sondern seitlich und daß sogar negative radiale Verschiebungen vorkamen.

---

[1]) Vgl. ZS. f. Phys. **25**, 242, 244, 1924, u. Ann. d. Phys. (4) **65**, 593 ff., 1921.

[2]) Vgl. auch die vom psychologischen Standpunkt aus sehr bemerkenswerte Schrift: E. Gehrcke, Die Massensuggestion der Relativitätstheorie. Berlin 1924.

Nachtrag zur Arbeit: Über die Masse als Funktion des Schwerepotentials [1]).

Von **A. H. Bucherer** in Bonn.

(Eingegangen am 2. September 1924.)

In der zitierten Arbeit habe ich meine Gravitationstheorie durch die nicht zu umgehende Einführung der durch Versuche an β-Strahlen bestätigten Massenveränderlichkeit vervollständigt. Die Ergebnisse der früheren Fassung erhalten, soweit der Vergleich mit der Erfahrung geht, dadurch keine Änderung. Eine tiefergehende Untersuchung zeigt aber, daß eine Wahl zwischen den beiden nicht in Frage kommen kann, da nur die neuere Form den Anforderungen eines in allen Teilen logisch festgefügten Aufbaues genügt. Da ich hoffen darf, daß die Theorie nunmehr eine endgültige Form erhalten hat, erscheint es mir wünschenswert, einen Überblick über den Gang meiner Überlegungen zu geben. Gleichzeitig berichtige ich einen durch Unachtsamkeit beim Niederschreiben begangenen Fehler bei der Ableitung der radialen Energie eines Körpers im Schwerefelde. Hierbei bleibt das Endergebnis der Rechnung bestehen.

I. Die Hauptgrundlage, von der ich ausgehe, ist die wohl unanfechtbare Tatsache, daß die potentielle Energie eines kleinen Körpers, der im Felde eines Zentralkörpers ruht, in ersterem Körper selbst ihren Sitz hat. Leistet dieser daher eine umkehrbare Arbeit bei beliebig langsamer Bewegung, so nimmt seine potentielle Energie um den Betrag dieser Arbeit ab. Man braucht, um diese Lokalisierung der Energie zu begründen, nur die Umwandlung der potentiellen Energie des kleinen Körpers in kinetische oder umgekehrt die kinetische in potentielle zu betrachten. Hier handelt es sich im Grunde genommen um die Folge des an Masse außerordentlich überlegenen Zentralkörpers gegenüber dem kleinen Körper.

II. Die zweite Annahme beruht, wie ich in der Arbeit l. c. weiter ausgeführt habe, auf der Erkenntnis, daß das Impulsmoment eines kreisenden Elektrons im Gravitationsfelde unverändert bleibt. Eine energetische Überlegung führt dann zu einer Formel, welche eine im Schwerefelde ruhende Masse als eine Funktion des Schwerepotentials darstellt. Hierbei haben wir die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß die

[1]) ZS. f. Phys. **26**, 188, 1924.

klassischen Gleichungen der Elektrodynamik in der bisherigen Form, die ja bekanntlich eine Strahlung des kreisenden Elektrons fordern, ungültig sind. Diese Voraussetzung läßt sich aus dem Satze, dessen Begründung einer künftigen Veröffentlichung vorbehalten bleiben soll, ableiten: Jede freie Bewegung auf einer geodätischen Linie im vierdimensionalen Raume ist beschleunigungsfrei, weil die Summe der wirkenden vektoriellen Feldkräfte Null ist. Ist aber der Körper beschleunigungsfrei, so strahlt er nicht. Mit anderen Worten: Eine freie krummlinige Bewegung in einem Gravitationsfelde ebenso wie in einem elektrischen Felde eines elektrischen Zentralkörpers ist strahlungslos und ist vollkommen äquivalent einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung desselben Körpers in einem Lorentzsystem.

III. Versuche an β-Strahlen, die Verfasser und nach ihm andere angestellt haben, führen zu folgender Massenformel:

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

m_0 bedeutet hier die Ruhemasse außerhalb des Schwerefeldes. Es ergibt sich mit hinreichender Annäherung:

$$m_t = m_0\left(1 + \frac{\mu}{r C_0^2} + \frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{1}$$

Andererseits ist in meiner Arbeit gezeigt worden, wie in II. schon angemerkt, daß das Impulsmoment unabhängig vom Schwerepotential ist, d. h.

$$m_t r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \tag{2}$$

und es folgt für ein Zeitintervall:

$$dt = dt_0\left(1 + \frac{\mu}{r C_0^2} + \frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{3}$$

Es ist zu beachten, daß β in einem freien System Funktion von r und damit vom Schwerepotential ist. Schon dadurch wird das Impulsmoment von β unabhängig. Aus der transversalen Masse leitet sich weiter durch Anwendung rein mechanischer Prinzipien die radiale Masse ab:

$$m_r = m_0\left(1 + \frac{3\mu}{r C_0^2} + \frac{3}{2}\beta^2\right). \tag{4}$$

IV. Wir zerlegen die kinetische Energie E in zwei getrennte Bestandteile, eine radiale E_r und eine transversale E_t. Wir müssen nämlich an den Ausdruck für die kinetische Energie die Anforderung stellen, daß er richtig bleibt, wenn der eine oder andere Bestandteil verschwindet,

d. h. die Geschwindigkeiten v_r und v_t sind durch partielle Differentialkoeffizienten, der eine bei konstantem φ, der andere bei konstantem r darzustellen. Eine Ableitung der radialen Energie wird zur Erläuterung genügen. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} dE_r &= m_r v_r d v_r \\ v_r &= \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t_0}\left(1 - \frac{\mu}{r C_0^2} - \frac{\beta^2}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Bei Vernachlässigung sehr kleiner Größen zweiter Ordnung ist:

$$\frac{1}{C_0^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_\varphi^2 = \frac{2\mu}{r C_0^2} + \frac{2K}{m_0 C_0^2}. \tag{6}$$

$$E_r = \frac{m_0}{2}\int_0^{v_r}\left(1 + \frac{2\mu}{r C_0^2} + \frac{K}{m_0 C_0^2}\right) d\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_0^2 = \frac{m_0}{2}\left(1 + \frac{\mu}{r C_0^2}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial t_0}\right)^2. \tag{7}$$

Ganz analog wird die transversale Energie abgeleitet und es folgt:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{m_0}{2}\left(1 + \frac{\mu}{r C_0^2}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial t_0}\right)^2 + \frac{m_0}{2}\left(1 - \frac{\mu}{r C_0^2}\right) r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}\right)^2 \\ &= \frac{\mu m_0}{r}\left(1 + \frac{\mu}{2 r C_0^2}\right) + K. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Die Gleichung gilt für einen Standort außerhalb des Schwerefeldes. Im Gegensatz zur Einsteinschen Theorie ist diese Gleichung nicht invariant. Das heißt sie ändert ihre Form, wenn sie auf andere Standorte bezogen wird. Die Einführung der Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit hat zur Folge, daß die Invarianz nur noch besteht für einen Beobachter, der sich auf einem Himmelskörper mit parabolischer Bahn befindet. Ohne auf diesen Fall näher einzugehen, wenden wir uns zu dem Problem der Planetenbewegung, wie sie vom Erdbewohner beobachtet wird.

Bei einer Verlegung des Standortes lassen wir uns von denselben Erwägungen leiten wie bei der ersten Herleitung der Merkurgleichung in den Annalen [1]). Demgemäß verlegen wir den Standort zunächst nach einem im Schwerefelde ruhenden Punkt P im Erdabstand ϱ vom Zentralkörper und passen die Gleichung diesem Standorte an. Um zum bewegten Erdbewohner überzugehen, wenden wir die Formeln für die Masse und die Zeitintervalle an, die sich, wie gezeigt, aus der Konstanz des Impulsmoments ergeben und erhalten das l. c. angegebene Resultat für die

[1]) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. **68**, 8—9, 1922.

Perihelbewegung des Merkurs, nämlich 33″ anstatt 36″, wie in meiner Arbeit in dieser Zeitschrift angegeben.

Die Rotverschiebung erfährt auch eine kleine außerhalb des Meßbereichs liegende Änderung, die prinzipiell wichtig ist. Es ergibt sich nämlich:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\mu}{r C_0^2} + \frac{\mu}{2 \varrho C_0^2}.$$

Entgegen dem Einsteinschen Invarianzprinzip findet W. Pauli[1]):

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\mu}{r C_0^2} + \frac{\mu}{\varrho C_0^2}.$$

Zusammenfassung. Die in dieser Zeitschrift zum Teil nur skizzenhaft gegebenen Entwicklungen werden erläutert und ergänzt. Es ergibt sich, daß das Invarianzprinzip noch weiter in seiner Anwendbarkeit einzuschränken ist. Die Abweichungen der Resultate von den Einsteinschen sind prinzipiell wichtig, liegen aber außerhalb des Bereichs der Erfahrung.

Bonn, 30. August 1924.

---

[1]) W. Pauli, Relativitätstheorie, S. 714.

Die Verpackungshypothese.

Von **W. A. Plotnikow** in Kiew.

(Eingegangen am 1. September 1924.)

Es gibt zwei verschiedene Arbeitshypothesen über die Struktur des Atomkerns. Der ersten zufolge bestehen die Kerne der Atome, deren Gewicht der Formel $4n$ entspricht, nur aus α-Partikeln; die Atome aber, die nicht eine Masse vom Typus $4n$ haben, enthalten außer α-Partikeln noch 1, 2 oder 3 Protonen[1]). Der zweiten Hypothese zufolge müssen die wirklichen Anordnungen von 4 Protonen im Atomkern nicht notwendigerweise gleich denjenigen im Heliumkern sein.

Schon früher wies ich auf die Vorteile der zweiten Hypothese hin[2]); es scheint mir, daß die letzten Versuche von Rutherford und Chadwick[3]) und von Kirsch und Pettersson[4]) entschieden für diese Ansicht sprechen.

Die Verpackungshypothese läßt in den Atomkernen 4 und mehr Protonen annehmen. In den radioaktiven Elementen haben die 4 Protonen bisweilen eine Konfiguration, die ihre Wechselwirkung begünstigt. Dann verpacken sich die 4 Protonen zu einem Heliumkern und die dabei frei werdende Energie ist so erheblich groß, daß das Atom zerfällt. Durch diese interatomige Katastrophe werden auch die stabilen Konfigurationen der anderen Kernteile gestört. Deshalb sind die ersten Zerfallsprodukte instabil; sie zerfallen auf Kosten derselben Verpackungsenergie von 4 Protonen.

Die Folgerungen aus der Hypothese sind durch die folgenden Versuchszahlen bestätigt.

1. Nach kalorimetrischen Messungen kann ein Grammatom Radium bei seinem radioaktiven Zerfalle $6{,}4 \cdot 10^{11}$ Grammkalorien liefern. Wenn ein Heliumkern aus freien Protonen und Elektronen gebildet wird, so ist der Verlust an Masse gleich 0,0298 (in Wasserstoffeinheiten). Aus

---

[1]) Aston, Isotope, S. 110 (Deutsche Ausgabe 1923). Lise Meitner, ZS. f. Phys. **4**, 146, 1921.

[2]) Meine erste Mitteilung ist am 13. Dezember 1923 zu Kiew gelesen.

[3]) Nature **113**, 457, 1924.

[4]) Ebenda, S. 603, 1924. Die Naturwissenschaften **12**, 495, 464, 1924.

diesem Massendefekt berechnet sich die Bildungswärme für ein Grammatom Helium zu $6{,}4 \cdot 10^{11}$ Grammkalorien [1]), das ist gerade derselbe Wert, der für den radioaktiven Zerfall gefunden ist.

2. Aus dem Angeführten folgt, daß beim radioaktiven Übergang vom Radium zum Blei die Ausstrahlung nur einer α-Partikel von der Verpackung begleitet wird. Die anderen α-Partikeln, die bei diesem Übergange ausgestrahlt werden, liegen schon im Radiumkern vor; sie werden nur durch die Energie der interatomigen Katastrophe aus ihren stabilen Konfigurationen entfernt. Nach dieser Ansicht sollte der Massenverlust beim Zerfall des Radiums so klein sein, daß er innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler liegt.

In der Tat ist die Differenz der Atomgewichte zwischen Ra und Pb fast genau 20. Ganz anders verhält sich das Uran. Die Atomgewichtsdifferenz zwischen Uran und Radium ist größer, als es nach der Zerfalltheorie zu erwarten wäre. Die Verpackungshypothese erklärt diese zu große Differenz durch die Massenverluste, von denen alle α-Strahlungen beim Übergang von Uran zu Radium begleitet sind [2]).

3. Für die Elemente, deren Atomgewicht der Formel $4n$ entspricht, ist es Rutherford und Chadwick gelungen, nur aus dem Schwefelatom Protonen herauszuschießen. Sauerstoff liefert negative Resultate. Dies Ergebnis ist nach unserer Hypothese zu erwarten, weil der Sauerstoffkern genau eine ganze Zahl wiegt, dagegen das Schwefelatom etwas mehr als eine ganze Zahl, nämlich 32,07. Dieser Überschuß weist auf die Existenz von nicht verpackten Protonen im Schwefelatom hin.

4. Die Versuche von Rutherford zeigen, daß bei der Zerlegung der schweren Atomkerne durch den Aufprall der α-Teilchen, ebenso wie beim spontanen radioaktiven Zerfall, Energie frei wird. Mit Hilfe der Verpackungshypothese kann man auch diesen Energieüberschuß verständlich machen. Nach unserer Ansicht enthalten die Atomkerne freie Protonen, die beim Zertrümmern des Atomkerns sich mit Energieabgabe zu α-Partikeln verpacken können. Nach den obigen Betrachtungen können, wenn der Atomkern zerlegt wird, neue α-Partikeln entstehen. Bis jetzt ist es noch nicht gelungen, ihre Bildung endgültig zu beweisen. Das experimentelle Tatsachenmaterial, besonders die Versuche von Kirsch und Pettersson, scheinen diese Folgerung zu stützen.

---

[1]) In dem bekannten Buche von Sommerfeld (Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 117, 1922) ist dieser Wert irrtümlich zehnmal kleiner errechnet.

[2]) Vgl. Lise Meitner, ZS. f. Phys. **4**, 146, 1921; Fajans, Radioaktivität, 4. Aufl., S. 31, 1922.

Zusammenfassung.

Der Verfasser verteidigt und entwickelt die Hypothese der interatomigen Verpackung, derzufolge die wirklichen Anordnungen der Protonen und Elektronen im Atomkern nicht notwendigerweise alle denjenigen in einem Heliumkern gleich sein müssen. Die Ausführungen des Verfassers lassen in den Atomkernen 4 und mehr Protonen annehmen. Bei den radioaktiven Prozessen und bei der Zerlegung der Atomkerne durch α-Partikeln können 4 Protonen zu einem Heliumkern sich verpacken. Diese Verpackungsenergie ist mit der experimentell bestimmten Zerfallswärme des Radiums identisch. Der Massenverlust beim Übergang von U zu Ra erklärt sich durch die Verpackung von Protonen.

Kiew, 1923—1924.

Über die Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeitsgemischen.

Von **Martin Grützmacher** in Münster i. W.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 1. August 1924.)

Es werden die Dielektrizitätskonstanten einer Reihe von Mischungen bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Die Versuche werden durch keine der bisher vorgeschlagenen Formeln wiedergegeben.

Einleitung. Um den Zusammenhang zwischen dem Brechungsquotienten n und der variablen Dichte d der gegebenen Substanz darzustellen, sind drei Hauptformeln aufgestellt worden:

$$p_1 = \frac{n-1}{d} = \text{const (Beer, Landolt, Gladstone)}, \tag{1}$$

$$p_2 = \frac{n^2-1}{d} = \text{const (Newton, Laplace)}, \tag{2}$$

$$p_3 = \frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = \text{const (Lorentz, Lorenz)}. \tag{3}$$

Entsprechend hat man die Abhängigkeit des Brechungsquotienten N verschiedener Mischungen von dem Brechungsquotienten n_i ihrer Bestandteile durch eine der folgenden Formeln ausgedrückt:

$$P\frac{N-1}{D} = \sum P_i\frac{n_i-1}{d_i}\ (4);\quad P\frac{N^2-1}{D} = \sum P_i\frac{n_i^2-1}{d_i}, \tag{5}$$

$$P\frac{N^2-1}{N^2+2}\cdot\frac{1}{D} = \sum P_i\frac{n_i^2-1}{n_i^2+2}\cdot\frac{1}{d}, \tag{6}$$

wobei man annahm, das Lichtbrechungsvermögen von Mischungen sei eine additive Eigenschaft, und als Maß dieses Brechungsvermögens eine der Größen p_1, p_2 oder p_3 gelten ließ. P_i bedeutet die Gewichtsmenge desjenigen Teiles der Mischung, auf welchem sich die Größen n_i und d_i beziehen; P ist das Gewicht der Mischung ($P = \sum P_i$) und D ihre Dichte.

Eine wichtige Korrektion an der Formel (4) ist von Pulfrich[1]) angebracht worden, indem er die Volumenänderung in Betracht zog, die beim Mischen von Flüssigkeiten auftritt. Sind v_1 und v_2 die Volumina

[1] Pulfrich, ZS. f. phys. Chem. **4**, 561, 1889.

der zu mischenden Flüssigkeiten, V das Volumen der Mischung, so ist $c = \frac{v_1 + v_2 - V}{v_1 + v_2}$ der sogenannte Kontraktionskoeffizient. Pulfrich berechnete die Größe R_v nach der Formel $R_v = \frac{(n_1 - 1)v_1 + (n_2 - 1)v_2}{v_1 + v_2}$ und fand, daß sie sich von der durch Beobachtung gefundenen Größe $R = N - 1$ unterscheidet. Man erhält somit eine gewisse Größe

$$K = \frac{R - R_v}{R}, \tag{7}$$

welche dem Koeffizienten c analog ist. Pulfrich fand, daß K der Größe c proportional ist; setzt man demgemäß $K = \alpha c$, so erhält man den Ausdruck:

$$(N - 1)\, V \frac{1 - \alpha c}{1 - c} = (n_1 - 1)\, v_1 + (n_2 - 1)\, v_2$$

oder nach Einführung der Gewichte

$$P \frac{N - 1}{D} \cdot \frac{1 - \alpha c}{1 - c} = P_1 \frac{n_1 - 1}{d_1} + P_2 \frac{n_2 - 1}{d_2}. \tag{8}$$

Diese Formel von Pulfrich prüften Buchkremer[1]), Schütt[2]), Zitowitsch[3]) und besonders Hess[4]), welcher der Formel folgende Gestalt gab. Es bedeute R eine der drei Größen $n - 1$, $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ oder $n^2 - 1$, die experimentell gefunden werden, und R_v sei derjenige Wert, der für sie nach der Mischungsregel berechnet wird. Ferner sei D die beobachtete, D_v die nach derselben Regel berechnete Dichte der Mischung. Hess schreibt die Pulfrichsche Formel in der Form

$$\frac{R - R_v}{R} = q \frac{D - D_v}{D}, \tag{9}$$

wo q ein positiver Proportionalitätsfaktor ist, dessen spezielle Werte für die drei verschiedenen R er mit α, β, γ bezeichnet. Die experimentelle Untersuchung ergab, daß α, β und γ Konstante sind und gleiche Eigenschaften haben, obwohl sie natürlich zahlenmäßig verschieden sind, d. h. die Pulfrichsche Formel (8) gibt die Versuche wieder, aber ebensogut die abgeänderte, wenn für $(n - 1)$ eingesetzt werden $(n^2 - 1)$ oder $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$. Ebenso fanden Doroschewski[5]) und Dworantschick die

[1]) Buchkremer, ZS. f. phys. Chem. **6**, 161, 1890.

[2]) Schütt, ebenda **5**, 349, 1890.

[3]) Zitowitsch, Sammlung phys. Arbeiten zum Andenken an Prof. Petroschewsky.

[4]) Hess, Ann. d. Phys. **27**, 583, 1906.

[5]) Doroschewski, Phys.-chem. Eigenschaften der Wasser-Alkohollösungen.

Pulfrichsche Formel bestätigt. Hubbard[1]) dagegen fand Fälle, bei denen die Pulfrichsche Konstante α innerhalb weiter Grenzen schwankte.

Unter Zugrundelegung der Faraday-Maxwellschen Theorie hat Silberstein[2]) für die Dielektrizitätskonstante eines Gemisches die Formel

$$\varepsilon = \frac{\sum_1^n \varepsilon_i V_i}{\sum_1^n V_i} \tag{10}$$

abgeleitet, wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ die Dielektrizitätskonstante der einzelnen Komponenten und $V_1, V_2 \ldots V_n$ ihre Volumina bedeuten. Für die Dielektrizitätskonstante eines binären Gemisches ergibt sich hieraus:

$$\varepsilon = \frac{V_1 \varepsilon_1 + V_2 \varepsilon_2}{V_1 + V_2} \tag{11}$$

oder, nach Einführung der Gewichtsmengen p und der Dichten D,

$$\frac{\varepsilon}{D}(p_1 + p_2) = \varepsilon_1 \frac{p_1}{D_1} + \varepsilon_2 \frac{p_2}{D_2}. \tag{12}$$

Diese Silbersteinsche Formel gilt nur streng, wenn beim Mischen keine Dilatation oder Kontraktion eintritt. Da dieses aber stets der Fall ist, ergibt sich die Frage, ob nicht dieser Faktor in ähnlicher Weise wie bei der Pulfrichschen Formel berücksichtigt werden kann, oder ob nicht, indem wir die Maxwellsche Beziehung $\varepsilon = n^2$ benutzen, für die Dielektrizitätskonstante von Gemischen die Beziehung gilt

$$\frac{R}{D}\frac{1 - \alpha c}{1 - c}(p_1 + p_2) = \frac{R_1}{D_1} p_1 + \frac{R_2}{D_2} p_2, \tag{13}$$

wo für R entweder $\overset{\text{I}}{R} = \varepsilon - 1$ oder $\overset{\text{II}}{R} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ oder $\overset{\text{III}}{R} = \sqrt{\varepsilon} - 1$ zu setzen ist. Für $R = \varepsilon - 1$ und $c = 0$ geht diese Formel in die Silbersteinsche über. Die nachfolgende, auf Anregung von Herrn Prof. Gerhard Schmidt ausgeführte Untersuchung wurde unternommen, um die Silbersteinsche (11) und Pulfrichsche (13) Formel zu prüfen.

Versuchsanordnung. Zur Bestimmung des Temperaturganges der Dielektrizitätskonstante wurde in Anlehnung an die Methode von Herweg die in Fig. 1 wiedergegebene Versuchsanordnung benutzt. Die beiden Schwingungskreise, bestehend aus den Kapazitäten C_1 und C_2 und den Selbstinduktionen L_1 und L_2, werden durch zwei Senderöhren A und

[1]) Hubbard, ZS. f. phys. Chem. **74**, 207, 1910.
[2]) Silberstein, Ann. d. Phys. **65**, 661, 1921.

B (Type RS 5, Telefunken) zu schnellen Schwingungen angeregt. Die Rückkopplung zwischen Gitter *G* und Schwingungskreis erfolgt durch Spannungsteilung an *L*. Die Anodenspannung *A Sp* beträgt, um möglichste Konstanz der Schwingungszahl zu erreichen, nur 20 Volt. An Heizstrom verbraucht die Röhre 2,7 Amp., die die Heizspannung *H Sp* von 8 Volt liefert.

Beide Kreise sind eng gekoppelt mit einem Detektorkreis *D*, der die Schwebungen der beiden Kreise in einem Telephon *T* hörbar macht. Diese enge Kopplung K_1 zwischen den beiden Kreisen muß durch eine zweite Kopplung K_2 entgegengesetzter Wirkung wieder aufgehoben werden,

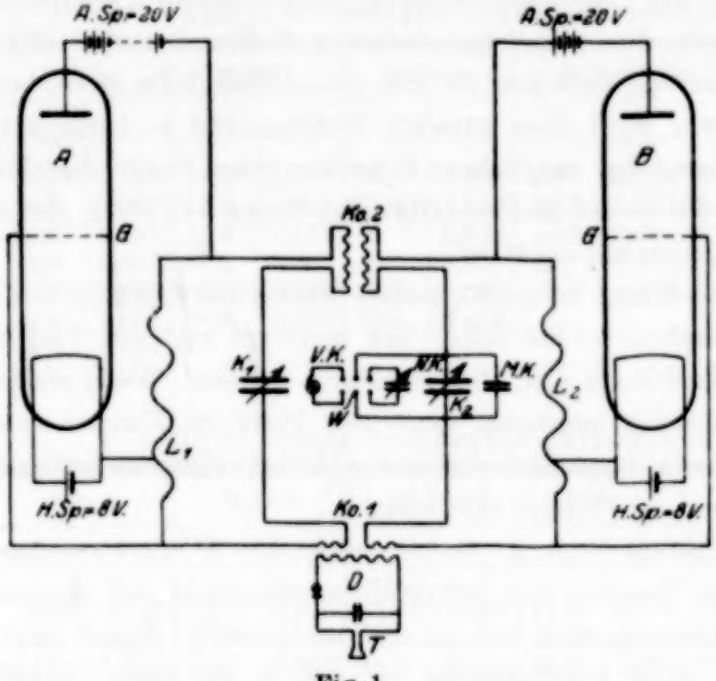


Fig. 1.

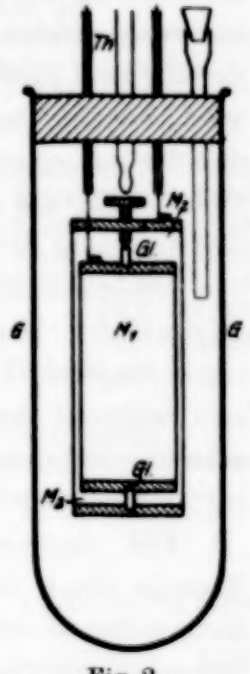


Fig. 2.

damit nicht ein sogenanntes „Mitnehmen" in der Nähe der Schwingungszahlgleichheit, d. h. also bei tiefen Schwebungstönen auftritt, das sich durch völliges Abreißen des Schwebungstones kundgibt. Der Versuchskondensator *VK*, dessen Kapazität in Luft etwa 60 cm beträgt, besteht, um eine Streuung der Kraftlinien möglichst zu vermeiden, aus zwei durch Glasröhrchen *Gl* voneinander isolierten ineinandergeschobenen Messingröhren M_1, M_2 (Fig. 2). Der Durchmesser des inneren Messingzylinders beträgt 3 cm, seine Höhe 8 cm, der Abstand von dem umgebenden Zylinder 1,5 mm. Dieser Kondensator befindet sich in einem mit der zu untersuchenden Flüssigkeit angefüllten Glasgefäß *G*, das seinerseits wieder in einem heizbaren Wasserbottich von 20 Liter Inhalt

befestigt wird. Ein Thermometer *Th* in der Heizflüssigkeit, wie eins im Kondensatorgefäß, erlauben eine genaue Temperaturbestimmung des Dielektrikums.

Durch Umlegen einer Wippe *W* (Fig. 1) kann der Versuchskondensator durch einen konstanten Luftkondensator *NK* derselben Kapazität ersetzt werden. Dieser ist durch Wollelappen gegen äußere Temperaturbeeinflussung gut geschützt und dient als Nullpunktskondensator, auf den die Änderungen des Versuchskondensators bezogen werden. Es werden so kleine Störungen der Schwingungszahl, die von Spannungs- und Zimmertemperaturschwankungen herrühren und nie ganz zu vermeiden sind, eliminiert. Die Messung der durch die Temperaturerhöhung eingetretenen Kapazitätsänderung erfolgt durch den parallelgeschalteten Meßkondensator *MK*, der aus zwei Messingplatten, zwischen die eine dünne Glasplatte geschoben wird, besteht; und zwar wird diese geeichte Meßkapazität so verändert, daß der mit einer Stimmgabel verglichene Schwebungston immer dieselbe Höhe behält, daß also die an der Meßkapazität abgelesene Änderung gleich der Änderung der Versuchskapazität ist.

Die ganze Meßanordnung ist gegen äußere kapazitive Einflüsse sehr empfindlich. Das Telephon mußte daher fest montiert und der Ton in einem längeren Gummischlauch dem Ohr zugeführt werden. Auch mußte man während der Messung möglichst denselben Platz im Zimmer einnehmen, damit nicht die Kapazität des menschlichen Körpers störend auf die Schwingungszahl der Kreise einwirkte.

Die absolute Maßzahl von ε wurde nach der Siemensschen Methode durch direkte Messung der luftgefüllten einerseits und danach der mit dem Dielektrikum angefüllten Kapazität bestimmt[1]). Durch einen Stimmgabelumschalter wird die Kapazität 100 mal in der Sekunde aufgeladen und wieder über ein hochempfindliches Galvanometer entladen. Der hier abgelesene Strom i ist dann proportional der Kapazität c, der Spannung e und der Aufladungszahl N in einer Sekunde: $i = c \cdot e \cdot N$. Da uns nur die Dielektrizitätskonstante, d. h. das Verhältnis der gefüllten zur leeren Kapazität c_D/c_L interessiert, brauchen wir, um ε zu erhalten, nur die beiden Galvanometerausschläge durcheinander zu dividieren; denn die Unterbrechungszahl, die Spannung, sowie der Reduktionsfaktor des Galvanometers fallen bei der Division heraus.

Eine Fehlerquelle kann die Kapazität der Zuleitungen bilden, die vor jeder Messung besonders bestimmt und von den beiden Kapazitäten abgezogen werden muß.

[1]) Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., § 132, 9.

Von der so für Zimmertemperatur (18°) gemessenen Dielektrizitätskonstante kommen wir leicht zu den Werten für andere Temperaturen (t^0). Die Gleichung $\varepsilon_t . c_L = \varepsilon_{18} c_L - c_m$ folgt aus der oben erklärten Meßmethode des Temperaturganges von ε. Die Indizes bei ε deuten die Temperatur an, c_L ist die Kapazität in Luft, c_m die am Meßkondensator, der nach Galvanometerausschlägen geeicht ist, abgelesene Kapazitätsänderung. Die Dielektrizitätskonstante für t^0 ist also $\varepsilon_t = \varepsilon_{18} - \frac{c_m}{c_L}$.

Auf diese Art wurden die nachfolgenden Werte der Dielektrizitätskonstante von den vier Gemischen Tetrachlorkohlenstoff–Chloroform,

Tabelle 1. Tetrachlorkohlenstoff–Chloroform.

0 Proz.		20 Proz.		40 Proz.		60 Proz.		80 Proz.		100 Proz.	
t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε
13,7°	5,165	14,2°	4,410	16,1°	3,780	14°	3,195	14,5°	2,660	14,7°	2,197
18,9	5,065	23,6	4,283	23,3	3,709	33,5	3,070	33,5	2,591	25,3	2,184
24,2	4,966	31,9	4,171	30	3,645	40,5	3,024	40,1	2,565	31,0	2,776
31,0	4,867	40,1	4,060	42,0	3,531	48,1	2,976	50,4	2,525	40	2,161
35,7	4,791	45,7	3,987	49,5	3,465	56,6	2,933	55,5	2,508	52,3	2,145
44,8	4,654	54,4	3,872	55,8	3,412					59,2	2,135
49,3	4,591									70,2	2,121
55,9	4,503										

Tabelle 2. Tetrachlorkohlenstoff–Schwefelkohlenstoff.

0 Proz.		20 Proz.		40 Proz.		60 Proz.		80 Proz.		100 Proz.	
t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε
0,5°	2,617	13,5°	2,518	13,7°	2,435	13,3°	2,350	11,7°	2,279	14,7°	2,197
14,6	2,604	10,7	2,522	21,5	2,423	21,2	2,341	25	2,261	25,3	2,184
11,5	2,610	21,1	2,505	28,9	2,410	26,3	2,334	32	2,248	31,0	2,176
21,5	2,590	30,4	2,487	46,2	2,379	31,8	2,323	42,3	2,232	40	2,161
30,0	2,573	40	2,466			37,3	2,312			52,3	2,145
40,7	2,553					44,1	2,301			70,2	2,121

Tabelle 3. Schwefelkohlenstoff–Benzol.

0 Proz.		20 Proz.		40 Proz.		60 Proz.		80 Proz.		100 Proz.	
t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε
0,5°	2,617	12,8°	2,505	12,5°	2,396	13,5°	2,331	10,5°	2,3175	14°	2,2927
14,6	2,604	21	2,494	26,7	2,373	22,8	2,317	16,5	2,310	21,5	2,2814
11,5	2,610	30,9	2,474	35	2,360	32,5	2,298	21,4	2,304	31,2	2,2688
21,5	2,590	40	2,453	41,7	2,348	42,3	2,283	31,4	2,285	40,4	2,2555
30,0	2,573							41,1	2,2632	50,3	2,2425
40,7	2,553									61,2	2,2880
										69,1	2,2178
										72,7	2,2144

Tabelle 4. Benzol–Toluol.

0 Proz.		20 Proz.		40 Proz.		60 Proz.		80 Proz.		100 Proz.	
t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε	t	ε
14°	2,2927	13°	2,2844	14,5°	2,2947	12,8°	2,3114	13,8°	2,3320	13,5°	2,3791
21,5	2,2814	14	2,2840	16,5	2,2936	16,5	2,3056	26,7	2,3142	15,7	2,3745
31,2	2,2689	23,9	2,2718	25,7	2,2790	27,1	2,2901	46,0	2,2843	26,8	2,3580
40,4	2,2555	33,6	2,2586	35,1	2,2648	37,5	2,2744	53,0	2,2754	37	2,3410
50,3	2,2425	48,1	2,2376	48,5	2,2473	50,1	2,2576	66	2,2574	45,7	2,3276
61,2	2,2880	61,0	2,2195	62,2	2,2296	61,4	2,2438	76	2,2422	55	2,3124
69,1	2,2178	71,9	2,2050	72,2	2,2172	71,5	2,2314			66	2,2961
72,7	2,2144	64,7	2,2156							75,8	2,2811
										84	2,2688
										98	2,2501
										93,7	2,2556

Tetrachlorkohlenstoff–Schwefelkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff–Benzol, Toluol–Benzol gemessen.

Sämtliche Präparate waren als purissima von Kahlbaum oder Merck bezogen; sie wurden sorgfältig entwässert und unmittelbar vor dem Versuch fraktioniert.

Beobachtungen. Die Tabellen 1 bis 4 enthalten die Beobachtungen, die Prozente sind Gewichtsprozente.

Besprechung der Beobachtungen. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich: Die Dielektrizitätskonstanten ändern sich geradlinig mit der Temperatur, nur bei Toluol und Chloroform zeigen sich bei höheren Temperaturen geringe Abweichungen.

In den Tabellen 5 bis 9 sind für die reinen Stoffe die verschiedenen „Refraktionskonstanten“ errechnet. Die Formeln $\frac{\varepsilon - 1}{d}$, $\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{d}$, $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d}$ sind in keinem Falle konstant, sondern zeigen stets einen Gang mit der Temperatur. Im allgemeinen geben sie die Versuche ziemlich gleich gut wieder, nur bei CCl_4, dessen Dielektrizitätskonstante besonders hoch ist, zeigt sich die letzte den anderen überlegen.

Tabelle 5. Tetrachlorkohlenstoff.

t	ε	d	$\frac{\varepsilon - 1}{d}$	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{d}$
20°	2,1900	1,5978	0,7447	0,1777	0,3003
30	2,1763	1,5785	0,7452	0,1784	0,3010
40	2,1625	1,5595	0,7454	0,1790	0,3017
50	2,1490	1,5462	0,7460	0,1798	0,3025
60	2,1360	1,5210	0,7469	0,1805	0,3034
	Maximale Abweichung =		0,002	0,002	0,003

Tabelle 6. Chloroform.

t	ε	d	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
20°	5,042	1,4840	2,724	0,3868	0,8390
30	4,880	1,4657	2,647	0,3847	0,8248
40	4,730	1,4470	2,578	0,3830	0,8120
50	4,580	1,4280	2,507	0,3810	0,7983
	Maximale Abweichung =		0,21	0,005	0,041

Tabelle 7. Schwefelkohlenstoff.

t	ε	d	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
10°	2,612	1,307	1,233	0,2674	0,4715
20	2,593	1,292	1,233	0,2685	0,4724
30	2,574	1,275	1,234	0,2699	0,4740
40	2,554	1,261	1,233	0,2706	0,4743
	Maximale Abweichung =		0,000	0,003	0,003

Tabelle 8. Benzol.

t	ε	d	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
10°	2,298	0,8696	1,493	0,348	0,593
30	2,271	0,8490	1,497	0,350	0,597
50	2,244	0,8284	1,502	0,354	0,601
70	2,217	0,8078	1,506	0,357	0,605
	Maximale Abweichung =		0,013	0,010	0,012

Tabelle 9. Toluol.

t	ε	d	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
10°	2,3841	0,8754	1,579	0,360	0,621
30	2,3522	0,8567	1,578	0,362	0,623
50	2,3200	0,8380	1,575	0,364	0,624
70	2,2900	0,8193	1,574	0,367	0,626
90	2,2605	0,8004	1,575	0,369	0,629
	Maximale Abweichung =		0,005	0,009	0,007

Die weiterfolgenden Tabellen, die die Auseinandersetzung mit den verschiedenen Mischungsregeln bringen, sind alle nur für die Temperatur 20° errechnet, da sich für höhere Temperaturen bei einem bestimmten Gemische die Verhältnisse nur ganz unwesentlich ändern.

Die Bezeichnungen sind folgendermaßen festgesetzt.

Es bedeuten:

v_1 das Volumen des ersten Bestandteiles der Mischung,

v_2 das Volumen des zweiten Bestandteiles der Mischung,

D_1, D_2 die Dichten der beiden zur Mischung verwendeten Flüssigkeiten,

p_1, p_2 die zur Mischung abgewogenen Mengen derselben,

D die nach der Mischung beobachtete Dichte,

D_v diejenige Dichte, die das Gemisch haben würde, wenn keine Volumenänderung eingetreten wäre,

c die Volumenkontraktion oder Dilatation der Volumeneinheit des Gemisches,

q_1, q_2, q_3 die den drei Ausdrücken $\varepsilon - 1$, $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ und $\sqrt{\varepsilon} - 1$ für das Refraktionsvermögen entsprechenden Proportionalitätsfaktoren,

ε_1, ε_2, ε_3 Die aus den drei Mischungsformeln für $c = 0$ errechneten Dielektrizitätskonstanten,

ε_S die aus der Silbersteinschen Formel errechnete Dielektrizitätskonstante.

Die Dichte D_v ist gleich dem Verhältnis des Gesamtgewichtes zum Gesamtvolumen, also $D_v = \frac{p_1 + p_2}{v_1 + v_2}$, oder, da $v_1 = \frac{p_1}{D_1}$ und $v_2 = \frac{p_2}{D_2}$ ist, $D_v = \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{D_1} + \frac{p_2}{D_2}}$; die Änderung der Volumeneinheit ergibt sich dann aus D und D_v wie folgt: $c = \frac{D - D_v}{D}$. Die dieser Volumenkontraktion formal analoge „Kontraktion des Refraktionsvermögens" ist nach (7) $\frac{R - R_v}{R}$. Es ergibt sich aus der Formel $R_v = \frac{R_1 \frac{p_1}{D_1} + R_2 \frac{p_2}{D_2}}{\frac{p_1}{D_1} + \frac{p_2}{D_2}}$. Die Pulfrichsche Formel läßt sich nun am besten prüfen, indem die von Hess verlangte Proportionalität (9) $\frac{R - R_v}{R} = q \frac{D - D_v}{D}$ untersucht wird. Sie sagt aus, daß der durch das Mischen hervorgerufenen Änderung des Volumens eine proportional und in demselben Sinne verlaufende Änderung des Refraktionsvermögens entspricht.

Tetrachlorkohlenstoff–Chloroform (Tabelle 10). Diese Mischung ist insofern von Interesse, als die Dielektrizitätskonstanten beider Komponenten stark voneinander abweichen, während der Unterschied der Dichten in normalen Grenzen bleibt. Die schwache Volumendilatation, die auftritt, hat ihr Maximum ungefähr bei dem Mischungsverhältnis 1 : 1. Die Änderung des Refraktionsvermögens $\overset{\text{I}}{R}$ erfolgt zwar in derselben Richtung, wie die des Volumens, jedoch ist sie prozentual so unverhältnismäßig größer, daß durch die Volumenänderung allein das anormale Verhalten der Dielektrizitätskonstante kaum erklärt werden kann. Auch die verlangte Konstanz des Proportionalitätsfaktors q_1 stimmt höchstens der Größenordnung nach; q_1 zeigt vielmehr einen zwar regelmäßigen, doch recht starken Gang mit dem Prozentgehalt der Mischung. Das nach der Clausius-Mossottischen bzw. Lorenz-Lorentzschen Formel für das Refraktionsvermögen ermittelte $\overset{\text{II}}{R} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ ist größer als das errechnete $\overset{\text{II}}{R}_v$, so daß die „Änderung des Refraktionsvermögens“ $\frac{\overset{\text{II}}{R} - \overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$ positiv wird, also in entgegengesetzter Richtung wie die Volumenänderung $\frac{D - D_v}{D}$ erfolgt. Hierdurch wird die Hauptforderung der gleichgerichteten Änderung von $\frac{\overset{\text{II}}{R} - \overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$ und $\frac{D - D_v}{D}$ durchbrochen: q_2 ist negativ. Das errechnete q_3 ist zwar wieder positiv, doch zeigt es hinsichtlich der Größe und Konstanz dieselben Mängel wie q_1.

An Tabelle 11 (Tetrachlorkohlenstoff–Schwefelkohlenstoff) fällt das negative Vorzeichen aller drei Proportionalitätsfaktoren q auf. Einer Volumenkontraktion entspricht für alle drei Mischungsregeln eine mehr oder minder große „Ausdehnung des Refraktionsvermögens“, also eine entgegengesetztgerichtete Änderung, was bei einem Abhängigkeitsverhältnis beider Größen widersinnig wäre. Auch die Konstanz von q ist schlecht. Wieder zeigt sich ein Gang mit dem Prozentgehalt.

Das dritte Gemisch Schwefelkohlenstoff–Benzol ergibt zwar nur positive Werte für q, doch ist auch hier die Konstanz der Faktoren recht mangelhaft.

Das vierte und letzte der untersuchten Gemische, Benzol–Toluol (Tabelle 13), ist ein Beispiel eines Gemenges von zwei sich sehr ähnelnden Stoffen. Sowohl die Dichten wie die Dielektrizitätskonstanten der beiden

Tabelle 10. Tetrachlorkohlenstoff–Chloroform.

Gew.-Proz.	s	D	$\frac{D-D_v}{D}$	$\frac{\overset{\text{I}}{R}-\overset{\text{I}}{R}_v}{\overset{\text{I}}{R}}$	q_1	$\frac{\overset{\text{II}}{R}-\overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$	q_2	$\frac{\overset{\text{III}}{R}-\overset{\text{III}}{R}_v}{\overset{\text{III}}{R}}$	q_3	ε_1	ε_2	ε_3
0	2,190	1,5978	0	0	—	0	—	0	—	2,190	2,190	2,190
20	2,639	1,5710	− 0,0013	− 0,099	+ 76	+ 0,020	− 15,5	− 0,031	+ 23	2,802	2,590	2,700
40	3,157	1,5472	− 0,0023	− 0,104	+ 45	+ 0,031	− 13,5	− 0,028	+ 12	3,382	3,030	3,240
60	3,741	1,5241	− 0,0023	− 0,075	+ 33	+ 0,029	− 12,6	− 0,019	+ 8	3,951	3,592	3,815
80	4,333	1,5030	− 0,0017	− 0,051	+ 29	+ 0,013	− 7,5	− 0,018	+ 10	4,505	4,220	4,425
100	5,042	1,4842	0	0	—	0	—	0	—	5,042	5,042	5,042

Tabelle 11. Tetrachlorkohlenstoff–Schwefelkohlenstoff.

Gew.-Proz.	s	D	$\frac{D-D_v}{D}$	$\frac{\overset{\text{I}}{R}-\overset{\text{I}}{R}_v}{\overset{\text{I}}{R}}$	q_1	$\frac{\overset{\text{II}}{R}-\overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$	q_2	$\frac{\overset{\text{III}}{R}-\overset{\text{III}}{R}_v}{\overset{\text{III}}{R}}$	q_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε_S
0	2,190	1,597	0	0	—	0	—	0	—	2,190	2,190	2,190	2,190
20	2,267	1,5305	+ 0,0035	− 0,014	− 4,1	− 0,0065	− 1,8	− 0,010	− 2,9	2,285	2,280	2,282	2,295
40	2,342	1,4680	+ 0,0059	− 0,022	− 3,8	− 0,0109	− 1,8	− 0,016	− 2,8	2,372	2,363	2,368	2,384
60	2,425	1,4105	+ 0,0079	− 0,018	− 2,6	− 0,0086	− 1,2	− 0,013	− 1,8	2,452	2,441	2,448	2,470
80	2,507	1,3510	+ 0,0059	− 0,012	− 2,0	− 0,0056	− 0,9	− 0,008	− 1,4	2,525	2,520	2,523	2,540
100	2,593	1,2925	0	0	—	0	—	0	—	2,593	2,593	2,593	2,593

Tabelle 12. Schwefelkohlenstoff–Benzol.

Gew.-Proz.	ε	D	$\frac{D-D_v}{D}$	$\frac{\overset{\text{I}}{R}-\overset{\text{I}}{R}_v}{\overset{\text{I}}{R}}$	q_1	$\frac{\overset{\text{II}}{R}-\overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$	q_2	$\frac{\overset{\text{III}}{R}-\overset{\text{III}}{R}_v}{\overset{\text{III}}{R}}$	q_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε_S
0	2,593	1,292	0	0	—	0	—	0	—	2,593	2,593	2,593	2,593
20	2,494	1,172	— 0,0051	— 0,015	+ 2,9	— 0,008	+ 1,6	— 0,008	+ 1,5	2,509	2,505	2,508	2,499
40	2,384	1,077	— 0,0069	— 0,039	+ 5,7	— 0,027	+ 3,9	— 0,031	+ 4,5	2,439	2,432	2,437	2,428
60	2,321	0,998	— 0,0063	— 0,044	+ 7,0	— 0,024	+ 3,8	— 0,035	+ 5,6	2,379	2,373	2,377	2,369
80	2,306	0,932	— 0,0048	— 0,008	+ 1,7	— 0,010	+ 1,9	— 0,013	+ 2,8	2,327	2,322	2,327	2,322
100	2,284	0,876	0	0	—	0	—	0	—	2,284	2,284	2,284	2,284

Tabelle 13. Benzol–Toluol.

Gew.-Proz.	ε	D	$\frac{D-D_v}{D}$	$\frac{\overset{\text{I}}{R}-\overset{\text{I}}{R}_v}{\overset{\text{I}}{R}}$	q_1	$\frac{\overset{\text{II}}{R}-\overset{\text{II}}{R}_v}{\overset{\text{II}}{R}}$	q_2	$\frac{\overset{\text{III}}{R}-\overset{\text{III}}{R}_v}{\overset{\text{III}}{R}}$	q_3	ε_1
0	2,2832	0,8592	0	0	—	0	—	0	—	2,2832
20	2,2760	0,8603	— 0,000 32	— 0,019	+ 58	— 0,013	+ 40	— 0,0052	+ 16	2,3000
40	2,2875	0,8616	— 0,000 35	— 0,023	+ 65	— 0,016	+ 45	— 0,0064	+ 18	2,3169
60	2,3010	0,8630	— 0,000 38	— 0,025	+ 66	— 0,018	+ 47	— 0,0076	+ 20	2,3339
80	2,3233	0,8644	— 0,000 35	— 0,021	+ 58	— 0,015	+ 40	— 0,0059	+ 16	2,3509
100	2,3680	0,8661	0	0	—	0	—	0	—	2,3680

Komponenten sind sehr wenig voneinander verschieden. Die Volumendilatation beträgt maximal nur 0,04 Proz., ist also sehr gering. Das Refraktionsvermögen dagegen weicht wieder stark von dem errechneten nach den kleineren Werten von ε hin ab.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß weder die Silbersteinsche und die mit $\frac{\varepsilon-1}{D}$, $\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{D}$, $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{D}$ aufgestellte Mischungsregel noch die Pulfrichsche unter Berücksichtigung der Volumenänderung aufgestellte Beziehung die tatsächlichen Verhältnisse wiedergeben. Ob Volumenkontraktion oder Dilatation eintritt, fast durchweg sind die gemessenen Werte der Dielektrizitätskonstanten bei den hier vorliegenden Gemischen beträchtlich kleiner als die errechneten.

Ergebnisse.

1. Es wurden die Dielektrizitätskonstanten von Chloroform, Tetrachlorkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff, Toluol, Benzol und der Gemische Tetrachlorkohlenstoff–Schwefelkohlenstoff, Tetrachlorkohlenstoff–Chloroform, Schwefelkohlenstoff–Benzol, Toluol–Benzol untersucht.

2. Für die reinen Stoffe zeigen sich bei verschiedenen Temperaturen die dem optischen Refraktionsvermögen analog gebauten Formeln $\frac{\varepsilon-1}{D}$, $\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{D}$, $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{D}$ nicht konstant, sondern zeigen einen Gang mit der Temperatur.

3. Die von Silberstein für die Dielektrizitätskonstanten von Gemischen aufgestellte Formel gibt die Versuche nicht wieder; allerdings ist diese Formel abgeleitet worden unter der Voraussetzung, daß beim Mischen keine Volumenänderung eintritt.

4. Die von Pulfrich für das optische Refraktionsvermögen von Gemischen aufgestellte Formel, welche die Volumenänderung berücksichtigt, gilt nicht, wenn man entsprechend der Maxwellschen Beziehung n durch $\sqrt{\varepsilon}$ ersetzt.

Zum Schluß spreche ich Herrn Geheimrat Dr. Gerhard Schmidt und Herrn Prof. Rohmann (jetzt in Hannoversch-Münden) für die mir erwiesene Unterstützung und der Direktion der Firma Siemens & Halske (Werner-Werk) für Überlassung von Apparaten meinen herzlichsten Dank aus.

Münster, Physikalisches Institut, Juli 1924.

Über graphische Auswertung von Röntgenphotogrammen*).

Von **E. Schiebold** in Berlin.

Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung, Berlin-Dahlem.

(Vorläufige Mitteilung.)

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 8. August 1924.)

Graphische Methoden sind bei der Deutung von Interferenzerscheinungen beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle mehrfach verwendet worden. Schon bei M. v. Laue [1912][1]) findet sich eine Art graphischer Methode bei der Auswertung des von Laue, Friedrich und Knipping erhaltenen Zinkblendephotogramms. Im Jahre 1913 veröffentlichte P. P. Ewald[2]) seine elegante Kugelkonstruktion der Interferenzmaxima mit Hilfe des reziproken Gitters, die von E. Keller später praktisch erprobt wurde[3]). Nachdem von W. H. und W. L. Bragg[4]) sowie G. Wulff[5]) und Terada[6]) die Interferenz als eine selektive Spiegelung des Primärstrahles an den Netzebenen des Kristalls erkannt war, wurden kristallographische Projektionsmethoden in weitgehendem Maße zur Deutung der Photogramme herangezogen. [Ein Verzeichnis der Literatur siehe E. Schiebold][7]). Bei der Lauemethode benutzten die Braggs[4]), sowie Haga und F. M. Jaeger[8]), eine Art stereographische Projektion, während F. Rinne[9]) und E. Schiebold[10]), später auch R. W. G. Wyckoff[11]), Aminoff[12]) die gnomonische in zahlreichen Beispielen verwendeten. Graphische Konstruktionen mit Hilfe der Zonenkegelschnitte in Diagrammen wurden von Bragg[4]), Glockner[13]), Hadding[14]) verwendet. Die Quenstedtsche Linearprojektion wurde von R. Gross[15]) herangezogen. Graphische Methoden bei der Auswertung von Drehkristallphotogrammen und Schichtlinienphotogrammen sind von E. Schiebold[16]), Polanyi und Weissenberg[17]) angewendet worden. Für das Debye-Scherrer-Verfahren sind geeignete Methoden von H. Seemann[18]), H. Bohlin[19]), O. Pauli[20]), R. Gross[21]), E. Schiebold[10]), A. W. Hull und Davey[22]), A. Hadding[23]), H. Küstner[24]) sowie von P. P. Ewald[25]) angegeben worden.

I. Allgemeines über die Auswertung von Röntgenphotogrammen.

Die Auswertung von Röntgenphotogrammen wie ihre Herstellung erfolgt in verschiedener Hinsicht: 1. Feststellung der Anordnung (Textur) und kristallographischen Orientierung von Kristallen, z. B. in gewalzten Blechen oder gegossenen Metallen; hierzu gehört auch die Feststellung von kristallographisch wichtigen Elementen (Gleitflächen, Schiebungsvektoren usw.) in kristallinen Aggregaten. 2. Bestimmung der Atomanordnung (Struktur) in Kristallen, d. i. Aufstellung der stereochemischen Formel, hierzu gehört die Raumgruppen- und

*) Die Hinweise im Text beziehen sich auf die Literaturzusammenstellung am Schluß der Arbeit.

Symmetriebestimmung. 3. Feststellung des Dispersitätsgrades (Korngröße, Teilchengröße) in den kristallinen Aggregaten, d. i. die Größe der einheitlichen Gitterbezirke. Als Grenzfrage gehört hierzu die Unterscheidung von amorpher und kristalliner Phase. 4. Zahlreiche weitere Probleme physikalisch-chemischer Art (Modifikationsänderungen, Mischkristallbildung, Struktur chemischer Verbindungen, Legierungen, Eutektika usw.).

II. Die Hilfsmittel der graphischen Auswertung.

Als Hilfsmittel bei der graphischen Auswertung dienen die kristallographischen Projektionsmethoden (stereographische, gnomonische und Quenstedtsche Linearprojektion, sowie die Reflexprojektion, die verschiedenen Verfahren der Verwandlung der Projektionsarten ineinander, die Lagenkugel [Weissenberg][17]) und die Polfigur [Wever][41]), sowie das reziproke Gitter und seine Umklappungen in die Ebene, Schablonen, Netze, Nomogramme und Fluchtlinientafeln für besondere Funktionszusammenhänge). Der Verfasser diskutiert die Eigenschaften des Lauediagramms als „Reflexprojektion" und zeigt, wie dasselbe in Verbindung mit einem Reflexnetz zur Goniometrie der Kristalle mit Hilfe von Röntgenstrahlen verwendet werden kann. [Vgl. F. Rinne][9]).

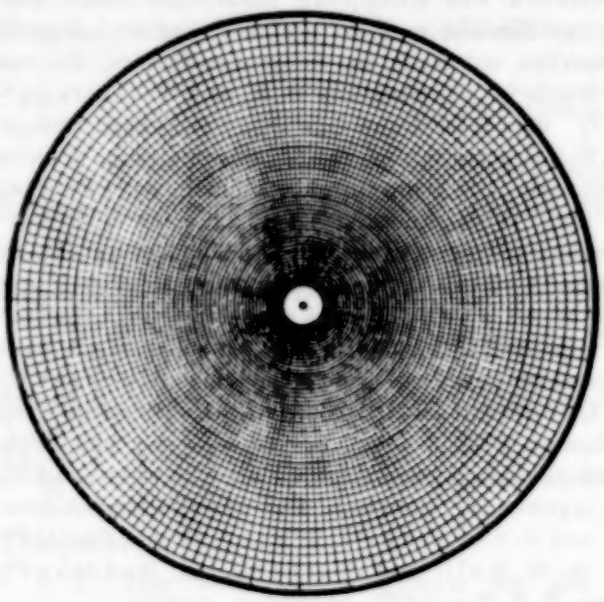


Fig. 1a. Reflexnetz. Achse der Polkugel und Primärstrahlrichtung senkrecht zur Bildebene.

Das Reflexnetz Fig. 1a und 1b stellt die Abbildung der Meridiane und Breitenkreise der Kugel infolge der Reflexion des Primärstrahles an den Netzebenen verkörpert durch ihre Normaleneinstiche auf der Kugel dar. Je nach der Lage der Pole zum Primärstrahl erhält man zwei verschiedene Abbildungen; in 1a stellen sich die Meridiane als Geradenbüschel durch den Nullpunkt, die Breitenkreise als konzentrische Kreise mit Radius $\varrho = R \operatorname{tg} 2\alpha$ dar, in 1b entsprechen den Meridianen Ellipsen, den Breitenkreisen Kurven 4. Ordnung. Im Falle schiefer Lage der Pole zum Primärstrahl verzerren sich die Ellipsen in allgemeine Kegelschnitte und die symmetrischen Kurven 4. Ordnung in unsymmetrische gleichen Grades. [Vgl. Lit. [43]), [48]).] Das Netz 1a wird nach F. Rinne und

E. Schiebold[9]) zur direkten Ablesung von Glanzwinkel und Azimut aus dem Lauediagramm verwendet; das neue Netz 1b leistet für die Reflexprojektion dieselben Dienste wie das Wulffsche Netz[26]) für die stereographische und das Hiltonsche Netz[27]) für die gnomonische Projektion. (Näheres siehe die ausführliche Publikation.) Beim Drehen der Kugel um die Polachse durchlaufen die Laue-reflexe die Kurven 4. Ordnung[28]). (Vgl. Fig. 5 und 6.)

III. Graphische Methode beim Laueverfahren.

Die Übertragung der Reflexprojektion (Lauediagramm) in andere Projektionsarten geschieht auf graphischem Wege (mit Hilfe von Netzen

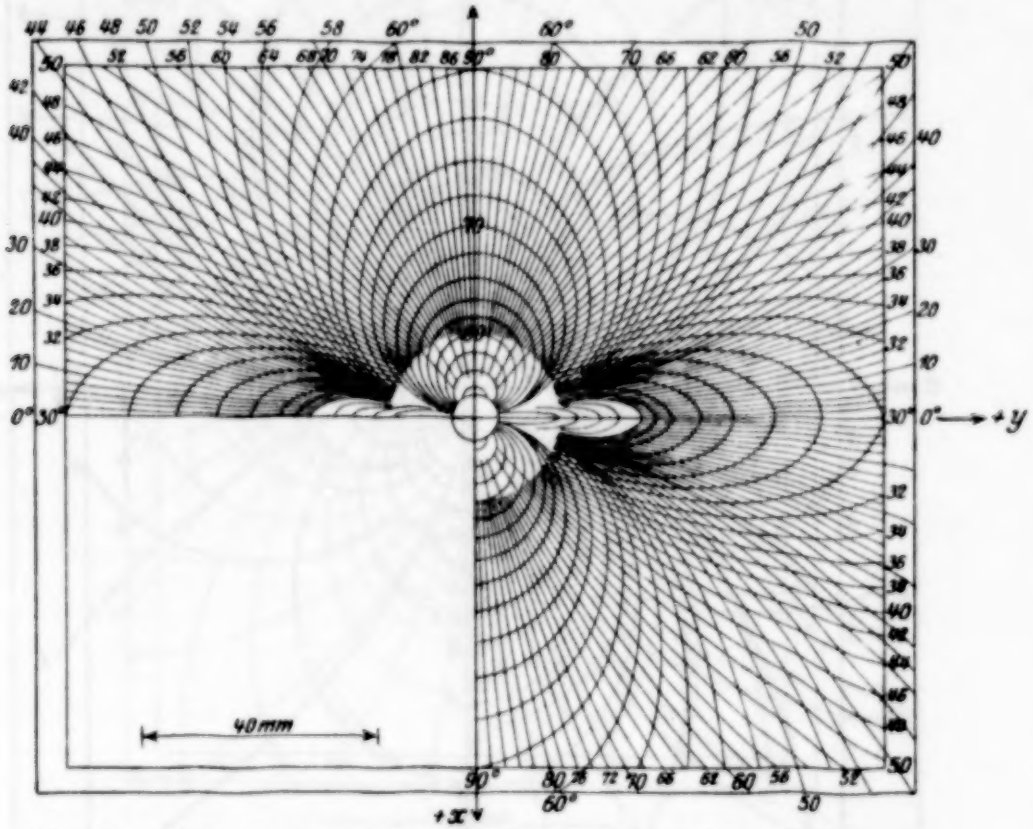


Fig. 1b. Reflexnetz. Achse der Polkugel parallel zur Bildebene, Primärstrahl senkrecht zur Bildebene. Meridiane = Ellipsenschar symmetrisch zur x-Achse, Breitenkreise = Kurven 4. Ordnung symmetrisch zur y-Achse.

und Schablonen, Maßstäben usw.). [Vgl. Lit. [7]), [9]), [25]).] Ein wichtiges Kapitel ist die Indizesbestimmung der reflektierenden Netzebenen. Einfache Fälle sind in der Literatur mehrfach diskutiert worden. [Vgl. Lit. [9]).] Eine allgemeine rechnerische Methode der Auswertung ist zuerst vom Verfasser angegeben worden. [Vgl. Lit. [7]), [10]).] In der vorliegenden Arbeit wird die Aufgabe ganz allgemein für beliebiges Kristallsystem und beliebige Durchstrahlungsrichtung behandelt, sowohl bei bekanntem Kristallsystem und Orientierung zum Primärstrahl, als auch für den Fall der

Unkenntnis dieser Größen*). Zur näheren Erläuterung werden in der Praxis vorkommende Spezialfälle behandelt, mit besonderer Berücksichtigung der bei Metallen und Legierungen häufigen hochsymmetrischen Kristallsysteme. Für bestimmte einfache Durchstrahlungsrichtungen bei

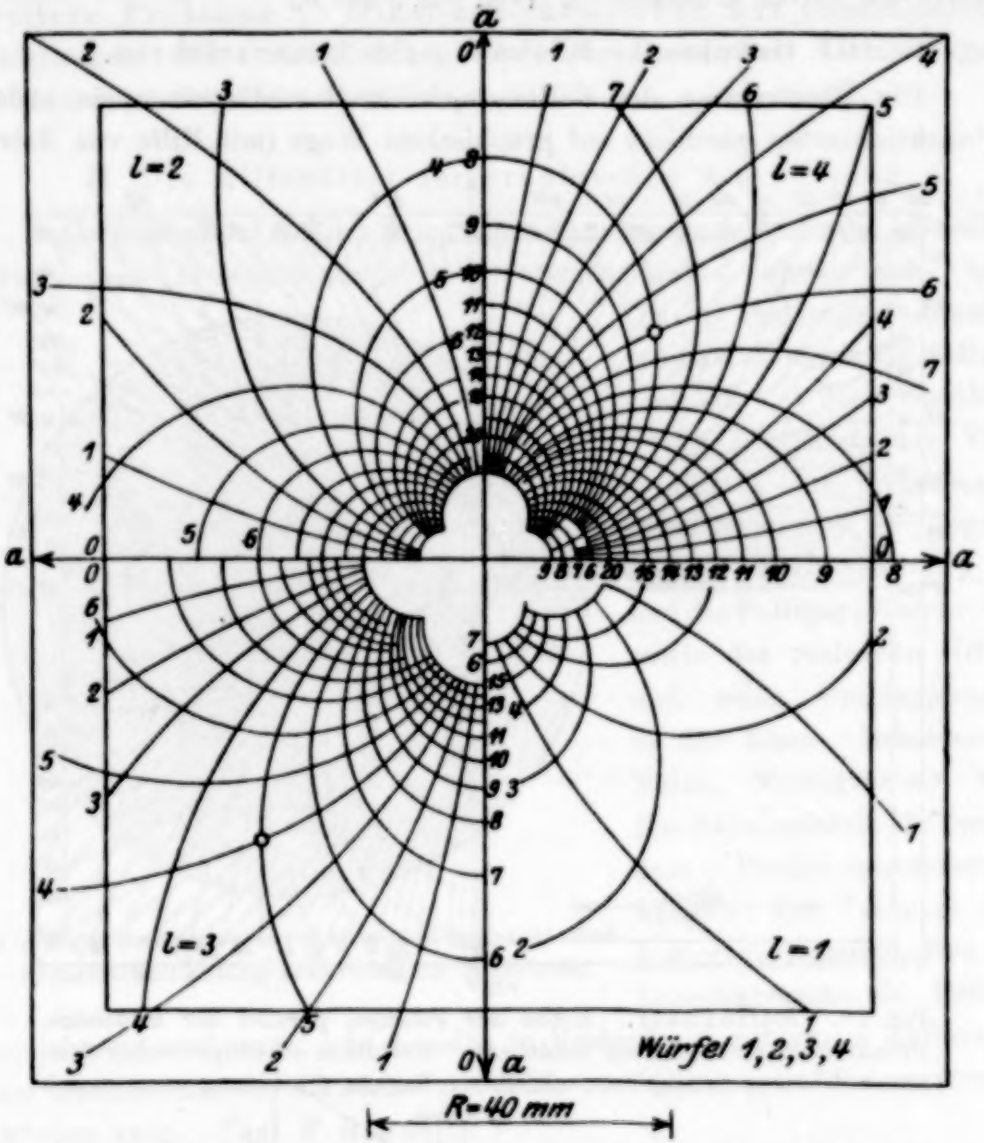


Fig. 2. Schablone zur Indizesbestimmung im kubischen Kristallsystem. Durchstrahlungsrichtung parallel einer Würfelkante. Aufzählungsindex (l) wechselt in den vier Quadranten von 1 bis 4.

kubischen Kristallen werden Schablonen konstruiert, die, mit dem Lauediagramm zur Deckung gebracht, sofort die Indizes ergeben. (Vgl. Fig. 2 u. 3.)

*) Die letztgenannte Aufgabe ist für einen Spezialfall bereits von R. Gross in seiner „erweiterten Lauemethode" und beim Studium der Struktur von Wolframdrähten behandelt worden ([30]).

Fig. 2 stellt die Zonenellipsen bei einer Aufnahme in Richtung einer vierzähligen Achse dar. Der zugehörige Index l ist in den einzelnen Quadranten gleich 1, 2, 3, 4. Die Zahlen an den Ellipsen geben die beiden anderen Indizes h, k an, so daß z. B. die gezeichneten Punkte die Indizes $864 = 432$ und 543 haben. Punkte auf den beiden anderen vierzähligen Achsen haben h bzw. $k = 0$. (Reihenfolge und Vorzeichen beachten!) Fig. 3 zeigt die Zonenellipsen bei Durchstrahlung in Richtung einer zweizähligen Achse. (Schliff parallel Rhombendodekaeder.)

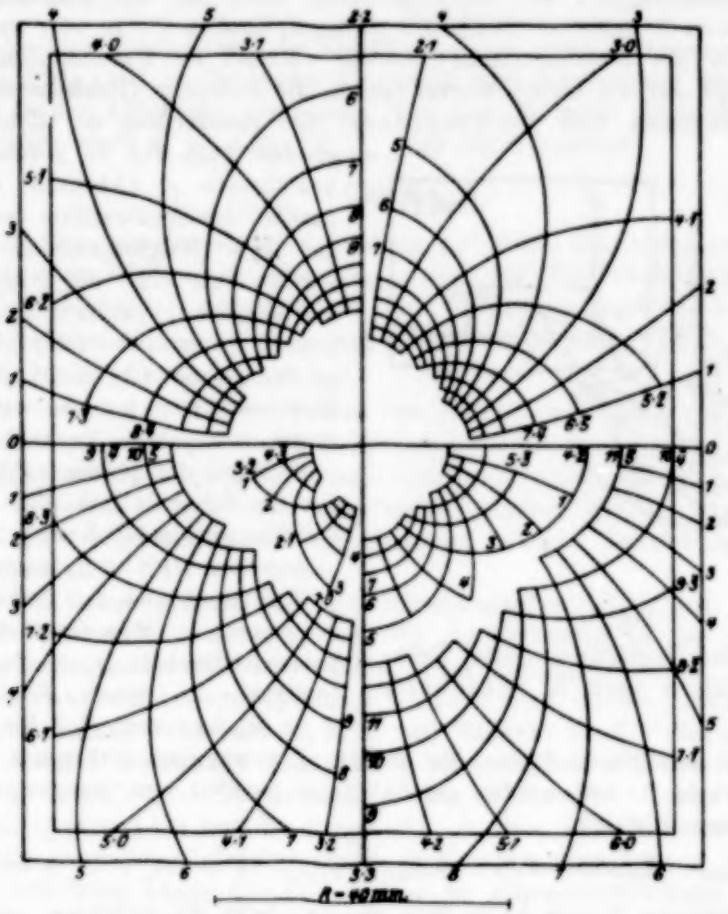


Fig. 3. Schablone zur Indizesbestimmung im kubischen Kristallsystem. Durchstrahlungsrichtung parallel einer Würfeldiagonalen (zweizählige Drehachse). Aufzählungsindex $(h + k)$ wechselt in den vier Quadranten von 1 bis 6.

Zur Raumgruppenbestimmung mit Hilfe der Laue- und Drehkristalldiagramme wird eine neue Konstruktion des Indizesfeldes mit Hilfe des reziproken Gitters und der Ewaldschen Ausbreitungskugel angegeben, die im Gegensatz zu den bisherigen Darstellungen durch physikalische Bedeutung der maßgebenden Größen ausgezeichnet ist. [Vgl. Lit.[25]), S. 254.]

Zur Parameterbestimmung der Atome im Raumgitter werden die bisher angewandten graphischen Verfahren mit Hilfe des Strukturfaktors erläutert.

IV. Graphische Methoden beim Drehkristallverfahren.

Das Drehkristallverfahren nach Schiebold[31]) und M. Polanyi[32]) sowie M. Polanyi und K. Weissenberg[39]), [47]) läßt sich zur Strukturbestimmung bei Einkristallen mit besonderem Vorteil anwenden. Die Methode der Auswertung nach E. Schiebold sei im folgenden kurz angegeben*): Es werden (wenn angängig) Kristallplatten (K) benutzt, die mit einer polierten Fläche an einer Platinschneide anliegen, so daß die Drehachse (z) mit einer kristallographischen Richtung $[uvw]$ zusammenfällt. Das Beugungsmuster wird zur Vereinfachung auf einer senkrecht zum Primärstrahl stehenden photographischen Platte oder auf einem Film aufgefangen; die kontinuierliche Drehung während der Durchstrahlung geschieht in der Regel nur um kleine Winkel (φ) um die Ruhelage (Pendelmethode).

1. Messung der Koordinaten. Zur Auswertung der Schichtliniendiagramme (vgl. Fig. 4) werden die Polarkoordinaten ϱ (Abstand des Schwerpunktes der Spektrallinie vom Nullpunkt) und $\measuredangle\, \varepsilon$ (Neigungswinkel des Radiusvektors zum Zuge des Hauptspektrums) ausgemessen. Aus 1. $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \varrho / R$ und 2. $\sin\vartheta = \sin\varepsilon \cos\alpha$ folgt „Glanzwinkel" (α) und „Höhe" (ϑ) (= Winkel der Netzebenennormalen mit der zur Horizontalebene senkrechten Drehachse, wobei R = Abstand der photographischen Platte von der Schneide ist). Zur Lösung von Gleichung (1) und (2) werden Nomogramme angegeben. (ON = Netzebenennormale.)

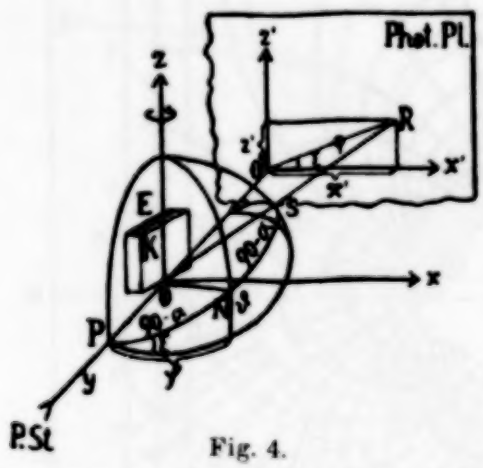


Fig. 4.
Geometrische Verhältnisse beim Drehkristallverfahren nach E. Schiebold.

2. Projektion des Schichtliniendiagramms. Man trägt an Stelle der Polarkoordinaten: $\varrho = R\,\mathrm{tg}\, 2\alpha$ und ε (Azimut) die neuen Polarkoordinaten $\varrho' = R_0 \sin\alpha$ und $\measuredangle\, \vartheta$ für jeden Interferenzpunkt auf. (R_0 = Radius der Abbildung, gewöhnlich 1000 mm.) Die Schichtlinienhyperbeln (1. Art) werden gerade Linien parallel zum Hauptspektralzug mit dem kleinsten Abstand

$$z_0 (= R_0 \sin\alpha \sin\vartheta) = \lambda R_0 s / 2 T_{uvw}; \quad s = hu + kv + lw,$$

die „Schichtlinien 2. Art" (s. S. 363) werden, falls sie auftreten, gerade Linien senkrecht oder flache Hyperbeln schräg zum Hauptspektralzug.

3. Kantenlängen und Winkel des Elementarkörpers. Die Bestimmung geschieht 1. direkt und 2. auf dem Umwege über das reziproke Gitter. Als Kantenlängen und Winkel desselben nimmt der Verfasser die Koeffizienten der quadratischen Form:

$$R_0^2 \sin^2\alpha = R_0^2 (K_{11} h^2 + K_{22} K^2 + K_{33} l^2 + 2 K_{12} hk + 2 K_{23} kl + 2 K_{31} lh),$$

Kanten $a' b' c'$ und Winkel $\alpha' \beta' \gamma'$, also:

$$\left.\begin{array}{rl} & a' = R_0 \sqrt{K_{11}}, \quad b' = R_0 \sqrt{K_{22}}, \quad c' = R_0 \sqrt{K_{33}}; \\ \alpha', \beta', \gamma' \text{ aus } & \cos\alpha' = K_{23} R_0^2 / b' c', \quad \cos\beta' = K_{31} R_0^2 / c' a', \\ & \cos\gamma' = K_{12} R_0^2 / a' b' \end{array}\right\} \quad (4)$$

*) Über die Entwicklung des Drehkristallverfahrens vgl. Lit. [49]).

Der Zusammenhang mit den Kanten a, b, c und Winkeln α, β, γ des Raumgitters ist durch die Gleichungen vermittelt:

$$a' = \frac{1}{a}\frac{\sin\alpha}{\sin\Delta}, \quad b' = \frac{1}{b}\frac{\sin\beta}{\sin\Delta}, \quad c' = \frac{1}{c}\frac{\sin\gamma}{\sin\Delta}, \tag{5}$$

wobei $\sin^2\Delta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

also $\alpha' = 180 - A$, $\beta' = 180 - B$, $\gamma' = 180 - C$; A, B, C die Winkel der Achsenebenen bc, ca, ab, z. B. $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$. [Vgl. Lit. [33]), [34]), [35]).]

a) Zur direkten Bestimmung der Identitätsperiode einer Gittergeraden wird diese (wie bei Polanyi) als Drehachse eingestellt und der Abstand der Schichtliniengeraden in der Abbildung vermessen. Aus dem kleinsten Abstand für jede Schichtlinie (Mittelwert) $z_0 = \lambda R_0/2\,T_{uvw}$ folgt der Parameter

$$T_{uvw} = \lambda R_0/2 z_0.$$

b) Die Bestimmung der Identitätsperioden mit Hilfe des reziproken Gitters durch Messung der Glanzwinkel α_{100}, α_{010}, α_{001} der Fundamentflächen (100), (010), (001) des Raumgitters (Atomgitters). Die Ordnungszahl ist durch die Lage zu den Nebenspektren festgelegt. Es ergibt sich $\sqrt{K_{11}} = \sin\alpha_{100}$, $\sqrt{K_{22}} = \sin\alpha_{010}$, $\sqrt{K_{33}} = \sin\alpha_{001}$ und hieraus a, b, c.

c) Die Bestimmung der Achsenwinkel des reziproken Gitters geschieht mit Hilfe der quadratischen Form. Durch Einsetzen der Werte von $\sqrt{K_{11}}$, $\sqrt{K_{22}}$, $\sqrt{K_{33}}$ bleiben im allgemeinsten Falle (triklin) nur noch drei Unbekannte K_{12}, K_{23}, K_{31}, welche nach einer im Debye-Scherrer-Verfahren üblichen Methode aus den gemessenen Werten der quadratischen Form bestimmt werden. Daraus ergeben sich die Achsenwinkel nach (4).

d) Es wird ferner gezeigt, wie die Achsenwinkel α', β', γ' mit Hilfe der Winkel der Schichtlinien 2. Art [vgl. Lit. [31])] zur Drehachse in der Abbildung der Schichtliniendiagramme bestimmt werden. (Vgl. Anhang, S. 364.)

4. Konstruktion des reziproken Gitters und seine Umklappung. Aus den gemessenen Kantenlängen a', b', c' und Winkeln α', β', γ' des reziproken Gitters wird dasselbe konstruiert. Die Punkte des reziproken Gitters haben die Koordinaten $x = ha'$, $y = kb'$, $z = lc'$. Der Radiusvektor vom Nullpunkt nach dem Gitterpunkt $(h\,k\,l)$ hat die Länge $\varrho' = R_0\sin\alpha$, so daß die Glanzwinkel mit Hilfe eines passenden Maßstabes direkt abgelesen werden können. (Zur Konstruktion der absoluten Länge des Fahrstrahles im allgemeinsten Falle wird ein Verfahren angegeben.) Dann wird das reziproke Gitter um die in Rede stehende Drehachse in eine Ebene parallel zur Ebene des Kristallschliffes bzw. in eine andere durch die Drehachse gelegte Ebene zusammengeklappt (Indizesfeld) [vgl. Lit. [31])]. Hierbei bleiben die absoluten Längen der Radienvektoren ungeändert.

5. Vergleich des Interferenzmusters mit dem Indizesfeld. Das Abbild des Schichtliniendiagramms (Koordinaten: $\varrho' = R_0\sin\alpha$, ϑ) ist mit der Umklappung des reziproken Gitters (Indizesfeld) identisch. Die Projektionspunkte des gegebenen Interferenzmusters müssen somit mit den Punkten des Indizesfeldes zur Deckung kommen, wenn Glanzwinkel (α) und Höhe (ϑ) die gleichen sind.

6. Indizesbestimmung. Die Indizes der Spektren lassen sich, wenn beide Netze zur Deckung gelangt sind, aus dem Indizesfeld direkt ablesen. (Die Indizes lassen sich natürlich auch direkt aus der quadratischen Form Q bestimmen, wobei zu berücksichtigen ist, daß der auf die Schichtlinie ϱ bezügliche Index konstant ist.) [Vgl. [39]).]

7. Eindeutigkeit der Indizes. Die Indizes sind im allgemeinen eindeutig bestimmt. Fallen bei der Umklappung des reziproken Gitters in die Ebene (Indizesfeld) mehrere nicht identische Punkte aufeinander oder so dicht nebeneinander, daß die Abweichung innerhalb der Fehlergrenzen liegt, so ist die Entscheidung mit Hilfe der Ausbreitungskugel zu treffen. Durch Konstruktion ihrer Schnitte mit dem reziproken Gitter (Höhenlinien) kann entschieden werden, ob eine Netzebene im Reflexionsbereich liegt. Der Verfasser zeigt, wie sich durch Pendeln um die Ruhelage stets eindeutige Indizes aussondern lassen. Eine völlig zwangsweise Bestimmung der Indizes geschieht durch experimentelle Messung von φ. (Drehwinkel (φ), d. i. der Winkel des durch Drehachse und Netzebenennormale gelegten Meridians mit dem Nullmeridian.) Hierzu benutzt der Verfasser einen keilförmigen Spalt vor dem Kristall, so daß bei verschiedenen Einfallswinkeln verschieden breite Primärstrahlbündel zur Reflexion kommen; die nicht gleichzeitig entstandenen Spektrallinien haben verschiedene Länge, die eine Funktion des Einfallswinkels ist. Auch Vorbeiführen eines quergespannten stark absor-

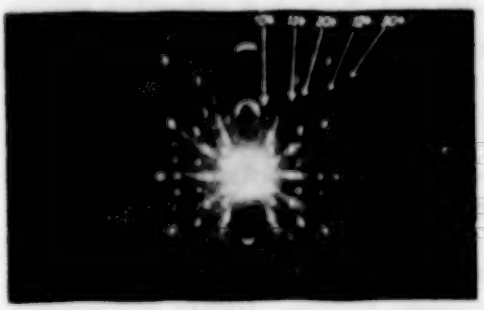


Fig. 5. Drehkristalldiagramm von Aluminiumnitrid um die hexagonale Achse nach K. Ott. (Molybdän-K-Strahlung.) Schichtlinien 1. und 2. Art, Kurven 4. Ordnung gut sichtbar.

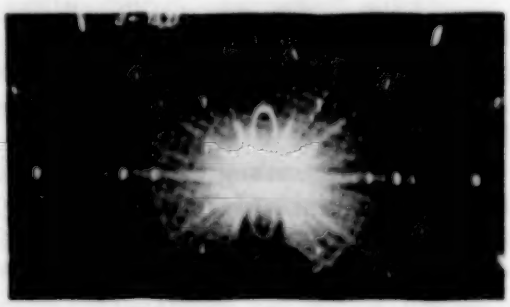


Fig. 6. Drehkristalldiagramm von Aluminiumnitrid um die hexagonale Achse nach H. Ott. (Kupfer-K-Strahlung.) Schichtlinien 2. und 1. Art, Kurven 4. Ordnung, Debye-Scherrer-Kreise gut sichtbar.

bierenden Pt-Drahtes vor der photographischen Platte mit gleichförmiger Geschwindigkeit proportional zur Drehung des Kristalls, kann zur Ermittlung von φ benutzt werden*) **).

8. Bestimmung der Raumgruppe. Diese geschieht nach den Nigglischen Kriterien[34]). Durch das „Pendeln" werden bei geeigneter Wahl der Drehachsen die Flächen parallel einer Achse, welche für die Raumgruppenbestimmung besonders wichtig sind, ausgesiebt, so daß ein Zusammenfallen oder Verwechseln mit Flächen allgemeinster Lage, welche zufällig an der gleichen Stelle liegen, ausgeschlossen ist. Diese Spektren ordnen sich auf vertikalen bzw. schrägen Kurven (4. Ordnung) (Schichtlinien 2. Art) ein. (Vgl. Anhang.)

---

*) Über eine neue experimentelle Anordnung zur Indizesbestimmung vgl. K. Weissenberg[47]).

**) Über eine neue Apparatur des Verfassers mit Relativdrehung zweier photographischen Platten gegeneinander wird in der ausführlichen Publikation berichtet werden.

Schichtlinien 1. und 2. Art.

Außer den Schichtlinien 1. Art*) (Kurven, aus welchen der auf die Drehachse bezügliche Index konstant ist) treten in den Drehkristallphotogrammen in bestimmten Fällen senkrecht oder schräg dazu verlaufende Kurven „Schichtlinien 2. Art" auf. Fig. 5 und 6 stellen Diagramme von Aluminiumnitrid nach H. Ott[46]) dar. Sie zeigen Schichtlinien 1. (horizontal) und 2. Art (vertikal), außerdem Debye-Scherrer-Kreise und die Kurven 4. Ordnung von S. 357, welche die gleichen sind wie in der Tabelle im Falle II, B a). In Fig. 5 treten die Schichtlinien 2. Art mehr hervor als die 1. Art, in Fig. 6 sind beide gleich vertreten. Ihre geometrische Erklärung ist mit Hilfe des reziproken Gitters nach Ewald leicht verständlich: Es falle monochromatische Primärstrahlung senkrecht zur Drehachse auf den Kristall, so daß der Mittelpunkt M der Ausbreitungskugel in der horizontalen Äquatorebene des reziproken Gitters liegt. Während die Schichtlinien 1. Art den Ebenen des reziproken Gitters senkrecht zur Drehachse entsprechen, werden die Schichtlinien 2. Art durch die Rotation von Geraden des reziproken Gitters um die Drehachse erzeugt. Bei der Rotation entstehen je nach der Lage der Gittergeraden Zylinder, Kegel oder Rotationshyperboloide, die verschiedenen Fälle sind in der nachstehenden Tabelle verzeichnet.

Element d. reziproken Gitters	Rotationsfläche	Schnittkurve mit Ausbreitungskugel	Zentralprojektion d. Schnittkurve von M auf die photographische Platte	Schnittkurve mit Meridianebene	Indizesbedingungen
I. Netzebene senkrecht z. D. A.	Ebene	Kreis	Hyperbel Schichtlinie 1. Art	Gerad. senkr. z. D. A.	$hu+kv+lw=$konst
II. Gittergerade					
A. parall. z. D. A.	Zylinder	C_4	C_4 mit 2 Sym. Eb. (Schichtl. 2. Art)	Gerad. parall. z. D. A.	s. u.
B. schräg z. D. A.					
a) schneid. D. A. in O bzw. außerh. O	Kegel	C_4	C_4 durch O m. 2 Sym. Eb. bzw. C_4 mit 1 Sym. Eb.	Gerade durch O bzw. durch D. A.	s. u.
b) schneid. D. A. nicht	Rotationshyperboloid	C_4	C_4 mit 1 Sym. Eb.	Hyperbel	$h=ml+n$ $k=pl+q$

C_4 = Kurve 4. Ordnung, D. A. = Drehachse, Sym. Eb. = Symmetrieebene, O = Nullpunkt, (hkl) = Netzebenenindizes, $[uvw]$ = Indizes der Drehachse.

Die Schnittkurven mit der Ausbreitungskugel sind die geometrischen Örter, deren Verbindungslinien mit M (Ausbreitungszentrum) mögliche Interferenzstrahlen darstellen. Ihre Durchstichpunkte mit der photographischen Platte senkrecht zum Primärstrahl liegen auf Kurven 4. Ordnung (C_4). In Wirklichkeit sind die Gittergeraden nicht kontinuierlich belegt, sondern Punktreihen, so daß nur diejenigen Interferenzrichtungen physikalisch realisierbar sind, die nach Schnittpunkten der Punktreihen mit der Ausbreitungskugel hinweisen**). Die vorher kontinuierlichen

*) Nach Polanyi und Weissenberg einfach als „Schichtlinien" bezeichnet. [Lit. [32]).]

**) M. a. W., daß von allen Stellen der Schnittkurven mit der Ausbreitungskugel nur diejenigen physikalische Bedeutung haben, die gleichzeitig auf den Schichtebenen des reziproken Gitters parallel zum Äquator liegen. Das Interferenzmuster des Drehkristallphotogramms besteht dann aus den Schnittpunkten

C_4 teilen sich in scharfe Spektren auf. Wieweit die eine oder andere Art der Schichtlinien im Photogramm besonders hervortritt, hängt von den geometrischen Umständen ab. (Näheres siehe die ausführliche Arbeit.) Im Indizesfeld (Umklappung des reziproken Gitters in eine beliebige Meridianebene durch die Drehachse) werden die Schichtlinien 1. Art zu Geraden, senkrecht zur Drehachse, die Schichtlinien 2. Art zu Geraden oder Hyperbeln senkrecht oder schräg zu den erstgenannten. (Vgl. Tabelle.) Die Gesamtheit einer parallelen Schar von Gittergeraden im reziproken Gitter bildet eine Schar von Schichtlinien 2. Art. Bei paralleler Lage zur Drehachse sind die Schichtlinien 2. Art im Indizesfeld Gerade, deren Abstände vom Nullpunkt gleich den Sinus der Glanzwinkel der Netzebenen in der Zone der Drehachse sind. (Vgl. S. 361.)

Bei nicht paralleler Lage zur Drehachse entsteht eine Hyperbelschar, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen, und deren Asymptoten konstante Winkel mit der Drehachse bilden. Der Winkel der Tangente im Schnittpunkt einer Hyperbel mit der Äquatorebene nähert sich dem wahren Asymptotenwinkel um so mehr, je weniger die Erzeugende aus dem Meridian herausneigt, was bei der praktischen Analyse der Drehspektrogramme von Wichtigkeit ist. Ebenso ist von Bedeutung, daß bei geringem Hin- und Herpendeln des Kristalls um die Drehachse von dem System der Schichtlinien zweiter Art nur diejenigen auftreten, die in günstiger Orientierung zur Ausbreitungskugel liegen, d. h. auf oder in der Nähe der durch die Drehachse gelegten Tangentialebene der Ausbreitungskugel. [Vgl. Lit. [31]).]

Ist die Richtung der Erzeugenden durch die Koordinaten eines Punktes $P_0(h_0\,k_0\,l_0)$ der durch den Nullpunkt gehenden Parallelen und den Einstichpunkt $P_1(h_1\,k_1\,l_1)$ in die Äquatorebene gegeben, so gilt als allgemeine Indizesbedingung für die Schichtlinien zweiter Art: $h = m\,l + n$, $k = p\,l + q$, wobei $m = h_0/l_0$, $p = k_0/l_0$, $n = h_1 l_0 - h_0 l_1/l_0$, $q = k_1 l_0 - k_0 l_1/l_0$ ist. Im Gegensatz zu den Schichtlinien erster Art bestehen somit zwei Indizesbedingungen. Durch Veränderungen der Parameter m, n, p, q, erhält man sämtliche möglichen Schichtliniensysteme zweiter Art. Die Bedingungen, daß im Indizesfeld zur Drehachse parallele Gerade (Fall II, Ba) oder schräge Gerade (Fall II, Bb) auftreten, drücken sich im ersten Fall aus in der Form: $m = A/B$, $p = C/B$, wobei

$$A = \frac{a}{c}u + \frac{b}{c}v\cos\gamma + w\cos\beta, \quad B = \frac{c}{a}w + u\cos\beta + v\,\frac{b}{a}\cos\alpha,$$

$$C = \frac{b}{a}v + \frac{c}{a}w\cos\alpha + u\cos\gamma, \quad D = \frac{c}{b}u + v\cos\gamma + \frac{c}{b}w\cos\beta$$

durch $p - q/n = (C/D - p)(B/A - 1/m)$ im zweiten Fall. Es müssen somit in diesen Spezialfällen bestimmte geometrische Rationalitätsverhältnisse zwischen den Kanten a, b, c und Winkeln α, β, γ des Raumgitters und den Koordinaten der Drehachse $[u\,v\,w]$ bestehen, d. h. die rechts stehenden Ausdrücke in den Formeln müssen rational sein*).

V. Graphische Methoden bei dem Debye-Scherrer-Verfahren.

Graphische Methoden werden hier verwendet: 1. bei der Anbringung der Korrekturen am gemessenen Glanzwinkel infolge Stäbchendicke,

der C_4 (Schichtlinien 2. Art) mit den Hyperbeln (Schichtlinien 1. Art) und läßt sich oberflächlich mit einem Kreuzgitterspektrum vergleichen.

*) Die Ableitung der Schichtlinien zweiter Art mit Hilfe des reziproken Gitters ist für einen Spezialfall (Fall II A) bereits von P. P. Ewald [Lit. [25])] angegeben worden.

Divergenz und Exzentrizität von Film und Präparat. [Vgl. Lit.[37]) u.[20]) bis[23]).] Verfasser gibt eine Anzahl graphischer Korrekturen in Abhängigkeit vom Glanzwinkel; 2. bei der Bestimmung der quadratischen Form und der Indizes. Für das kubische System sind zuerst Nomogramme von Pauli[20]), Schiebold[16]) und Gross[21]) angegeben worden, für die optisch einachsigen Kristallsysteme (hexagonal, tetragonal, trigonal, rhomboedrisch) von Hull und Davey[22]). Fig. 7 zeigt für das kubische System ein Nomogramm, das sich durch leichte Trennung der Gittertypen, sofortige Indizesablesung und Bestimmung der Gitterkonstanten auszeichnet*).

Trägt man dann die log sin α der gemessenen Glanzwinkel im selben Maßstab (linke Teilung) auf einen Papierstreifen auf, so müssen bei kubischer Struktur alle Linien des Films mit den Linien auf einer der vier Skalen zusammenfallen [innerhalb der Fehlergrenzen]**). Der Nullpunkt der Skale auf dem Papierstreifen gibt auf der oberen Skale sofort den log a oder auf der Hilfsskale den a-Wert an. Das Nomogramm ist für Cu-K-Strahlung konstruiert. Auch für die übrigen oben genannten Kristallsysteme hat der Verfasser Nomogramme in etwas abweichender Form gezeichnet, die sich von den Hullschen insbesondere durch die Verwendbarkeit in möglichst weiten Variabelnbezirken unterscheiden. Ihre Wiedergabe soll in der ausführlichen Arbeit erfolgen.

Bei der weiteren Strukturuntersuchung bedient man sich zweckmäßig des reziproken Gitters unter Berücksichtigung des in IV Gesagten.

VI. Graphische Verfahren bei der Bestimmung von Kristallanordnungen.

a) Einkristalle. Handelt es sich darum, die Orientierung von Einkristallen in bezug auf eine ausgezeichnete Richtung oder Fläche festzulegen (z. B. bei Rekristallisationserscheinungen), so dient bei gewisser Größe der Kristalle (etwa $^1/_{10}$ mm) hierzu die Lauemethode oder die Drehkristallmethode, wobei das „Röntgengoniometer" von K. Weissenberg[47]) sehr brauchbar erscheint. Bei Anwendung des Laueverfahrens

*) Aus der Braggschen Formel $\sin\alpha = \lambda/2 : d$, $d = a\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$, also $\sin\alpha = \lambda/2\, a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ folgt $\log\sin\alpha = \log\lambda/2 - \log a + \log\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$. Es wurde $\log\lambda/2 + \log\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ für alle Indizes für die $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} < 50$ auf einer Achse abgetragen und die Indizes angeschrieben, sowohl für $\lambda_{K\alpha}$ wie $\lambda_{K\beta}$.

**) Ein Fehler von 10′ des Glanzwinkels α entspricht einem Ablesungsfehler der Teilung von 1,3 mm bei 10°, 0,5 mm bei 25°, 0,2 mm bei 50°, was bei dem Aufeinanderlegen zu beachten ist.

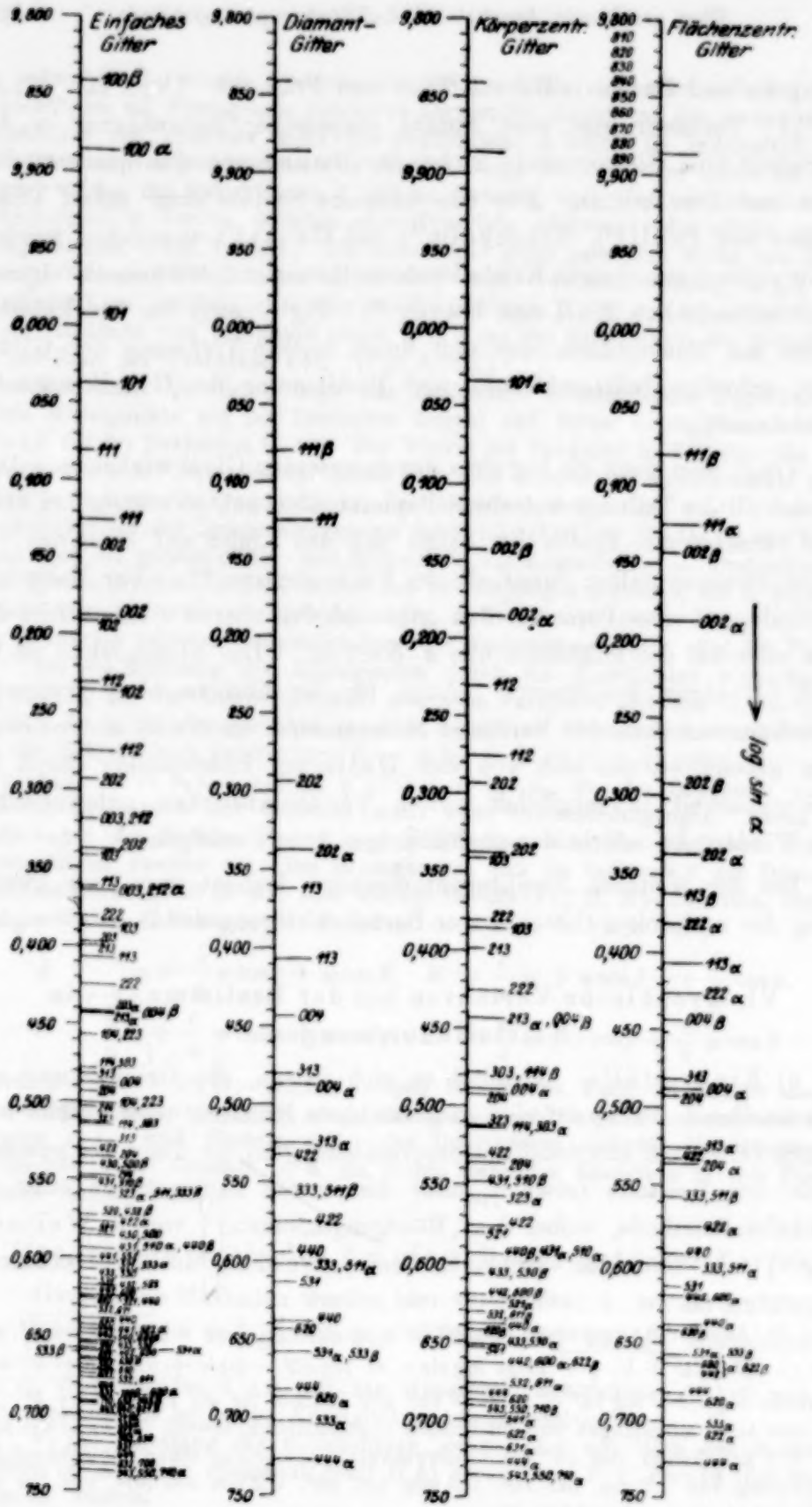


Fig. 7. Nomogramm zur Auswertung von Debye-Scherrer-Aufnahmen kubischer Kristalle mit Kupfer-K-Strahlung. Linke Skalenseite aufgetragene Werte von $\log \sin \alpha$, rechte Skalenseite $\log \lambda/2 \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ mit Indizes bezüglich α- und β-Strahlung.

geschieht die graphische Auswertung nach den Erörterungen im 3. Kapitel. Die „Zonenmethode" ist hierbei besonders gut brauchbar, wo keinerlei Anhaltspunkte für die Orientierung des Primärstrahls zu den Kristallachsen vorhanden sind. Man konstruiert mit Hilfe des Winkelpunktes die wahre Zonenachsenverteilung in zwei besonders auffällig markierten Netzebenen und vergleicht sie mit der Zonenverteilung, die aus den Elementen des Kristalls für die einfachsten Flächen bestimmt wurde. Dann ergeben sich sowohl die Zonenindizes im Photogramm, die Indizes der ausgezeichneten Netzebenen und die übrigen Netzebenen aus den bekannten Zonensymbolen, damit ist das Diagramm orientiert. (Näheres siehe die ausführliche Publikation.) Besonders einfach sind die Verhältnisse beim kubischen Kristallsystem, wie es die meisten Metalle und Legierungen aufweisen. Dann läßt sich die Zonenverteilung in den wichtigsten Ebenen für die verschiedenen Gittertypen von vornherein zeichnen, und der Vergleich mit der aus dem Photogramm ermittelten Verteilung an Hand diesbezüglicher Schablonen sofort ausführen, wobei sich auch der Gittertyp durch das Auftreten charakteristischer Zonen und Ebenen kennzeichnet *).

Auch mit der Drehmethode kann die Orientierung von Einzelkristallen festgestellt werden, indem man durch Messung des Glanzwinkels einer genügenden Zahl kristallographischer Flächen die quadratische Form berechnet und die Indizes bestimmt (beim kubischen System genügt schon eine einzige Messung) [Lit. [38])], oder indem man um eine kristallographische Richtung dreht und das Schichtliniendiagramm auswertet. [Vgl. Lit. [39]).]

b) Polykristalline Stoffe (kristalline Aggregate). Die Orientierung der Kristalle in kristallinen Aggregaten ist bei genügend hohem Dispersitätsgrad mit Hilfe der Debye-Scherrer-Methode feststellbar. Allgemein ist diese Aufgabe von K. Weissenberg [40]) behandelt worden. Bei vollständig regelloser Verteilung (isotrope bzw. pseudoisotrope Anordnung) der Kriställchen entstehen gleichmäßig dichtbelegte Debye-Scherrer-Kreise. Jede anisotrope Anordnung der Kriställchen ist bei geeigneter Durchstrahlungsrichtung von einer Diskontinuität der Debye-Scherrer-Kreise begleitet. So liefern axiale Anordnungen (einachsige Anisotropie) die bekannten Faserdiagramme. Bei Auswertung solcher Diagramme wird nach dem Vorgange von Polanyi und Weissenberg [40]) mit Vorteil die Lagenkugel benutzt, die in der Verteilung der Punkte ihrer Oberfläche

*) Wiedergabe erfolgt in der ausführlichen Arbeit.

ein anschauliches Bild der Lage der Netzebenen gibt. Noch besser ist die Konstruktion der Polfigur und deren stereographische Projektion, in der Weise, wie in der Kristallographie die Messungen von Lichtfiguren am zweikreisigen Goniometer verwertet werden, um über die Gestalt von Lösungskörpern und dergleichen Aufschluß zu bekommen. Diese Auswertungsmethode ist von F. Wever erstmalig in der Röntgenographie verwendet worden[41]). Änderung der ursprünglichen Verteilung z. B. durch mechanische Beanspruchung eines Stoffes ist auf diese Weise im Debye-Scherrer-Diagramm sichtbar und deutbar. Ist der Dispersitätsgrad des Stoffes nicht fein genug, um auch in ungestörtem Zustand eine gleichmäßig kontinuierliche Schwärzungsverteilung der Debye-Scherrer-Kreise zu ergeben, so wendet man die Lauemethode an. Die Diagramme sind als Überlagerungen von Lauediagrammen zu deuten, die von jedem einzelnen getroffenen Korn erzeugt sind. Vermittelst der gnomonischen Projektion werden die „Einzeldiagramme" getrennt und die Orientierung der Körner nach VI, a) bestimmt. Es ist dann nicht nur die Gesamtdeformation des Kristallkonglomerats als Summe der Deformationen der Einzelkörner bestimmbar, sondern da sich die Laueреflexe bei der Verlagerung in gesetzmäßiger Weise ändern und in ähnlicher Weise wie beim Einzelkristall vermessen werden können, auch die Verformung und Umorientierung jedes Einzelkristalls über die Aussagen der Debye-Scherrer-Methode hinaus.

c) Feststellung von kristallographischen Richtungen (Gleitflächen, Gleitrichtungen, Zwillingsebenen usw.) in Einzelkristallen. Verfahren mit Hilfe der Drehkristallmethode sind zuerst von Polanyi, Weissenberg und Mark sowie von Schiebold angegeben und benutzt worden[42]), z. B. um die Lage der Gleitflächen in einem deformierten Einkristalldraht festzustellen. Die Lösung der Aufgabe wird mit Hilfe des Röntgengoniometers[47]) sehr erleichtert. Auch die Lauemethode kann benutzt werden[48]), während die Reflexe der übrigen Netzebenen zu Spektralbändern verzerrt werden (Radialdiagramme), werden die der Gleitflächen relativ wenig geändert. Die Größe der Verschiebung läßt sich mit Hilfe des Reflexnetzes messen und zur quantitativen Erklärung der Deformation benutzen. [Vgl. Joffé[44]), Gross[48]).] In der ausführlichen Publikation wird das Verfahren näher erörtert werden. — Die Gleitrichtungen sowie die „Biegungsachsen" in Einkristallen werden ebenfalls mit der Drehkristallmethode festgestellt. Auch die Lauemethode läßt sich verwenden.

In polykristallinem Material werden die Gleitebenen und Gleitrichtungen mit Hilfe der Debye-Scherrer-Methode durch Auswertung des

„Schichtliniendiagramms" festgestellt, in das die Debye-Scherrer-Ringe übergehen[45]). Umständlicher ist die Auswertung nach der Lauemethode (vgl. oben), da im Endeffekt noch Streifen an Stelle der Punkte des Schichtliniendiagramms auftreten. Aus der Richtung dieser Streifen läßt sich aber die Richtung der Biegungsachse und die Gleitrichtung feststellen.

Die eingehende Erläuterung der Methoden an Hand von Beispielen wird in einer ausführlichen Publikation erfolgen.

Literatur.

[1]) M. v. Laue, Sitzungsber. d. Bayr. Ak. d. Wiss., Math.-phys. Klasse 1912, S. 363—373.

[2]) P. P. Ewald, Phys. ZS. **14**, 465, 1913.

[3]) E. Keller, Ann. d. Phys. **46**, 157, 1915.

[4]) W. H. u. W. L. Bragg, Cambr. Soc. Nov. 1912; X-Rays and Crystal structure, London 1915; Proc. Roy. Soc. (A) **88**, 428, 1913.

[5]) G. Wulff, ZS. f. Krist. **52**, 65—67, 1913; Phys. ZS. **14**, 217, 1913.

[6]) T. Terada, Proc. Tokyo Math.-phys. Soc. **7**, 60—70, 1923.

[7]) E. Schiebold, Die Naturwissenschaften **10**, 399—411, 1922.

[8]) Haga u. F. M. Jaeger, Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam 1915, S. 460—473, 559.

[9]) F. Rinne, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Kl. **67**, 1915; **68**, 1916.

[10]) E. Schiebold, Abh. d. Sächs. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Kl. **36**, 1919.

[11]) R. W. G. Wyckoff, Amer. Journ. of Sc. (4) **50**, 317—360, 1920.

[12]) G. Aminoff, Geol. Fören i. Stockholm förhandl., Mai 1919.

[13]) R. Glocker, Interferenz der Röntgenstrahlen und Kristallstruktur, Stuttgart 1914, S. 955.

[14]) Hadding, ZS. d. Univ. Lund, 1918.

[15]) R. Gross, Marx' Handbuch der Radiologie **5**, 511, 1919.

[16]) E. Schiebold in F. Rinne, Krist. Formenlehre, 4. u. 5. Aufl., 1922.

[17]) M. Polanyi u. K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **9**, 123, 1922.

[18]) H. Seemann, Ann. d. Phys. **51**, 391, 1916; **59**, 455, 1919.

[19]) H. Bohlin, Ann. d. Phys. **61**, 430, 1920.

[20]) O. Pauli, ZS. f. Krist. **56**, 1922.

[21]) R. Gross, ZS. d. Min. usw. **7**, 65—111, 1922.

[22]) A. W. Hull u. W. P. Davey, Phys. Rev. (2) **17**, 549—570, 1921, Nr. 5.

[23]) A. Hadding, Centralbl. f. Min. 1921, S. 631—636.

[24]) H. Küstner, Phys. ZS. **22**, 257—262, 1921, Nr. 13.

[25]) P. P. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen, Berlin 1923, S. 264.

[26]) Siehe E. Boeke, Die Anwendung der stereograph. Projektion bei krist. Unters. Berlin, Borntraeger, 1911.

[27]) Siehe E. Boeke, Die gnomonische Proj. in ihrer Anw. auf krist. Aufgaben. Berlin, Borntraeger, 1913.

[28]) Vgl. hierzu E. Schiebold in F. Rinne, Lit. [16]).

[29]) F. Rinne, ZS. f. Krist. **59**, 230, 1924, Fig. 6, S. 246.

[30]) R. Gross, Zentralbl. f. Min. usw. 1920, S. 52.

[31]) E. Schiebold, Lit. [16]), S. 237—242; ZS. f. Phys. **9**, 180, 1922; ZS. f. Krist. **57**, 579, 1923.

[32]) M. Polanyi, Naturwiss. **9**, 337, 1921; ZS. f. Phys. **7**, 149, 1921.
[33]) P. Debye u. P. Scherrer, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1916.
[34]) A. Johnsen und O. Toeplitz, Phys. ZS. **18**, 297, 1917.
[35]) C. Runge, Phys. ZS. 1917, S. 297.
[36]) P. Niggli, Geometrische Kristallographie d. Diskontinuums. Leipzig 1919.
[37]) H. Bijl u. Kolkmeijer, Kon. Ak. v. Wetensch. Amsterdam **21**, 494, 501, 1919.
[38]) H. Mark und K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **16**, 1—23, 1923.
[39]) M. Polanyi und K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **9**, 123, 1922; ZS. f. Phys. **12**, 58, 78, 111, 1923.
[40]) Vgl. Lit. [17]), S. 32, 39.
[41]) F. Wever, Mitt. aus d. Kaiser Wilhelm-Institut für Eisenforschung. Düsseldorf 1924.
[42]) Vgl. Lit. [16]), [38]), [39]).
[43]) Uspenski u. Konobejewski, Vortrag Phys. Ges. Moskau, 1920; ZS. f. Phys. **16**, 215, 1923; Akimasa Ono, Mem. of the Coll. of Engineer. Kynshu Imp. Univ. **2**, 241, 1922, Nr. 5.
[44]) A. Joffé, M. W. Kirpitschewa† und M. A. Lewitzky, ZS. f. Phys. **22**, 286, 1924; Phil. Mag. **61**, 43, 204—206, 1922, M. 253.
[45]) M. Ettisch, M. Polanyi und K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **7**, 181, 1921 ferner Lit. [38]), [39]).
[46]) H. Ott, ZS. f. Phys. **22**, 201, 1924.
[47]) K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **23**, 229, 1924.
[48]) R. Gross, Vortrag Deutsche Ges. f. Metallk. 1924; ZS. f. Metallk. **16**, 344, 1924.
[49]) M. Polanyi, E. Schiebold und K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **23**, 337, 1924.
[50]) K. Weissenberg, Ann. d. Phys. **69**, 409, 1922.

Die thermodynamische Invariante und die spezifische Wärme beim absoluten Nullpunkt.

Von **Witold Jazyna** in Leningrad.

(Eingegangen am 25. August 1924.)

Mit Hilfe der sogenannten thermodynamischen Invariante kann man auf Grund des II. Hauptsatzes aus dem Nernstschen Theorem eine wichtige Folgerung über spezifische Wärme verallgemeinern.

Bezeichnen wir dS als das Differential der Entropie eines Systems in irgend einem im ST-Diagramm bestimmten Prozesse, der wohl umkehrbar sein muß, dessen Charakter aber ohne Bedeutung ist.

Man kann dann die Entropie S und die augenblickliche (wahre) spezifische Wärme C als Funktionen der Temperatur T darstellen, nämlich

$$S = \eta(T) \quad \text{und} \quad C = \xi(T). \tag{1}$$

Wir nehmen nun zwei beliebige Isothermen T_1 und T_2 und verbinden mittels willkürlich gewählter Linien im ST-Diagramm die Punkte einer Isotherme mit denen der anderen. Wir nehmen dann eine dieser Linien als graphische Darstellung eines bestimmten Prozesses und berechnen für jeden Punkt derselben das Verhältnis

$$\frac{dS}{C} = \frac{\eta'(T)}{\xi(T)} dT,$$

wobei

$$\eta'(T) = \frac{dS}{dT}$$

ist. Dann bezeichnen wir das Linienintegral

$$I = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dS}{C} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\eta'(T)\,dT}{\xi(T)} = \lg \frac{T_2}{T_1}, \tag{2}$$

das zwischen denselben Temperaturgrenzen für alle physikalischen Systeme bei jedem Prozesse einen und denselben Wert annimmt, als thermodynamische Invariante.

Wir betrachten einige besondere Fälle:

1. Wenn die Temperaturgrenzen von Null verschieden sind und zusammenfallen, d. h. $T_1 = T_2$ ist, dann ist $I = 0$.

2. Die beiden Grenzen mit der Isotherme des absoluten Nullpunktes fallen zusammen. Wir erhalten dann $I = \infty - \infty$.

3. Die obere Temperaturgrenze nimmt zu oder die untere nimmt ab. Die thermodynamische Invariante wächst, und zwar im letzteren Falle schneller als im ersteren.

4. Wenn keine Temperaturgrenze gleich Null wird, hat die thermodynamische Invariante einen endlichen bestimmten Wert (den Fall $T = \infty$ kann man, da er keine physikalische Bedeutung hat, weglassen).

5. Die untere Temperaturgrenze ist $T_1 = 0$, die obere $T > 0$. Also ist $I = + \infty$.

Mit Hilfe der letzteren Eigenschaften der thermodynamischen Invariante kann man zeigen, daß die spezifische Wärme der Körper bei irgend einem Prozesse in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes dem Werte Null zustrebt, d. h. den bekannten Satz, der eine wichtige Folgerung des Nernstschen Theorems ist, verallgemeinern.

Zu dem Zwecke berechnen wir den Wert der thermodynamischen Invariante in den Temperaturgrenzen von $T_1 = 0$ bis $T_2 = \Delta T$, worin ΔT hinreichend klein, aber nicht gleich Null ist; so bekommen wir (5.)

$$I = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dS}{C} = \int_{0}^{\Delta T} \frac{dS}{C} = + \infty.$$

Die Entropie und die spezifische Wärme bei dem bestimmten Prozesse kann man allgemein als Funktionen der Temperatur betrachten; hiermit folgt aus den Gleichungen (1) und (2)

$$I = \int_{0}^{\Delta T} \frac{\eta'(T) dT}{\xi(T)} = + \infty. \qquad (3)$$

Falls die Funktion

$$\eta'(T) = \frac{dS}{dT}$$

im Intervalle von ΔT bis 0 stetig ist, ist die Beziehung (3) nur dann möglich, wenn $\xi(T_0)$ innerhalb der Intervalle von ΔT bis 0 (d. h. $T_2 > T_0 \geqslant 0$) unendlich kleine Werte annimmt.

Da das Intervall von ΔT bis 0 hinreichend klein ist, ist die Temperatur T_0 unendlich klein.

Daraus folgt, daß in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes die spezifische Wärme der Körper dem Werte Null zustrebt. Diese allgemeine theoretische Tatsache, die für kondensierende Systeme als richtig bekannt ist, ist durch die neuesten Versuche von W. Nernst auch für Gase bestätigt.

Leningrad, 15. April 1924.

Die absolute Helligkeit der Plejadensterne.

Von **H. Kienle** und **P. ten Bruggencate** in Göttingen.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1924.)

Der Vergleich des Farbenhelligkeitsdiagramms der Plejaden mit dem des Sternsystems führt auf einen Widerspruch, dessen wahrscheinlichste Lösung in der absorbierenden Wirkung der Nebel, die mit den Plejaden verbunden sind, gefunden wird.

Bei den Untersuchungen, die der eine von uns über Sternhaufen angestellt hat[1]), hat sich gezeigt, daß es eine der wichtigsten Aufgaben ist, das Farbenhelligkeitsdiagramm (F. H. D.) für eine möglichst geschlossene Reihe von Sternhaufen — von den konzentriertesten Kugelhaufen auf der einen Seite bis zu den offensten Bewegungshaufen auf der anderen — aufzuzeichnen. Die Diagramme sind besonders in kosmogonischer Hinsicht wertvoll, indem sie gestatten, eine Fülle von Problemen der Kosmogonie — die Frage nach der Weiterentwicklung der δ Cephei-Sterne, der B-, O-Sterne und der planetarischen Nebel[2]) —, für welche bisher kein Weg der Lösung anzugeben war, auf einfache Art in Angriff zu nehmen. Die Möglichkeit, die Diagramme in dieser Weise zu verwenden, beruht darauf, daß sie stetige Funktionen der Entwicklungszeit eines Sternhaufens zu sein scheinen. Gerade deshalb ist es so wichtig, die F. H. D. in der oben angedeuteten Weise aufzustellen, weil dadurch die stetige Veränderung der Diagramme mit dem Charakter der Haufen nachgeprüft und sichergestellt werden kann. Bisher war es nur möglich, die Diagramme für fünf Haufen zu zeichnen: die konzentrierten Kugelhaufen Messier 3 und M. 13, die offenen Haufen M. 11, M. 37 und M. 67. Es fehlen Übergangstypen von M. 3 zu M. 11, von M. 37 zu M. 67 und endlich von M. 67 zu den offensten Gruppen und den Bewegungshaufen. Die Plejaden wurden von uns gewählt, weil die Vermutung nahe lag, in ihnen ein Zwischenglied zwischen den offenen Haufen, wie M. 37 oder M. 67 und den reinen Bewegungshaufen, wie etwa den Hyaden, zu finden. Wegen ihrer gegenüber anderen Sterngruppen relativ geringen Entfernung war zu erwarten, daß das F. H. D. eine beträchtliche Anzahl in ihrer Entwicklung weit vorgeschrittener Zwergsterne enthalte. Im Verfolg dieser Aufgabe stießen wir auf gewisse Schwierigkeiten, deren Diskussion die folgenden Ausführungen gewidmet sind.

---

[1]) ten Bruggencate, ungedruckte Münchener Dissertation 1924; ZS. f. Phys. **24**, 48, 1924; Seeliger-Festschr. 1924, S. 50.

[2]) Kienle, Die Naturwissensch. **12**, 469, 1924; ten Bruggencate, Seeliger-Festschr., S. 60.

1. Problemstellung. Die Verteilung der hellen Plejadensterne bis etwa zur Größe $9^m,0$ nach Helligkeit und Spektren ist mehrfach untersucht worden[1]). Aus einem Diagramm von Trümpler[2]), das die Plejadensterne bis $10^m,0$ umfaßt, erkennt man, daß die Sterne zwischen $7^m,0$ und $10^m,0$ dem Zwergast des Russell-Diagramms angehören, wenn sie auch — worauf wir später eingehen — alle etwas unterhalb (auf der Seite schwächerer Helligkeiten) der Mittellinie des Zwergastes liegen. Mit Recht kann man sagen, daß die Verteilung dieser Plejadensterne im Durchschnitt die gleiche ist, wie die der entsprechenden Sterne im Sternsystem. Auch die Häufigkeitskurve der Spektraltypen, wie sie Trümpler angibt, stimmt ihrem Verlauf nach mit der Häufigkeitskurve im Sternsystem überein. Sie zeigt ein Minimum zwischen *A* 5 und *G* 0 in einem Gebiet, das Sterne von kleiner Masse und solche von sehr großer Masse gar nicht durchwandern, weil die ersteren bei *K* 0 in den Zwergast abbiegen, die letzteren dort instabil werden[3]). Eine Erweiterung dieser Untersuchungen nach der Seite der schwachen Sterne wurde möglich durch Shapleys umfassenden Katalog schwacher Plejadensterne[4]), der von über 700 Sternen zwischen $10^m,0$ und $15^m,0$ (photovisuell = pv.) Farbenindizes enthält. Danach setzt sich, wie Shapley betont, das Hauptheer der Plejadensterne aus Zwergen zusammen mit einer absoluten Helligkeit zwischen $+5^m$ und $+9^m$. Shapley bemerkt aber nicht, daß diese Feststellung in direktem Widerspruch steht zu der überwiegenden Mehrzahl der im Katalog angegebenen Farbenindizes. Die meisten Farbenindizes liegen zwischen $+0^m,00$ und $+0^m,80$; also sind nach dem Mt. Wilson Color-System für Zwerge die Mehrzahl der schwachen Plejadensterne Sterne der Typen *A* 0 bis *G* 0. Die schwächsten *G* 0-Sterne des Sternsystems erreichen aber gerade die absolute Helligkeit $+5^m,0$; die durchschnittliche Helligkeit der Zwerge dieses Spektralbereichs liegt zwischen $+3^m,0$ und $+4^m,0$. Wie läßt sich die befremdende Tatsache erklären, daß die Plejaden sich in der Hauptsache aus *A*- und *F*-Zwergen zusammensetzen, mit einer absoluten Helligkeit, die bedeutend kleiner ist, als die geringste Helligkeit der entsprechenden Zwerge im übrigen Sternsystem? Zunächst scheinen uns zur Lösung des Widerspruchs im Prinzip zwei Annahmen möglich:

---

[1]) Hertzsprung, Astr. Nachr. **200**, 137, 1914; Lau, Astr. Nachr. **191**, 409, 1912; Trümpler, Astr. Nachr. **200**, 217, 1914 und Lick Obs. Bull. **333**.

[2]) Trümpler, Lick Obs. Bull. **333**, 114 u. 116.

[3]) Kienle, Die Naturwissensch. **12**, 472, 1924.

[4]) Shapley und Richmond, Mt. Wilson Contr. **218**.

a) Wir haben es hier in der Tat mit *B*-, *A*- und *F*-Sternen der absoluten Helligkeit $+ 5^m$ bis $+ 9^m$ in großer Anzahl zu tun, wie wir sie vereinzelt als die bekannten Paradoxa in der Umgebung der Sonne (Siriusbegleiter, o_2 Eridani *B*) in der Tat kennen. Damit werden aber dann die ganzen Shapleyschen Entfernungsbestimmungen für Sternhaufen hinfällig; wir kommen zurück auf die frühere Vorstellung von Charlier, wonach die Haufen sich aus Zwergen aufbauen mit absoluten Helligkeiten, die weit geringer sind, als wir sie bei Sternen des Sternsystems im allgemeinen kennen; und es tauchen wieder all die Schwierigkeiten in den Problemen der Sternhaufen auf, die uns letzten Endes dazu geführt haben, die Charlierschen Parallaxen der Haufen zu verwerfen[1]). Wir erwähnen nur die ergebnislosen Bemühungen, E. B. für Haufensterne abzuleiten; oder die röter werdende Farbe bei zunehmender Helligkeit, eine Erscheinung, die mit einer Theorie der Zwergsterne, wie sie Eddington entwickelt hat, nicht vereinbar ist; oder schließlich noch das ganze Problem der Cluster-Variablen.

b) Halten wir jedoch an den bisherigen Vorstellungen über den Aufbau und die Entwicklung eines Sternes fest, so bleibt nur der eine Weg übrig, den Shapleyschen Plejadensternen diejenige absolute Helligkeit zu geben, die ihnen nach dem Farbenindex auf Grund der Erfahrungen im Sternsystem zukommt. Sie würden dann etwa in den Bereich von $-1^m{,}0$ bis $+3^m{,}0$ fallen. Dann bleiben alle kosmogonischen Anschauungen, insbesondere die Theorie der Riesen- und Zwergsterne, der Zusammenhang zwischen langperiodischen, kurzperiodischen δ Cephei-Sternen und den Haufenveränderlichen, sowie die Ansichten über den Bau des größeren galaktischen Systems erhalten.

Aus dieser zweiten Annahme sind wir dann allerdings gezwungen, eine der zwei möglichen Folgerungen zu ziehen: entweder haben die Sterne schwächer als $11^m{,}0$ (pv.) gar keinen physikalischen Zusammenhang mit den helleren Plejadensternen, sondern bilden eine selbständige Sterngruppe in weit größerer Entfernung, auf die sich nur zufällig die Sterne des hellen Plejadenschwarmes projizieren. Diese Annahme bringt uns in Gegensatz zu den von Trümpler abgeleiteten E. B., die von ihm als Kriterium der Zusammengehörigkeit der Gruppen benutzt wurden. Eine andere Möglichkeit ist die, daß die Helligkeit der schwachen Plejadensterne durch vorgelagerte absorbierende Wolken um mehrere Größenklassen geschwächt wird, und die aus scheinbarer und absoluter Helligkeit der

[1]) ten Bruggencate, Diss.

hellen und der schwachen Plejadensterne sich ergebende Entfernungsdifferenz nur eine scheinbare ist. Auch eine Kombination beider Folgerungen wäre unter Umständen denkbar.

2. Das Farbenhelligkeitsdiagramm der Plejaden. Die erste Annahme, die bei der Konstruktion des F. H. D. eines Sternhaufens aus der scheinbaren Helligkeit und dem Farbenindex (oder Spektraltypus) seiner Sterne stillschweigend gemacht wird, ist die, daß alle Sterne des Haufens praktisch in der gleichen Entfernung von uns stehen. Bei den kugelförmigen Haufen und den offenen Haufen M. 11, 37, 67 ist diese Annahme offenbar ganz unbedenklich, weil die Entfernung dieser Haufen groß ist gegenüber den Dimensionen der Haufen selbst. In unserem Falle wollen wir zur Sicherheit noch eine kleine Abschätzung der durch die Annahme einer gleichen Entfernung für alle Haufensterne möglicherweise hervorgerufenen Verfälschung vornehmen, um so mehr, als die Plejaden auch einen großen scheinbaren Durchmesser besitzen. Die Shapleyschen Sterne liegen alle innerhalb eines Feldes von $1^0{,}5$ Radius mit Alcyone als Mittelpunkt. Nehmen wir für diese Sterne, um keine zu kleinen Fehler zu erhalten, eine Tiefenausdehnung an, die einer Querausdehnung von 5^0 entspricht, so ergibt sich bei der sicher nicht zu groß angenommenen Parallaxe von $0''{,}005$ der ungefähre Wert von 18 pars. Wir hätten also eine maximale Schwankung der Parallaxen der Haufensterne von $\pm$ 4,5 Proz. um den für den Mittelpunkt gültigen Wert, d. h. wir erhalten aus:

$$M = m + 5 + 5 \log \pi, \quad \text{also} \quad dM = \frac{5}{2{,}3} \cdot \frac{d\pi}{\pi} = 2{,}2 \frac{d\pi}{\pi},$$

als maximale Schwankung der absoluten Größen:

$$dM = \pm 0^m{,}1.$$

Wir sind also auch hier berechtigt, ohne eine merkliche Verfälschung befürchten zu müssen, die Verteilungsfunktion der absoluten Leuchtkräfte und der Spektren durch die Verteilungsfunktion der scheinbaren Helligkeiten und der Spektren zu ersetzen. Der Unterschied besteht lediglich in einer Verschiebung des Diagramms längs der Achse der Helligkeiten.

Die zweite Frage ist die nach der Wahl der Abszissen. Von den schwachen Plejadensternen des Shapleyschen Katalogs sind nur die Farbenindizes bestimmt. Von den hellen Sternen finden sich in einem Katalog von Trümpler[1]) Spektralklassen nach dem Henry Draper-Katalog

[1]) A. a. O.

angegeben. Wir haben, im Anschluß an frühere Arbeiten, da es uns vor allem darauf ankommt, für alle untersuchten Haufen einheitlich konstruierte Diagramme zu erhalten, als Abszissen die Farbenindizes gewählt. Für die schwachen Sterne gibt sie der Katalog von Shapley, für die hellen wurden sie dem Henry Draper-Katalog an Stelle der Spektralklassen entnommen. Soviel aus den Arbeiten von Trümpler und Seares[1]) hervorgeht, die auf einen ganz anderen Zusammenhang zwischen Spektralklassen und Farbenindizes bei den Sternen der Plejaden, als bei denen im Sternsystem hinweisen, glauben wir durch Wahl der Farbenindizes die fehlerfreieste Verteilung erhalten zu haben. Denn wir halten bei den Plejadensternen zwischen $6^m,0$ und $11^m,0$ die Farbenindizes für zuverlässiger als die Spektralklassifikation, die bei den schwächeren Sternen (8^m bis 11^m) leicht verfälscht sein kann, weil hier nur Spektrogramme verwendet werden können, die mit geringer Dispersion aufgenommen sind. Wenn ein Übergang zu Spektralklassen wünschenswert erscheint, vollziehen wir diesen durch Anschluß an das Mt. Wilson Color-System, wie es z. B. in der zitierten Arbeit von Seares angegeben ist. Zur Aufzeichnung des in Fig. 1 wiedergegebenen Diagramms sind demnach die folgenden Kataloge benutzt worden:

a) Für die hellen Sterne bis zur $10^m,0$-Größe (pv.) der Katalog von Trümpler, Lick Obs. Bull. **333**, dem alle Sterne entnommen wurden, die er als „very probable members" bezeichnet. Als scheinbare Größe wurde die photometrische Größe des Henry Draper-Katalogs verwandt. Die Farbenindizes schließlich sind ebenfalls diesem Katalog entnommen.

b) Für die schwachen Sterne der Katalog von Shapley, und zwar in der Weise, daß die Farbenindizes direkt entnommen und mit diesen und den angegebenen photographischen Größen die photovisuellen Größen berechnet wurden, die ja in unseren Diagrammen einheitlich als Ordinaten benutzt werden.

Die Sterne wurden getrennt nach ihrer Entfernung vom Zentrum des Haufens, aus einem Grunde, der weiter unten zu besprechen sein wird; und zwar bildeten wir vier Gruppen, die im Diagramm mit verschiedenen Zeichen eingetragen sind. Die später ausgeführten Sternzählungen jedoch umfassen alle vier Gruppen zusammen. — Nicht unwichtig ist es im Hinblick auf die zu ziehenden Schlüsse, sich Rechenschaft darüber abzulegen, inwieweit das Material als vollständig im Sinne statistischer Behandlung zu betrachten ist. Für die schwachen Sterne

[1]) Seares, Publications Astr. Soc. Pacific **34**, 56, 1922.

mit dem Farbenindex + 0^m,2 dürfte die Vollständigkeitsgrenze zwischen 14^m,0 und 14^m,5 liegen. Aus dieser Annahme und der Tatsache, daß dem Katalog Shapleys photographische Aufnahmen zugrunde liegen, ergibt sich zwangläufig die Grenzlinie der Vollständigkeit des Diagramms,

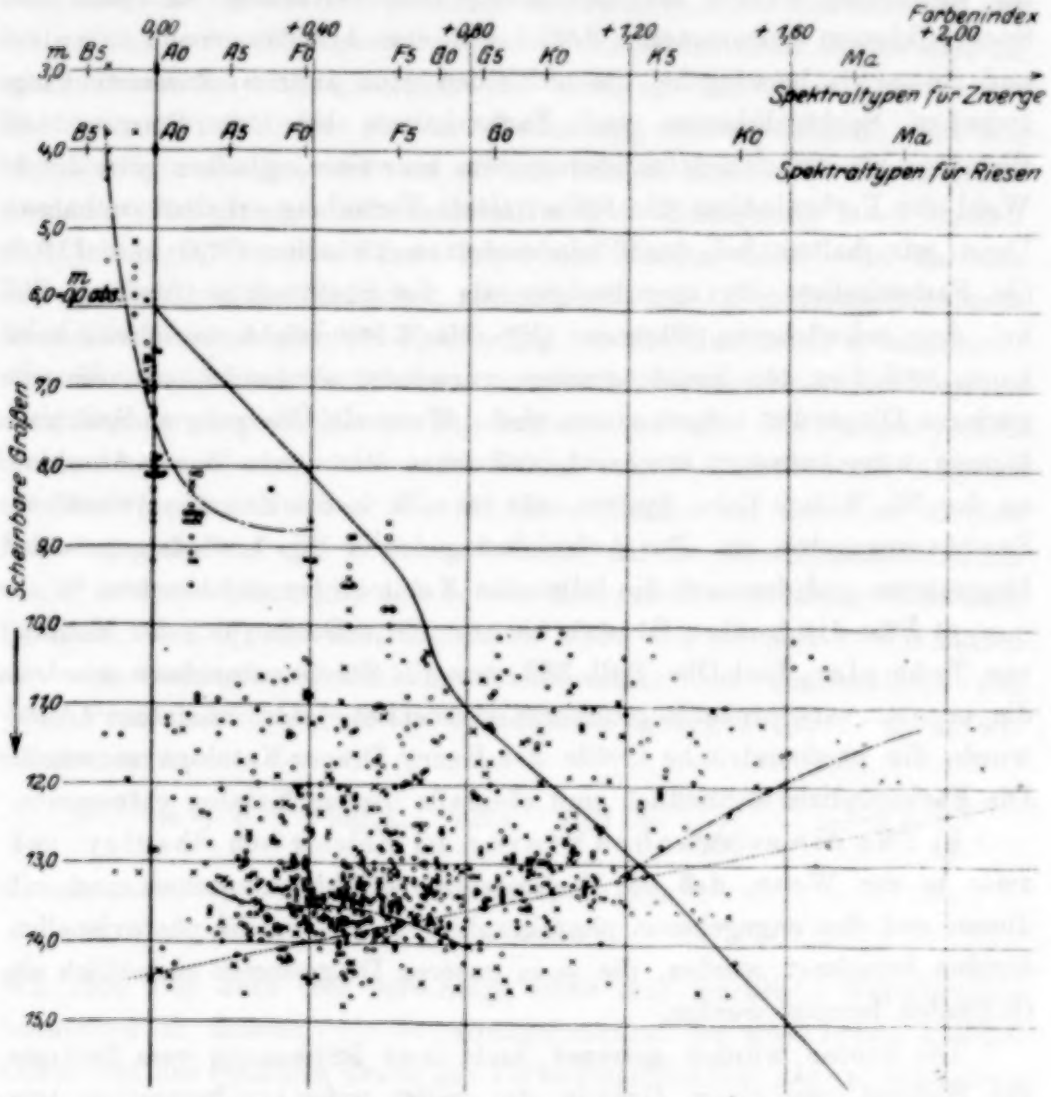


Fig. 1. Farbenhelligkeitsdiagramm für die Plejaden.

× ○ • □ } Sterne innerhalb { 0^0 und 0^0,5 / 0^0,5 „ 1^0,5 / 1^0,5 „ 2^0,5 / 2^0,5 „ mehr } vom Zentrum.

die in Fig. 1 und 2 punktiert eingezeichnet ist. Die strichpunktierten Kurven der Fig. 1 finden später ihre Erklärung.

Das gezeichnete Diagramm ist mit dem F. H. D. für das Sternsystem zu vergleichen. Dazu ist es notwendig, diejenige scheinbare Größe zu

bestimmen, die im F. H. D. z. B. der absoluten Größe $0^m,0$ entspricht. Ist dies gelungen, so kann man sofort die dem Sternsystem entsprechende Lage der Äste der Riesen und Zwerge in das Diagramm der Plejaden einzeichnen, und auf diese Weise Gleichheit oder Ungleichheit in der Verteilung der Plejadensterne und der Sterne der Umgebung der Sonne — im wesentlichen die etwa 1600 Sterne mit spektroskopischen Parallaxen — feststellen.

Um aber der absoluten Größe $0^m,0$ eine scheinbare Größe zuordnen zu können, bedarf es der Kenntnis der Parallaxe des Sternhaufens. Von den Plejaden liegen verschiedene Parallaxenbestimmungen vor, die in der Monographie von Rasmuson[1]) über Bewegungshaufen zusammengestellt sind. Die verschiedenen Werte der Parallaxe zeigen ziemliche Schwankungen. Die größten Werte sind $0'',036$[2]) und $0'',033$[3]), die kleinsten $0'',006$[4]) und $0'',005$[5]). Es ist auffallend, daß die Parallaxe um so kleiner wird, je mehr schwache Sterne mit in die Rechnung eingeschlossen werden. Um zu entscheiden, welcher Parallaxe die größte Wahrscheinlichkeit zukommt, ist es vor allem wichtig, die Methoden zu beleuchten, welche zur Ableitung der Parallaxen dienten. Allerdings kommt es bei der Frage, die wir behandeln und wie wir noch zeigen werden, auf einen sehr genauen Wert der Parallaxe selbst nicht an. Es handelt sich lediglich um die Abschätzung der richtigen Größenordnung. Die Parallaxe $0'',036$ scheidet aus, weil sie auf einer, wie nun nachgewiesen ist[6]), falschen Voraussetzung beruht, nämlich der Gültigkeit der Kapteynschen Verteilungsfunktion der absoluten Leuchtkräfte. Der Wert $0'',033$ ist sehr unsicher, da er sich nur auf die E. B. von sechs Sternen gründet, und außerdem die Hypothese enthält, daß die Bewegung der einzelnen Sterne genau parallel zur galaktischen Ebene sei. Die beiden kleinsten Werte beruhen auf der Annahme einer mittleren absoluten Helligkeit für die Sterne der Typen $B\,5$ bis $A\,0$, wie sie aus den Erfahrungen im Sternsystem folgt. Mit einer gewissen, gleich zu besprechenden Einschränkung glauben wir, daß durch eine solche Abschätzung am ehesten die richtige Größenordnung erhalten wird, und haben daher — der gleichen Überlegung folgend — der scheinbaren

[1]) Rasmuson, Meddel. Lund, Serie II, Nr. 26, S. 57, 1921.
[2]) Schouten, Observatory **42**, 240, 1919.
[3]) Plummer, Monthly Notices **73**, 492, 1913.
[4]) Hertzsprung, Astr. Nachr. **195**, 449, 1913 und Russell, Proc. Amer. Phil. Soc. Philadelphia **51**, 575, 1912.
[5]) Pickering, Harvard Circ. **206**, 1918.
[6]) Trümpler, Publ. Allegheny Obs. Nr. 4 und Lick Obs. Bull. **333**, 115.

Helligkeit $6^m,0$ die absolute Helligkeit $0^m,0$ ($\pi = 0'',1$) zugeordnet. Man findet damit für die Parallaxe den Wert:

$$\pi = 0'',006.$$

Dieser Wert der Parallaxe hängt wesentlich davon ab, daß man für die hellen B- und A-Sterne (3^m bis 7^m) keine Absorption durch vorhandene Plejadennebel annimmt. Diese kann für die gewählten Sterne jedenfalls nicht groß sein. Ist eine geringe Absorption vorhanden, so bewirkt diese eine Verkleinerung der scheinbaren Helligkeiten, d. h. unser Parallaxenwert ist ein Minimum. Die aus den E. B. der Plejadensterne sicherer bestimmten Parallaxen sind von der Größenordnung $0'',014$, also doppelt so groß. Eine Verdopplung der Parallaxe bewirkt eine Verschiebung der Skale der absoluten Helligkeiten um 2,2 Größenklassen nach der schwächeren Seite, so daß wir also eine Verschiebung des Nullpunktes der Skale der absoluten Helligkeiten in diesem Betrag nach oben unter Umständen zulassen müssen. Wenn man nun mit Hilfe der Parallaxe in das Diagramm für die Plejaden (Fig. 1) diejenige Kurve einzeichnet (ausgezogene Linie, für $\pi = 0'',006$), die im Mt. Wilson Color-System den Zusammenhang zwischen absoluter Helligkeit und Farbenindex bei den Zwergsternen darstellt, so ist ein Vergleich der Verteilung der Plejadensterne mit der Verteilung der Sterne des Sternsystems nach absoluter Helligkeit und Farbenindex möglich. Eine Vergrößerung der Parallaxe der Plejaden bedeutet eine Verschiebung der Mittellinie des Zwergastes nach oben, relativ zu den Plejadensternen. Diese Feststellung ist wichtig, weil sie, wie sich ergeben wird, zeigt, daß die folgenden Untersuchungen, die wir mit der Minimalparallaxe $0'',006$ durchgeführt haben, im Prinzip ungeändert bleiben, und daß die diskutierten Erscheinungen nur noch klarer zutage treten, wenn die Entfernung der Plejaden verkleinert wird.

Betrachten wir zunächst ganz allgemein die Lage der Plejadensterne gegen die in der Fig. 1 gezeichnete Mittellinie. Nach den Erfahrungen im Sternsystem wäre zu erwarten, daß sich die Plejadensterne innerhalb eines Streifens von der ungefähren Breite einer Größenklasse um diese Mittellinie anordneten. Die gefundene Verteilung — soweit sie die schwachen Sterne betrifft — hat nicht die geringste Ähnlichkeit mit einer solchen Anordnung. Statt der erwarteten Breite des Zwergastes von der Mittellinie nach unten von etwa 0,5 Größenklassen haben wir hier beim Farbenindex $+ 0^m,4$ eine Streuung über volle 7 Größenklassen. Wir würden also in den Plejaden b-, a-, f-Zwerge vor uns

haben — und zwar in großer Anzahl —, die um etwa 6 Größenklassen schwächer sind als die schwächsten normalen Sterne dieser Farbenindizes im Sternsystem. Bei der angenommenen Minimalparallaxe käme diesen Sternen eine absolute Helligkeit zwischen $+6^m,0$ und $+8^m,0$ zu. Bei einer Verdopplung der Parallaxe würden diese Sterne sogar absolute Helligkeiten zwischen $+8^m,0$ und $+10^m,0$ erhalten; die Abweichung vom Normalzustand wäre noch größer. Auf die Folgen, die eine solche Annahme für die Kosmogonie hätte, haben wir weiter oben bei der Problemstellung bereits hingewiesen.

Wenn wir von einer Bevorzugungsrichtung in der Verteilung der schwachen Sterne der Plejaden reden wollen, so wie die Kurve des Mt. Wilson Color-Systems die Bevorzugungsrichtung in der Verteilung der Zwergsterne des Sternsystems darstellt, so ist für die Sterne mit einem *FI* zwischen $0^m,0$ und $1^m,2$ eine deutliche horizontale Richtung zu bemerken. Machen wir die Annahme, daß die schwachen Plejadensterne normale Zwergsterne sind, so käme man auf die Vorstellung, daß durch irgendwelche Ursache der normale Zwergast gedreht worden ist. Als einzige Ursache einer solchen Drehung kommt eine selektive Absorption in Frage. Wegen des Auftretens später *b*- und früher *a*-Sterne in größerer Zahl mit scheinbaren Helligkeiten zwischen $11^m,0$ und $15^m,0$ hat man keinerlei Grund, eine bedeutende selektive Absorption anzunehmen — und nur um eine starke selektive Absorption könnte es sich hier handeln. Diese Annahme scheidet also auch aus. Der Widerspruch zwischen dem Plejadendiagramm und dem Diagramm für das Sternsystem zeigt sich auch deutlich, wenn man die Korrelation von Helligkeit und *FI* für die schwachen Plejadensterne untersucht. Die Rechnung ergibt für den Korrelationskoeffizienten den Wert $-0{,}21 \pm 0{,}04$. Dies bedeutet eine nur sehr lockere Bindung und außerdem — wegen des negativen Vorzeichens — zunehmende Helligkeit bei röter werdender Farbe ganz so, wie es im Sternsystem für die Riesensterne zutrifft, nicht aber bei den Zwergen, wo ein enger Zusammenhang zwischen Farbenindex und absoluter Größe bei positivem Korrelationskoeffizienten besteht.

3. Die Verteilungsfunktion $\Psi(M, FI)$ der schwachen Plejadensterne und die Lösung des Widerspruchs. Wir haben festzustellen, an welche Stelle des F. H. D. die schwachen Plejadensterne zu versetzen sind. Gehören sie auf den Riesenast, bilden sie einen Teil des normalen Zwergastes, oder sind sie auf keinem der beiden Äste unterzubringen? Das obige F. H. D. deutet die Lösung schon an. Die Zusammenhänge werden aber noch klarer, wenn wir, in Analogie zu dem Vorgange von

Hess[1]), die Verteilungsfunktion $\Psi(M, FI)$ der absoluten Helligkeiten und Farbenindizes für die schwachen Plejadensterne aufzustellen und die Kammlinien der durch sie bestimmten „Häufigkeitsfläche" zu zeichnen suchen.

Die erste Annahme ist wieder die, daß wir die schwachen Sterne als ein zusammengehöriges Ganzes auffassen und sie alle als in praktisch der gleichen Entfernung stehend betrachten. Den Fehler, den wir dabei begehen, haben wir schon abgeschätzt. Es ist also nun jede Funktion $f(M)$ zu ersetzen durch eine Funktion $f(m + c)$, wo c eine Konstante und durch die Parallaxe bestimmt ist:

$$c = 5 + 5 \log \pi.$$

$\Psi(m + c, FI)\, dm\, d(FI)$ sei die Anzahl der Sterne, deren scheinbare Helligkeit zwischen m und $m + dm$, und deren Farbenindex zwischen FI und $FI + d(FI)$ liegt. Diese Anzahl denken wir uns als dritte Koordinate senkrecht zur Ebene der m und FI aufgetragen im Punkte (m, FI). Geometrisch wird das Bild am deutlichsten, wenn wir Höhenlinien in der m, FI-Ebene einzeichnen, die die Projektionen von Schnitten parallel zur m, FI-Ebene durch die Häufigkeitsfläche sind. Die Konstruktion dieser Höhenlinien geschieht am einfachsten z. B. auf die folgende Weise: Man bestimmt für Streifen parallel zur Achse der m in der Projektionsebene das Verteilungsgesetz der Helligkeiten $\varphi_{FI}(m)$ durch Abzählen der Sterne des Streifens in bestimmten Intervallen. Die aufeinanderfolgenden Kurven $\varphi_{FI}(m)$, die die Helligkeitsverteilung der aufeinanderfolgenden Streifen der FI festlegen, sind Schnitte durch die Häufigkeitsfläche senkrecht zur Achse der FI. Eine bestimmte Höhenlinie ist nun in der m, FI-Ebene festgelegt, wenn man aus den Kurven $\varphi_{FI}(m)$, die zu sukzessiven FI gehören, diejenigen Werte von m bestimmt, die zu einem vorgegebenen Wert von φ gehören. Damit ist die punktweise Konstruktion eines Systems von Höhenlinien möglich.

Die folgende Tabelle gibt die Zählungen aller schwachen Plejadensterne wieder (außer denen mit negativem Farbenindex), auf die sich die Fig. 2 gründet. Die Streifen parallel der Achse der m haben eine Breite, die einer Änderung des Farbenindex von $0^m,4$ entspricht. Die Sterne jeden Streifens wurden von Größenklasse zu Größenklasse abgezählt, da das Material für engere Intervalle nicht ausreicht.

Die Zahlen einer Vertikalspalte geben den Verlauf einer Funktion $\varphi_{FI}(m)$, wie in der letzten Horizontalreihe angedeutet ist. Die letzte

[1]) Hess, Seeliger-Festschr. 1924, S. 265.

Tabelle 1.

m \ FI	a 0,00—0,39	f 0,40—0,79	g 0,80—1,19	k 1,20—1,59	m 1,60—2,00	$\Sigma(m)$
10,0—10,9	12	15	19	4	6	56
11,0—11,9	23	41	25	18	11	118
12,0—12,9	38	65	49	13	2	167
13,0—13,9	81	185	72	14	1	353
14,0—14,9	18	30	12	4	0	64
Verteilungsfunktion der Helligkeiten	$\varphi_{0,20}(m)$	$\varphi_{0,60}(m)$	$\varphi_{1,00}(m)$	$\varphi_{1,40}(m)$	$\varphi_{1,80}(m)$	$\varphi(m)$
$\Sigma(FI)$	172	336	177	53	20	—

Vertikalspalte liefert die Verteilungsfunktion der scheinbaren Helligkeiten für alle Sterne.

In Fig. 2 sind die Höhenlinien nur so weit eingezeichnet, wie sie verbürgt erscheinen. Es wurde für sie — der Klarheit wegen — ein

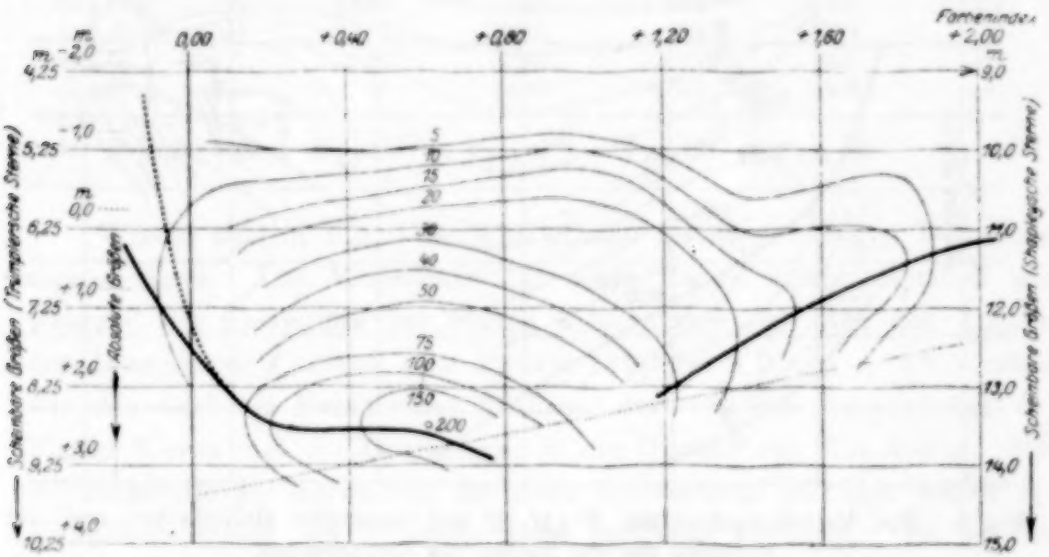


Fig. 2. Die Verteilungsfunktion $\varphi(m, FI)$ der scheinbaren Helligkeiten und der FI für die Sterne der Plejaden.

möglichst glatter Verlauf angenommen. So wurde z. B. das nicht verbürgte Minimum der Funktion $\varphi_{1,40}(m)$ zwischen $12^m,0$ und $12^m,9$ ausgeglichen. Endlich sind in die Figur noch die Kammlinien der Häufigkeitsfläche eingezeichnet, und zwar als Verbindungslinien der Maxima der Funktionen $\varphi_{FI}(m)$. Diese Linien gehen durch die Punkte, in denen die Höhenlinien zur FI-Achse vertikale Tangenten besitzen. Der Teil der Figur, der links von $FI = 0^m,20$ liegt, findet später seine Erklärung.

Trägt man nun in das Diagramm in Fig. 1 die so gefundenen Kammlinien ein (strichpunktierte Linien), so sieht man, daß sie nicht das geringste mit der Mt. Wilson Color-Kurve für die Zwerge des Sternsystems zu tun haben, die gleichsam die Kammlinie des Zwergastes im Russell-Diagramm darstellt. Es ist damit in überzeugender Weise gezeigt, daß die schwachen Plejadensterne keine Sterne des normalen Zwergastes sein können.

Wie steht es mit dem Riesenast? Hier knüpfen wir an die Untersuchungen von Hess über die Funktion $\Psi(M, S)$ an [1]). Er gibt in der zitierten Arbeit auf S. 272 die Werte der Funktion $\varphi_S(M)$ an, für $S = B$, $A0$, $F0$, $G0$, $K0$ und M. Die Sterne dieser Spektralbereiche hat er

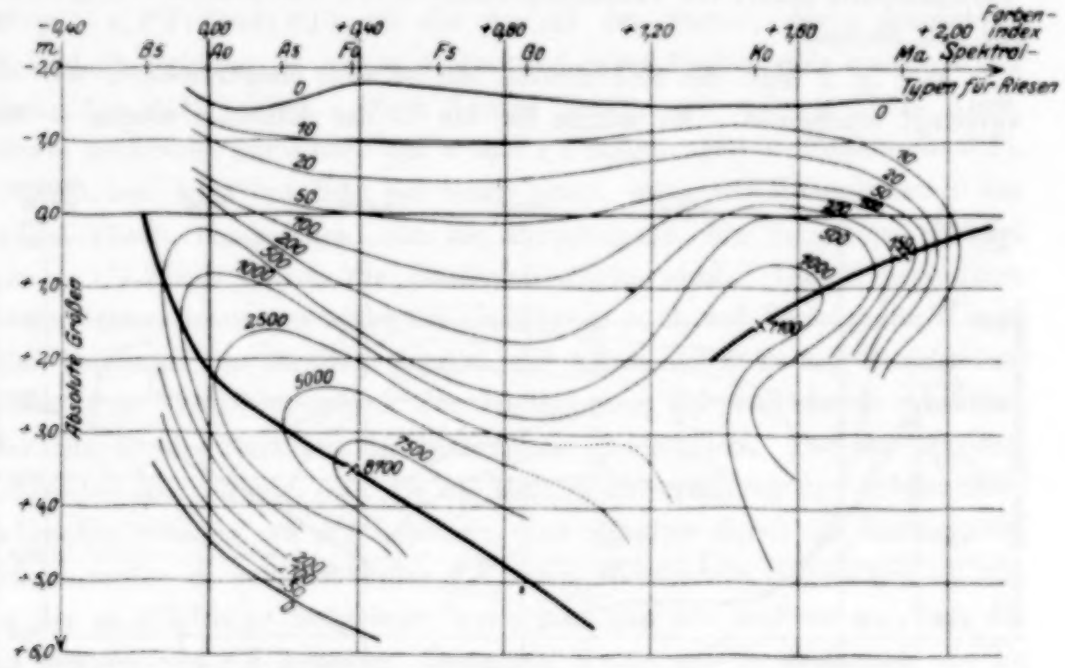


Fig. 3. Die Verteilungsfunktion $\Psi(M, S)$ der absoluten Helligkeiten und der Spektren für die Sterne des Sternsystems.

von halber zu halber Größenklasse abgezählt. Um eine gleiche Abzählung zu haben wie bei den schwachen Plejadensternen, haben wir seine Zählungen in Intervalle von ganzen Größenklassen zusammengefaßt. Dazu glaubten wir uns um so mehr berechtigt, als wir das Material nicht für so ausgedehnt und zuverlässig ansehen, daß alle sekundären Maxima und Minima, die in den Hessschen Zahlen vorkommen, als verbürgt angesehen werden könnten. Eine Zusammenfassung der Hessschen Zahlen gibt einen glatteren Verlauf der Funktionen $\varphi_S(M)$ und damit auch ein

[1]) A. a. O.

klareres Bild der Häufigkeitsfläche, wie ein Vergleich der Fig. 3 mit Hess' Figur zeigt. Noch ein Punkt ist zu bedenken. Die Zählungen für die Sterne des Sternsystems beziehen sich auf Spektralklassen, während wir hier Farbenindizes zugrunde legen. Wir haben diesen Umstand dadurch berücksichtigt, daß die Fig. 3 in einem verzerrten System gezeichnet ist, wie es sich aus dem Zusammenhang von Farbenindizes und Spektraltypus für Riesensterne auf Grund von Mt. Wilson-Messungen ergibt [1]). Tabelle 2 enthält die Abzählungen, die der Fig. 3 zugrunde liegen.

Tabelle 2.

M \ S	$A0$	$F0$	$G0$	$K0$	M
— 2,0 bis — 1,0	0	6	3	1	1
— 1,0 „ 0,0	51	18	25	38	47
0,0 „ + 1,0	755	87	111	902	145
+ 1,0 „ + 2,0	1598	257	132	1156	16
+ 2,0 „ + 3,0	2417	5660	185	489	0
+ 3,0 „ + 4,0	247	8730	5147	550	—
+ 4,0 „ + 5,0	0	1650	8751	1060	—
Verteilungsfunktion der Helligkeiten	$\varphi_{A5}(M)$	$\varphi_{F5}(M)$	$\varphi_{G5}(M)$	$\varphi_{K5}(M)$	$\varphi_{Ma}(M)$

Wieder sind in Fig. 3 die Kammlinien gemäß der obigen Definition eingezeichnet. Die Kammlinie der roten Riesen bricht plötzlich ab, während die Kammlinie der blauen Riesensterne sich über den Rücken der Zwergsterne hinzieht. Im Punkte 1100 bei $K0$ und + 1^m,5 haben wir den höchsten Punkt eines Rückens, der sich vom Hauptrücken der blauen Riesen und der Zwergsterne in der Gegend von $G5$ loslöst. Die Abbruchstelle der Kammlinie der roten Riesensterne läßt sich wegen der Unvollständigkeit des Materials nicht bestimmt festlegen. Es ist nur so viel sicher, daß sie zwischen $K0$ und $G5$ liegt.

Wir wollen hier noch eine Bemerkung über die physikalische Bedeutung der Kammlinie einschalten, die zugleich die Erklärung enthält für das zunächst vielleicht nicht ganz verständliche Abbrechen der rechten Kammlinie. Nach unserer Definition ist die Kammlinie die Verbindungslinie der Maxima der Funktionen $\varphi_S(M)$. $\varphi_S(M)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Riese vom Spektraltypus S die absolute Helligkeit M besitzt. Derjenige Wert von M, bei welchem die Funktion $\varphi_S(M)$ ihr Maximum erreicht, bestimmt somit die wahr-

[1]) Seares, Publ. Astr. Soc. Pacific **34**, 56, 1922.

scheinlichste absolute Helligkeit eines Riesen vom Spektraltypus S. Die Kammlinie verbindet somit im F. H. D. die wahrscheinlichsten absoluten Helligkeiten, die Sterne verschiedener Spektraltypen besitzen. Deuten wir das F. H. D. als Entwicklungsdiagramm der Sterne, so bedeutet die Kammlinie gewissermaßen nichts weiter als den wahrscheinlichsten Entwicklungsweg eines Sternes. Und nun ist es auch verständlich, warum zwischen $G\,5$ und $K\,0$ — näher bei $K\,0$ — die eine Kammlinie abbricht. Im Gebiet von $G\,8$ bis etwa $F\,5$ kann man keine wahrscheinlichste Entwicklungslinie festlegen [1]). Bei $K\,0$ tritt in der Sternentwicklung eine erste Abzweigung auf. Hier scheinen die Sterne in größerer Zahl instabil zu werden und zu den δ Cephei-Sternen überzugehen. Hier beginnt andererseits auch das Abbiegen in den Zwergast bereits bei den Sternen kleiner bis mittlerer Masse. Auch die starke Einbuchtung der Höhenlinien in Fig. 3 zwischen $F\,5$ und $G\,5$ bei absoluten Helligkeiten zwischen $+\,1^{m},0$ und $+\,2^{m},5$ zeigt, daß vor diesem Gebiet eine erste Unregelmäßigkeit auftreten muß. Der Kamm, der beim Fehlen der Zwergsterne vielleicht noch weiter zu verfolgen wäre, wird im F. H. D. völlig zugedeckt durch den sehr viel höheren und steiler ansteigenden, von links oben kommenden Rücken der Zwergsterne. In der Tat besitzt eine Sterngruppe, die keine oder nur sehr wenige Zwerge von schwächerer absoluter Helligkeit als $+\,4^{m},0$ besitzt, eine geschlossene Kammlinie, wie man sich leicht an Fig. 2 klarmachen kann, die dann eine solche Sterngruppe darstellen würde, wenn wir die an der Vollständigkeitsgrenze abgebrochenen Höhenlinien als geschlossene Linien zeichnen dürften. Eine einzige Kammlinie kann aber immer nur in einem bestimmten Entwicklungsstadium einer Sterngruppe auftreten; sobald sich ein Abwandern der Sterne der Gruppe in den Ast der Zwerge deutlich bemerkbar macht, findet wieder eine Überdeckung statt und somit eine Trennung in zwei Kammlinien.

Ein Vergleich der Fig. 2 mit der Fig. 3 macht die Identität der Verteilung der schwachen Plejadensterne mit der Verteilung der Riesensterne des Sternsystems beinahe zur Gewißheit. Die verschiedene Form der Höhenlinien in der Gegend von $F\,0$ bis $G\,5$ in den beiden Figuren ist, wie wir nicht unerwähnt lassen wollen, von nebensächlicher Bedeutung und kann ungezwungen aus der Lösung erklärt werden, die wir für dieses Problem als die wahrscheinlichste ansehen. Jedenfalls glauben wir, daß der Versuch berechtigt ist, in den zwei Figuren die rechten Kammlinien

[1]) Kienle, Die Naturwissensch. **12**, 469, 1924.

zu identifizieren. Wir schließen die linke Kammlinie aus, weil sie bei den Plejaden viel zu unsicher bestimmt ist. Sie kommt dort der Vollständigkeitsgrenze des Materials schon sehr nahe. Deshalb sind auch die Kurven 75, 100 und 150 zwischen $FI = 0^m,00$ und $0^m,50$, sowie $m = 13^m,0$ und $14^m,0$ als nur einigermaßen verbürgt anzusehen. Der Teil der Kammlinien, der nach der Seite der Farbenindizes $< 0^m,20$ liegt, ist, worauf wir zurückkommen, nur durch rohe Extrapolation erhalten, so daß seine Lage nur die Hauptrichtung richtig wiedergibt. Bringen wir die rechten Kammlinien auf die beste Weise zur Deckung, indem wir nur eine Verschiebung längs der Helligkeitsachse zulassen (eine Verschiebung längs der Achse der FI könnte das Resultat nicht verbessern; denn sie dürfte natürlich nur in dem Sinne erfolgen, daß wir für die Plejadensterne eine selektive Absorption annehmen, was wir schon als sehr unwahrscheinlich bezeichnet haben), so finden wir, daß der scheinbaren Helligkeit $12^m,0$ die absolute Helligkeit $+ 1^m,27$ zuzuordnen ist. Dies führt, normale Abnahme der scheinbaren Helligkeit mit dem Quadrat der Entfernung vorausgesetzt, auf eine Parallaxe der Gruppe von schwachen Sternen von $0'',0007$, während die kleinste Parallaxe, die für die hellen Sterne angenommen werden kann, etwa den Wert $0'',005$ hat, also siebenmal so groß ist. Dieses Ergebnis läßt, wie oben schon erwähnt, zwei Deutungen zu, wenn man eine Kombination der zwei Möglichkeiten nicht besonders zählt.

Die erste Möglichkeit ist die, daß wir es bei der Parallaxe der Gruppe der schwachen Sterne mit einem reellen Werte zu tun haben und sie tatsächlich in die siebenfache Entfernung versetzen müssen wie die hellen Plejadensterne. Dann müssen wir schließen, daß die Gruppe der hellen Sterne und die der schwachen keinerlei physischen Zusammenhang besitzen, sondern sich nur zufällig überdecken. Jede Gruppe bildet für sich ein geschlossenes System. Das Unbefriedigende dieser Lösung liegt darin, daß sie die Zusammengehörigkeit der zwei Gruppen als eine nur scheinbare, durch die zufällige Lage der Gruppen im Raum hervorgerufene Erscheinung deutet und daß auch die Übereinstimmung der scheinbaren E. B. beider Gruppen als eine nur zufällige anzusehen wäre.

Wir halten eine zweite Möglichkeit der Erklärung, die wir nun darlegen wollen, für die wahrscheinlichere. Die schwachen Shapleyschen Sterne[1]) sind alle enthalten in einem Trümplerschen Katalog von

[1]) Mt. Wilson Contr. **218**, 3.

E. B. der Plejadensterne, der uns leider noch nicht zugänglich ist. Betrachtet man die Zugehörigkeit der schwachen Sterne zu der Plejadengruppe durch die Untersuchung ihrer E. B. als gesichert, so bleibt zur Erklärung des Widerspruchs nur die folgende Möglichkeit: das Licht der Shapleyschen Plejadensterne erleidet durch die mit den hellen Plejadensternen verbundenen Nebel eine starke Absorption. Mit der für die hellen Sterne angenommenen Parallaxe 0″,006 ($6^m,0$ scheinbar ist identisch mit $0^m,0$ absolut) findet man den Minimalwert der Absorption zu 4,75 Größenklassen. Denn wir haben die schwachen Sterne so weit nach oben zu rücken, daß der scheinbaren Größe $12^m,0$ die absolute Größe $+ 1^m,25$ entspricht. Dies bedeutet aber, daß uns ohne Absorption die Sterne der Größe $12^m,0$ wie Sterne der Größe $7^m,25$ erscheinen würden, d. h. die Absorption beträgt 4,75 Größenklassen. Dies ist selbstredend nur ein Mittelwert; denn die Tiefenausdehnung der absorbierenden Nebel können wir nicht berücksichtigen. Wir kennen nicht die Lage der einzelnen Sterne relativ zur absorbierenden Wolke und können deshalb nur die scheinbare Helligkeit aller Sterne um einen konstanten, mittleren Betrag verbessern. Eine Erweiterung der Untersuchungen in dieser Richtung wird erst auf Grund der E. B. möglich sein. Es ist dann wohl ein Gang der Absorption mit der Größe der E. B. zu erwarten. Mit Hilfe des Trümplerschen Katalogs wird diese Aufgabe leicht durchzuführen sein. Wir haben uns zunächst durch die Einteilung der Plejadensterne in vier Gruppen nach ihrer Entfernung vom Zentrum zu helfen gesucht. Diese Einteilung ging aus von dem Gedanken, daß die Größe der Absorption eine Funktion der Entfernung der Sterne vom Zentrum sein muß. Da aber die Plejadennebel eine sehr viel größere Ausdehnung haben als die Gruppe der schwachen Sterne, die alle innerhalb eines Feldes von $1^0,5$ Radius (also in unseren beiden ersten Zonen) liegen, war kaum zu erwarten, daß sich bei ihnen schon eine merklich verschiedene Anordnung im Farbenhelligkeitsdiagramm bemerkbar macht. Und in der Tat zeigen auch in Fig. 1 die Kreuze und Ringe eine sehr gleichmäßige Durchmischung. Auch bei den hellen Sternen, bei denen die geringe Anzahl der Hauptgrund ist, kann man keine Schlüsse in dieser Richtung ziehen. Wir haben deshalb bei unseren Untersuchungen die Gruppen schließlich doch wieder zusammenwerfen müssen und so nur einen mittleren Wert für die Absorption gewinnen können.

Nun können wir auch die bisher nur für die schwachen Sterne abgeleitete Funktion $\Psi(m, FI)$ ermitteln für alle Sterne des Haufens.

Wir haben nur die Verschiebung der schwachen Sterne längs der Achse der Helligkeiten um 4,75 Größenklassen vorzunehmen und die Zählung der hellen Sterne mit der Zählung der schwachen Sterne zu kombinieren. Die Tabelle 3 gibt die für den ganzen Haufen gültigen Funktionen $\varphi_{FI}(m)$.

Tabelle 3.

FI / m	b $< 0{,}00$	a $0{,}00-0{,}40$	f $0{,}40-0{,}80$
8—9	4	—	—
9—10	3	—	—
10—11	5	12	15
11—12	3 + 7	23 + 4	41
12—13	1	38 + 9	65
13—14	2	81 + 19	185 + 8
14—15	—	18 + 1	30 + 12
Verteilungsfunktion der Helligkeiten	$\varphi_{-0{,}10}(m)$	$\varphi_{0{,}20}(m)$	$\varphi_{0{,}60}(m)$
$\Sigma(FI)$	25	205	356

In der ersten Spalte sind die scheinbaren Helligkeiten der schwachen Sterne angegeben, um einen besseren Vergleich mit Tabelle 1 zu ermöglichen. Die Funktion $\varphi_{0{,}60}(m)$ ändert sich ganz unwesentlich. Im Gebiete f behalten die Höhenkurven ihre Form; ebenso ist die Änderung von $\varphi_{0{,}40}(m)$ ohne Bedeutung. Die Funktion $\varphi_{-0{,}10}(m)$ gestattet kaum die Höhenkurven im Gebiete b mit einiger Sicherheit festzulegen. Das einzige, was möglich ist, ist eine Extrapolation der Höhenlinie 10, die zwischen $11^m{,}0$ und $12^m{,}0$ bei $-0^m{,}10$ eine zur Achse der FI vertikale Tangente haben muß. Auf diese Weise ist die Verlängerung der linken Kammlinie in Fig. 2 von $+0^m{,}20$ in das Gebiet b erhalten worden. Es ist ihr ungefährer Verlauf. Die stark punktierte Linie geht durch den Schwerpunkt der hellen Plejadensterne. Sie ist im F. H. D. (Fig. 1) strichpunktiert gezeichnet.

Wir weisen nochmals hin auf die in Fig. 1 ebenfalls strichpunktiert gezeichneten Kammlinien für die Sterne des Shapleyschen Katalogs und bemerken dazu, daß das Bild der Verteilung der Plejadensterne nach Helligkeit und Farbe erst dann verständlich und sinnvoll wird, wenn die Verschiebung der schwachen Sterne um 4,75 Größenklassen nach der Seite zunehmender Helligkeit ausgeführt wird.

Wir wollen hier noch einiges anfügen über die Lage und Gestalt der absorbierenden Nebel, soweit man aus dem F. H. D. der Plejaden

einigermaßen zuverlässige Schlüsse ziehen kann. Zunächst fällt auf, daß auch alle Sterne zwischen $6^m,0$ und $9^m,5$ scheinbarer Größe nicht um die Mt. Wilson Color-Kurve als Mittellinie angeordnet sind, sondern unterhalb derselben liegen. Wir schließen daraus, daß auch noch das Licht dieser Sterne, wenn auch bei weitem nicht so stark, durch die Plejadennebel absorbiert wird. Dann hätten wir unsere Helligkeitsskale nochmals um eine bis zwei Größenklassen nach unten zu verschieben, so wie das auch die aus den E. B. abgeleiteten Parallaxen nahelegen. Dies zeigt, daß wir tatsächlich in dem Betrage von 4,75 Größenklassen nur das Minimum der Absorption gefunden haben. In den Nebel scheinen somit fast alle — vielleicht auch alle — hellen Plejadensterne eingebettet zu sein. Das gleiche können wir nicht auch von den schwachen Sternen behaupten. Dazu scheint ihre Streuung über vier Größenklassen (die normale Streuung der Riesensterne) zu gering zu sein. Außerdem ist die Lücke im Diagramm zwischen den Größen $9^m,5$ und $10^m,5$, die nur wenige Sterne enthält, sehr auffallend. Sie ist wohl dadurch zu erklären, daß der Nebel eine flache Gestalt mit geringer Tiefenausdehnung hat, so daß die Mehrzahl der schwachen Sterne hinter dem Nebel liegt und nur verhältnismäßig wenige dieser Sterne im Nebel selbst. Aber immerhin wird dadurch die Streuung der schwachen Sterne in bezug auf ihre Helligkeit vergrößert, weil dann die Absorption für jeden Stern verschieden stark ist. Es wird auf diese Weise die flachere Böschung der Häufigkeitsfläche in Fig. 2 gegenüber der in Fig. 3 vorgetäuscht. Wenn es gelänge, die einzelnen scheinbaren Helligkeiten nicht nur um einen konstanten mittleren Betrag der Absorption, sondern auch wegen der Tiefenstellung der einzelnen Sterne im Nebel zu verbessern, so würden dadurch die Höhenkurven ihrer Form nach sich noch mehr den Kurven der Fig. 3 nähern. Diese Erklärung des Widerspruchs durch Absorption des Sternenlichtes hat nicht nur einen physikalischen Hintergrund, indem die die Absorption hervorrufenden Nebel tatsächlich vorhanden und sogar als helle Nebel bekannt sind, also wohl ein bedeutendes Absorptionsvermögen besitzen müssen, sondern sie ist auch imstande, die in die Augen springende abweichende Form der Höhenkurven der beiden Figuren auf zwanglose Weise zu erklären. Es ist uns daher kaum zweifelhaft, daß die hier zuletzt gegebene Lösung des Problems wohl die einzig mögliche ist.

4. Die kosmogonische Stellung der Plejaden. Wir hatten erwartet — und hieraus entstand die vorliegende Untersuchung —, in den Plejaden einen relativ alten Sternhaufen zu finden, der nur noch

einige wenige Riesensterne der Typen *B* bis *F* enthält und dessen Hauptheer von Sternen sich schon auf dem Aste der Zwerge befindet. Die Erwartung hat sich nicht bestätigt. Die Plejaden enthalten, wenn unsere Deutung richtig ist, noch eine große Zahl von Riesen bis zum Typus *M*. Die Mehrzahl der Sterne des Haufens befindet sich gerade an der Grenze des Zwergastes, wo eine scharfe Trennung nach Riesen und Zwergen nicht möglich ist. Bis jetzt konnten die Haufen M. 3, 13, 11, 37 und 67 auf Grund von F. H. D. untersucht werden [1]). Die mutmaßliche Aufeinanderfolge dieser Haufen nach ihrem Alter ist die eben hingeschriebene. Es ist nicht uninteressant, die Frage aufzuwerfen,

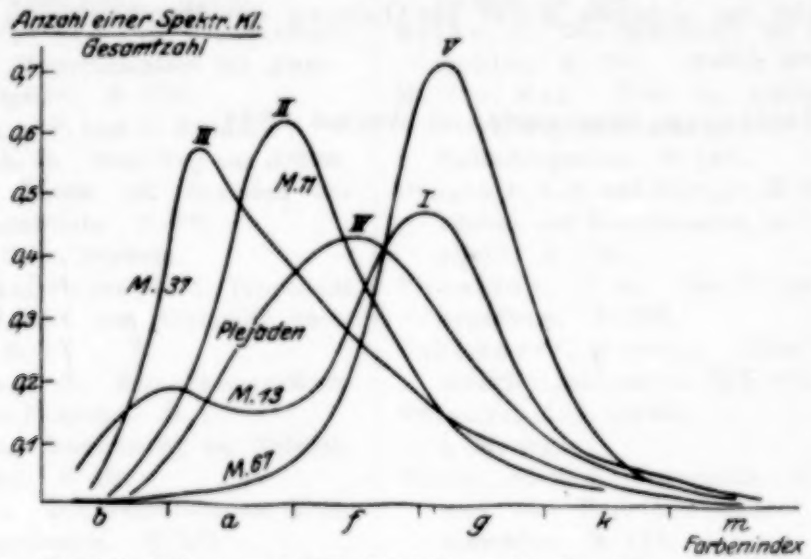


Fig. 4. Häufigkeitskurven der Farbenindizes für die Sterne der Haufen: Messier 13, 11, 37, Plejaden u. Messier 67.

wo die Plejaden in dieser Reihe unterzubringen sind? Das Wahrscheinlichste dürfte sein, daß ihnen eine Stellung zwischen M. 37 und 67 zukommt. Denn M. 37 zeigt noch deutlich, obwohl er schon sehr viele *a*- und *f*-Zwerge enthält, den geneigten Ast der Riesen, der bei den Plejaden nicht mehr zu erkennen ist, während M. 37 offenbar ausschließlich Zwerge enthält; denn die über alle Spektren gleichmäßig verteilten Sterne dieses Haufens der scheinbaren Größe $10^m,0$ bis $12^m,0$ scheinen keine wirklichen Glieder der Gruppe zu sein. Diese Einordnung der Plejaden wird durch Fig. 4 bestätigt, die die Verteilungsfunktion der Farbenindizes für die Haufen M. 13, 11, 37, 67 und die Plejaden wiedergibt [2]).

[1]) ten Bruggencate, Seeliger-Festschr. 1924, S. 50.

[2]) Siehe auch Seeliger-Festschr. 1924, S. 59, wo übrigens ein kleines Versehen bei der Ordinatenbezeichnung unterlaufen ist. Die Zahlen dort sind mit 4 zu multiplizieren.

Bei jungen Kugelhaufen ist eine Häufung von roten Riesensternen zu erwarten. Im Laufe der Entwicklung wird sich das Maximum nach der blauen Seite zu verlagern, bis ein Stadium erreicht ist, wo das Abwandern der Mehrzahl der Haufensterne in den Ast der Zwerge erfolgt. Dann wandert das Maximum in den Häufigkeitskurven der Farbenindizes wieder zurück nach der roten Seite. In Fig. 4 sind die Maxima der Kurven für die fünf Haufen mit römischen Ziffern bezeichnet, und zwar in der Reihenfolge ihres relativen Alters, wie es sich aus den Farbenhelligkeitsdiagrammen überschlagsweise schätzen läßt. Man sieht, daß Fig. 4 mit unseren Vermutungen nicht in Widerspruch steht. Ja sie ist vielleicht das sicherste Mittel zur Ordnung der Sternhaufen nach ihrem relativen Alter.

Göttingen, Sternwarte, 25. August 1924.

Autorenregister.

Anderson, Wilhelm. Über die Existenzmöglichkeit von kosmischem Staube in der Sonnenkorona. S. 299.

Arkadiew, W. Magnetische Spektra von Eisen- und Nickeldrähten für zentimeterlange Hertzsche Wellen. S. 11.

Becker, Richard. Eine einfache kinetische Ableitung der Ionisierungs- und Dampfdruckgleichung. S. 256.

Bodócs, Stephan. Die Verallgemeinerung des „Hyperbelsatzes der geometrischen Optik". S. 114.

Bruggencate, P. ten s. Kienle.

Bucherer, A. H. Nachtrag zur Arbeit: Über die Masse als Funktion des Schwerepotentials. S. 335.

Burger, H. C. s. Ornstein.

Ewald, W. und Polanyi, M. Plastizität und Festigkeit von Steinsalz unter Wasser. S. 29.

Falkenhagen, H. Zum Paschen-Back-Effekt des H-Atoms. S. 1.

Fock, V. Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke. S. 102.

Gleich, G. v. Die Vieldeutigkeit in der Relativitätstheorie. S. 329.

Grebe, L. und Kriegesmann, L. Über den Energieverbrauch bei der Ionisation der Luft durch Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge. S. 91.

Grützmacher, Martin. Über die Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeitsgemischen. S. 342.

Günther-Schulze, A. Kathodenfall, Stromstärke und Fallraumdicke der Glimmentladung in Gemischen von Gasen, die chemisch nicht miteinander reagieren. S. 129.

— Über die Existenz des Lichtbogens bei nicht glühender Kathode. S. 325.

Jazyna, Witold. Die thermodynamische Invariante und die spezifische Wärme beim absoluten Nullpunkt. S. 371.

Kienle, H. und Bruggencate, P. ten. Die absolute Helligkeit der Plejadensterne. S. 373.

Kriegesmann, L. s. Grebe.

Ladenburg, Rudolf. Der quadratische elektrische Effekt an den D-Linien des Natriums in Absorption (inverser Starkeffekt). S. 51.

Lyon, Nikolaus. Über die elektrische Doppelbrechung von Gasen. S. 287.

Masing, G. und Polanyi, M. Zur Reißverfestigung von Zink durch Kaltrecken. S. 169.

Mecke, R. Zur Systematik der Bandenspektra. S. 261.

Müller, Max. Über die Abhängigkeit der Röntgenstrahlenausbeute von der Entladungsform. S. 146.

Ornstein, L. S. und Burger, H. C. Intensitäten der Komponenten im Zeemaneffekt. S. 135.

Plotnikow, W. A. Die Verpackungshypothese. S. 339.

Pohlmeyer, Werner. Über das β-Strahlenspektrum von Th B + C. S. 216.

Polanyi, M. s. Ewald.

— s. Masing.

Riede, Alfred. Galvanische Leitfähigkeit und Halleffekt dünner Nickelschichten. S. 177.

Schiebold, E. Über graphische Auswertung von Röntgenphotogrammen. S. 355.

Senftleben, H. A. Bemerkungen zu meiner Publikation: „Zur Grundlegung der Quantentheorie". S. 95.

Skobelzyn, D. Über den Rückstoßeffekt der zerstreuten γ-Strahlen. S. 278.

Smekal, Adolf. Zur Quantentheorie der radioaktiven Zerfallsvorgänge II. S. 142.

Wever, Franz. Über die Walzstruktur kubisch kristallisierender Metalle. S. 69.

Wiśniewski, Felix Joachim v. Über die Absorptionsgrenzen der K-Reihe. S. 231.

Witt, Holjer. Prüfung einer spektrometrischen Methode im langwelligen Spektrum. S. 236.

— Über Serien im Absorptionsspektrum des Wasserdampfes. S. 249.